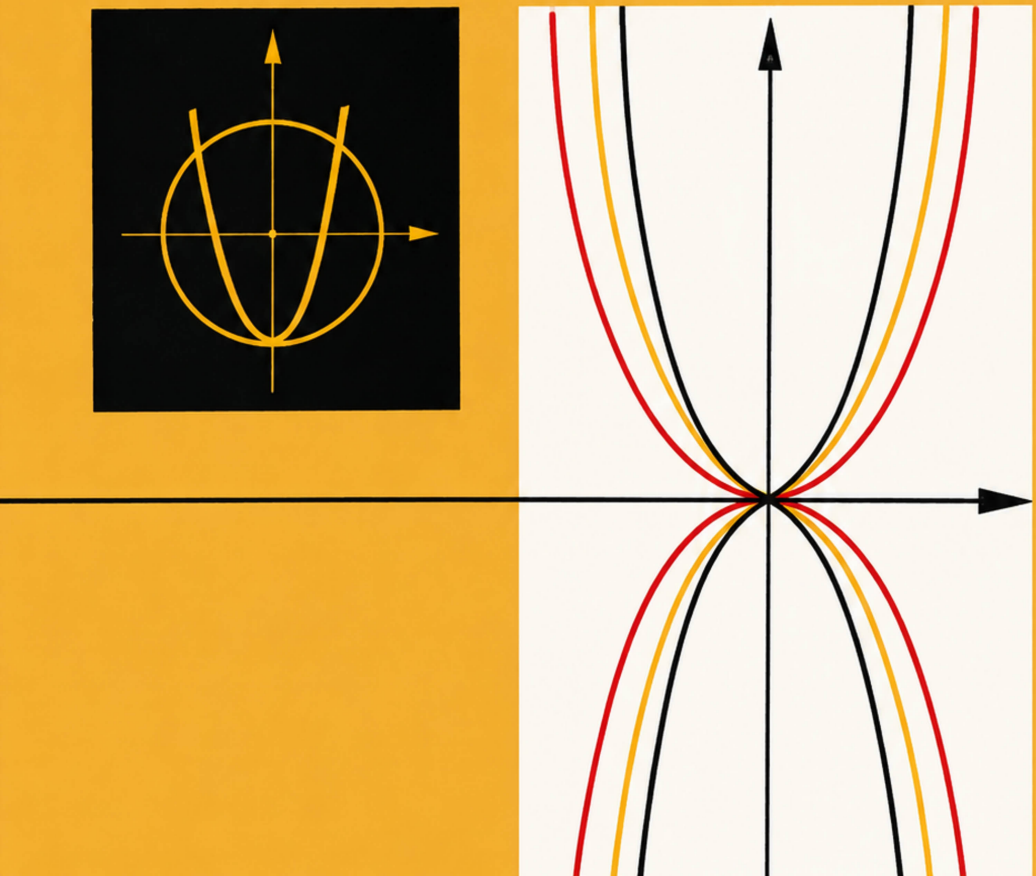
Ф. П. ЯРЕМЧУН
П. А. РУДЧЕНКО

# АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

*справочник*





Ф. П. ЯРЕМЧУК
П. А. РУДЧЕНКО

# АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

*Справочник*

Издание второе,
переработанное
и дополненное

«НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ — 1976

512(083)
Я72

УДК 51(08)

В справочнике изложены методы решения основных типов задач и примеров по алгебре и элементарным функциям.

Каждый из разделов содержит теоретические положения, подробное решение соответствующих задач и примеров с методическими указаниями, а также ряд упражнений для самостоятельной работы.

Второе издание дополнено главами об обратных тригонометрических функциях и пределах, а также сведениями о приближенных вычислениях, непрерывности функций и др.

Предназначен для желающих углубить знания по математике и для слушателей подготовительных отделений вузов. Может быть полезен учащимся старших классов, преподавателям средних школ, а также поступающим в вузы.

Рецензент
кандидат педагогических наук *З. И. СЛЕПКАНЬ*

Редакция справочников

Я $\frac{00001-159}{M221(04)-76}$ БЗ—37—33—75

© Издательство «Наукова думка», 1976 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . . 3

Глава 1. **Действительные числа**

§ 1. Натуральные числа . . . . . 5
§ 2. Действия над натуральными числами . . . . . 5
§ 3. Делимость натуральных чисел . . . . . 11
§ 4. Число нуль . . . . . 14
§ 5. Дробные числа . . . . . 15
§ 6. Действия над дробными числами . . . . . 17
§ 7. Рациональные числа . . . . . 20
§ 8. Действия над рациональными числами . . . . . 22
§ 9. Десятичные дроби . . . . . 24
§ 10. Проценты . . . . . 27
§ 11. Действительные числа . . . . . 31
§ 12. Действия над действительными числами . . . . . 35
§ 13. Абсолютная величина (модуль) действительного числа . . 37
§ 14. Приближенные вычисления . . . . . 39
Упражнения . . . . . 49

Глава 2. **Тождественные преобразования рациональных выражений**

§ 1. Понятие тождества и тождественного преобразования . . . 52
§ 2. Целые рациональные выражения . . . . . 55
§ 3. Разложение многочленов на множители . . . . . 66
§ 4. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное нескольких многочленов . . . . . 69
§ 5. Дробные рациональные выражения . . . . . 72
§ 6. Пропорции . . . . . 78
Упражнения . . . . . 80

Глава 3. **Тождественные преобразования иррациональных выражений**

§ 1. Понятие корня и его основные свойства . . . . . 82
§ 2. Арифметический корень и его свойства . . . . . 83
§ 3. Основные правила действий над арифметическими корнями 86
§ 4. Действия над корнями в множестве действительных чисел 88
§ 5. Вынесение множителя из-под знака корня и введение его под знак корня . . . . . 90
§ 6. Освобождение от иррациональности числителя или знаменателя дробного выражения . . . . . 92

§ 7. Преобразование сложного квадратного корня (радикала) . . 97
§ 8. Тождественные преобразования иррациональных выражений 100
Упражнения . . . . . 104

Глава 4. **Алгебраические уравнения**

§ 1. Общие сведения об уравнениях . . . . . 107
§ 2. Целые рациональные алгебраические уравнения с одним неизвестным первой и второй степени . . . . . 114
§ 3. Уравнения высших степеней, решение которых приводится к решению квадратных уравнений . . . . . 126
§ 4. О делимости многочленов . . . . . 135
§ 5. Некоторые свойства целых рациональных алгебраических уравнений . . . . . 139
§ 6. Решение рациональных алгебраических уравнений с буквенными коэффициентами . . . . . 144
§ 7. Иррациональные уравнения . . . . . 147
§ 8. Задачи на составление уравнений . . . . . 157
Упражнения . . . . . 161

Глава 5. **Системы алгебраических уравнений**

§ 1. Системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными 167
§ 2. Понятие об определителях второго и третьего порядка . . 174
§ 3. Решение систем линейных уравнений с помощью определителей . . . . . 180
§ 4. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными . . . . . 182
§ 5. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными . . . . . 184
§ 6. Системы трех уравнений с тремя неизвестными . . . . . 205
§ 7. Задачи на составление систем уравнений . . . . . 211
Упражнения . . . . . 214

Глава 6. **Алгебраические неравенства**

§ 1. Тождественные неравенства . . . . . 217
§ 2. Неравенства с одним неизвестным . . . . . 232
§ 3. Решение рациональных неравенств с одним неизвестным . . 235
§ 4. Системы рациональных неравенств с одним неизвестным . . 247
§ 5. Неравенства с неизвестным под знаком абсолютной величины. Иррациональные неравенства . . . . . 252
§ 6. Исследование уравнений первой и второй степени с одним неизвестным . . . . . 259
§ 7. Исследование решений задач на составление уравнений . . 265
Упражнения . . . . . 268

Глава 7. **Начальные сведения о функциях**

§ 1. Понятие функции, область определения и способы ее задания . . . . . 271
§ 2. Элементарные функции, их классификация и основные характеристики . . . . . 277
§ 3. Степенная функция . . . . . 289
§ 4. Линейная функция . . . . . 298
§ 5. Квадратичная функция . . . . . 299

§ 6. Дробно-линейная функция . . . . . 306
§ 7. Преобразование графиков функций . . . . . 309
§ 8. Графические способы решения уравнений, неравенств и их систем . . . . . 316
§ 9. Системы неравенств с двумя переменными . . . . . 323
Упражнения . . . . . 340

## Глава 8. Числовые последовательности. Прогрессии.

§ 1. Понятие числовой последовательности . . . . . 344
§ 2. Арифметическая прогрессия . . . . . 347
§ 3. Геометрическая прогрессия . . . . . 352
§ 4. Метод математической индукции . . . . . 357
§ 5. Предел числовой последовательности . . . . . 358
§ 6. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии . . . 359
§ 7. Обращение десятичных периодических дробей в обыкновенные . . . . . 362
Упражнения . . . . . 364

## Глава 9. Показательная и логарифмическая функции

§ 1. Обобщение понятия степени . . . . . 366
§ 2. Показательная функция . . . . . 371
§ 3. Логарифмы и их свойства . . . . . 372
§ 4. Логарифмическая функция, ее свойства и график . . . . 378
§ 5. Десятичные логарифмы и их основные свойства . . . . . 380
§ 6. Логарифмическая линейка . . . . . 381
§ 7. Показательные и логарифмические уравнения . . . . . 383
§ 8. Системы показательных и логарифмических уравнений . . 394
§ 9. Показательные и логарифмические неравенства . . . . . 397
§ 10. Графическое решение уравнений, неравенств и их систем 400
Упражнения . . . . . 407

## Глава 10. Тригонометрические функции

§ 1. Обобщение понятия дуги и угла. Измерение дуг и углов. Общее определение дуги и угла . . . . . 412
§ 2. Тригонометрические функции произвольного угла . . . . 415
§ 3. Основные тригонометрические тождества . . . . . 423
§ 4. Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций . . . . . 425
§ 5. Формулы приведения . . . . . 427
§ 6. Четность и нечетность тригонометрических функций . . . 429
§ 7. Формулы двойных и тройных углов (аргументов) . . . . 429
§ 8. Формулы половинного аргумента . . . . . 432
§ 9. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму . . . . . 433
§ 10. Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение . . . . . 434
§ 11. Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента . . . . . 436
§ 12. Преобразование алгебраической суммы в произведение с помощью введения вспомогательного аргумента . . . . 437
§ 13. Тригонометрические функции числового аргумента . . . . 438
§ 14. Периодичность тригонометрических функций . . . . . 439

§ 15. Основные свойства и графики тригонометрических функций 442
§ 16. Простые гармонические колебания . . . . . 452
§ 17. Тригонометрические уравнения . . . . . 454
§ 18. Решение систем тригонометрических уравнений . . . . . 475
§ 19. Тригонометрические неравенства . . . . . 478
§ 20. Графическое решение уравнений, неравенств и их систем, содержащих тригонометрические функции . . . . . 482
Упражнения . . . . . 486

## Глава 11. Обратные тригонометрические функции

§ 1. Понятие обратной тригонометрической функции . . . . . 492
§ 2. Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики . . . . . 494
§ 3. Основные соотношения между обратными тригонометрическими функциями . . . . . 501
§ 4. Формулы сложения и вычитания обратных тригонометрических функций . . . . . 505
§ 5. Формулы удвоения обратных тригонометрических функций и деления их на два . . . . . 515
§ 6. Тождественные преобразования с обратными тригонометрическими функциями . . . . . 517
§ 7. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции . . . . . 519
§ 8. Графические способы решения уравнений, неравенств и их систем, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции . . . . . 522
Упражнения . . . . . 525

## Глава 12. Соединения и бином Ньютона

§ 1. Соединения (комбинаторика) . . . . . 527
§ 2. Бином Ньютона . . . . . 533
Упражнения . . . . . 540

## Глава 13. Пределы.

§ 1. Предел последовательности. Свойства бесконечных последовательностей . . . . . 542
§ 2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства . . . . . 544
§ 3. Основные свойства пределов. Признаки существования пределов . . . . . 547
§ 4. Понятие числового ряда. Сумма ряда. Необходимый признак сходимости. Основные свойства рядов . . . . . 551
§ 5. Суммирование некоторых конечных последовательностей 555
§ 6. Суммирование рядов . . . . . 559
§ 7. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства . . . . . 562
§ 8 Свойства пределов функции. Признаки существования предела функции . . . . . 565
§ 9. Два замечательных предела . . . . . 569
§ 10. Натуральные логарифмы . . . . . 572
§ 11. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции . . . . . 576

§ 12. Сравнение бесконечно больших функций. Эквивалентные бесконечно большие функции . . . . . 579
§ 13. Непрерывность функции . . . . . 582
§ 14. Основные свойства непрерывных функций . . . . . 583
§ 15. Точки разрыва . . . . . 584
§ 16. Непрерывность элементарных функций . . . . . 585
Упражнения . . . . . 587

Глава 14. **Комплексные числа**

§ 1. Понятие комплексного числа . . . . . 590
§ 2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме . . . . . 591
§ 3. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа . . . . . 596
§ 4. Тригонометрическая форма комплексного числа . . . . . 599
§ 5. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме . . . . . 601
Упражнения . . . . . 608

Глава 15. **Уравнения высших степеней**

§ 1. Целое алгебраическое уравнение с одним неизвестным и его некоторые свойства . . . . . 611
§ 2. Составление целого алгебраического уравнения по его корням. Теорема Виета . . . . . 614
§ 3. Двучленные и трехчленные уравнения . . . . . 621
Упражнения . . . . . 624
Разные задачи . . . . . 626
Ответы и указания . . . . . 630
Приложения . . . . . 649
Литература . . . . . 673
Алфавитный указатель . . . . . 676

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Глубокие и прочные знания по математике можно приобрести лишь усвоив основной теоретический материал и решив достаточное количество упражнений на его применение. Важны четкая математическая постановка задач и примеров, обоснованность и полнота их решения, подтверждение правильности ответов.

Вниманию читателя предлагаются методы решения основных типов задач и примеров по алгебре и элементарным функциям. Излагаются краткие теоретические сведения по арифметике, алгебре и элементарным функциям, необходимые для решения задач элементарной математики. Некоторые из них приводятся с доказательствами и иллюстрируются примерами. Включена глава «Тригонометрические функции», в которой содержатся основные сведения по тригонометрии (за исключением применения тригонометрии к решению геометрических задач). Кроме подробно разбираемых в конце каждой главы предлагаются примеры и задачи для самостоятельной работы. К ним даются ответы и иногда краткие указания. Однако при подготовке не следует ограничиваться решением только этих упражнений, так как данный справочник не заменяет сборников задач для средней школы и конкурсных задач для поступающих в вузы.

Во втором издании, как и в первом, изложение теоретического материала в основном соответствует существующей в настоящее время программе вступительных экзаменов по математике в вузы, а также программе, по которой будут обучаться учащиеся средних школ до 1977 года.

При подготовке второго издания книги были учтены замечания, присланные читателями, относительно дополнений и изложения, а также устранены замеченные опечатки. Добавлены две новые главы: 11, посвященная обратным тригонометрическим функциям, и 13, в которой рассмотрены пределы и непрерывность функций. Кроме того,

добавлены сведения, касающиеся процентов, приближенных вычислений, неравенств и систем неравенств с двумя переменными и некоторые другие вопросы. Увеличено количество упражнений.

Авторы благодарны доц. З. И. Слепкань, взявшей на себя нелегкий труд по рецензированию второго издания книги и сделавшей ряд полезных замечаний по улучшению книги, а также В. И. Гридасову, В В. Попову и всем читателям, приславшим свои замечания к первому изданию книги.

Критические замечания и предложения, направленные по адресу: 252004 Киев — 4, ул Репина, 3, издательство «Наукова думка», будут приняты с благодарностью.

# Глава 1

# ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

## § 1. Натуральные числа

Натуральные числа возникли в результате счета предметов (элементов) различных множеств.

Множество всех натуральных чисел, расположенных в порядке счета:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots,$$

называют натуральным рядом чисел. Из двух натуральных чисел большим называют то, которое встречается в натуральном ряду позже. Обозначения: $a > b$ ($a$ больше $b$); $a < b$ ($a$ меньше $b$).

Натуральный ряд чисел обладает следующими свойствами:

а) наименьшее число натурального ряда — единица;

б) за каждым натуральным числом в натуральном ряду непосредственно следует одно и только одно натуральное число;

в) натуральный ряд чисел бесконечен.

Любое натуральное число в десятичной системе счисления можно записать в виде

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \qquad (1.1)$$

где $k$ — натуральное число, $a_i$ — цифры десятичной системы счисления ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$).

Множество всех натуральных чисел обозначается буквой $N$ и записывается так:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Если число $a$ принадлежит множеству натуральных чисел, то это записывают так:

$$a \in N,$$

где «$\in$» — знак принадлежности. Если число $a$ не принадлежит множеству натуральных чисел, то записывают так:

$$a \overline{\in} N.$$

## § 2. Действия над натуральными числами

*Арифметическим действием* называют нахождение по двум данным числам (компонентам действия) третьего числа (результата действия). В арифметике рассматриваются четыре действия: сложение, вычитание умножение и деление.

**Сложение.** Действие сложения натуральных чисел является первичным математическим понятием и формально не определяется. Оно

состоит в том, что по нескольким числам, называемым слагаемыми, находится число, называемое их суммой. Если число $a$ есть численность* множества $A$, а число $b$ есть численность множества $B$, то под суммой чисел $a$ и $b$ понимают число $c$, которое является численностью объединения** множеств $A$ и $B$. Таким образом, сложение натуральных чисел сводится к счету, при этом допускается, что результат счета предметов (элементов) множества не зависит от порядка счета.

Записывают действие сложения чисел $a$ и $b$ так:

$$a + b = c.$$

Сумма двух или нескольких натуральных чисел всегда существует (есть некоторое натуральное число) и притом однозначна.

Числовое множество называется замкнутым относительно некоторого действия, если результат этого действия над любыми двумя (или несколькими) элементами этого множества всегда является элементом этого же множества.

Множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения.

**Вычитание.** Вычитанием называется арифметическое действие, посредством которого по данной сумме двух слагаемых и одному из них находится другое слагаемое. При этом сумму двух слагаемых называют уменьшаемым, известное слагаемое — вычитаемым, а искомое слагаемое — разностью. Действие вычитания является обратным действию сложения.

Разностью двух натуральных чисел $a$ и $b$ называется такое третье число $c$, которое в сумме с вычитаемым $b$ дает уменьшаемое $a$. Разность двух чисел $a$ и $b$ обозначается $a - b$. Следовательно, по определению, $a - b = c$, если $c + b = a$.

Множество натуральных чисел не замкнуто относительно вычитания.

Разность двух натуральных чисел $a$ и $b$ является натуральным числом, если $a > b$. Если вычитание двух натуральных чисел выполнимо, то их разность однозначна.

**Умножение.** Умножением натуральных чисел называется сложение одинаковых слагаемых.

При умножении каждое из слагаемых называют множимым, число этих слагаемых — множителем, а их сумму — произведением. Множимое и множитель часто называют сомножителями.

Сумму

$$\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{b \text{ раз}} = c$$

записывают так: $a \cdot b = c$.

Множество натуральных чисел замкнуто относительно умножения, а результат умножения (произведение) однозначен.

**Деление.** Делением называется арифметическое действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из них находится другой сомножитель. При этом произведение назы-

---

* Сопоставление элементов данного множества с последовательными элементами натурального ряда чисел, начиная с единицы, называют счетом, а последнее число, названное при этом сопоставлении, указывает численность множества.

** Объединением двух данных множеств называется множество, содержащее все элементы этих множеств (если множества имеют одинаковые элементы, то последние входят в объединение только один раз).

вают делимым, известный сомножитель — делителем, а искомый сомножитель — частным.

Таким образом, частным двух натуральных чисел $a$ и $b$ называется такое третье число $c$, которое в произведении с делителем $b$ дает делимое $a$. Деление обозначается как $a : b$ или $\frac{a}{b}$. Следовательно, $a : b = c$, если $c \cdot b = a$.

Множество натуральных чисел не замкнуто относительно деления. Если действие деления в множестве натуральных чисел выполнимо, то частное однозначно. При этом делимое $a$ называют кратным числа (делителя) $b$, а число $b$ называют делителем числа $a$.

**Деление с остатком.** Делением с остатком называется арифметическое действие, посредством которого по двум натуральным числам $a$ и $b$ находят два таких числа $c$ и $r$, для которых справедливо равенство

$$a = b \cdot c + r, \text{ причем } r < b.$$

При этом $a$ называют делимым, $b$ — делителем, $c$ — частным а $r$ — остатком. Если $r = 0$, то говорят, что $a$ делится на $b$, и тогда $a$ называют кратным $b$, а $b$ — делителем $a$.

Множество натуральных чисел замкнуто относительно деления с остатком. Результат деления натуральных чисел с остатком всегда однозначен.

### Основные законы действий над натуральными числами

Основные законы действий над натуральными числами принимаются без доказательства (как аксиомы).

1. Коммутативный (переместительный) закон сложения: *от перемены мест слагаемых их сумма не изменится.* Например,

$$a + b = b + a. \tag{1.2}$$

2. Ассоциативный (сочетательный) закон сложения: *сумма не изменится, если какую-либо группу слагаемых заменить их суммой.* Например,

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c). \tag{1.3}$$

3. Закон монотонности: *если число a больше числа b, то всегда имеет место неравенство*

$$a + c > b + c, \tag{1.4}$$

какое бы ни было число $c$.

4. Коммутативный (переместительный) закон умножения: *от перемены мест сомножителей их произведение не изменится.* Например,

$$a \cdot b = b \cdot a. \tag{1.5}$$

5. Ассоциативный (сочетательный) закон умножения: *произведение не изменится, если какую-либо группу сомножителей заменить их произведением.* Например,

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c). \tag{1.6}$$

6. Дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно сложения: *чтобы умножить сумму нескольких слагаемых на число, можно умножить на это число каждое слагаемое и полученные произведения сложить.* Например,

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \tag{1.7}$$

или (на основании переместительного закона умножения)

$$c\,(a + b) = a \cdot c + b \cdot c. \tag{1.8}$$

7. Закон монотонности для умножения: *если число a больше числа b, то всегда имеет место неравенство*

$$a \cdot c > b \cdot c, \tag{1.9}$$

какое бы ни было натуральное число $c$.

Основные правила действий формулируются следующим образом.

1. Чтобы прибавить к какому-либо числу сумму нескольких чисел, можно прибавить к этому числу каждое слагаемое одно за другим. Например,

$$a + (b + c) = a + b + c.$$

2. Чтобы прибавить какое-либо число к сумме, можно прибавить это число к одному из слагаемых, оставив другие слагаемые без изменения. Например,

$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).$$

3. Чтобы вычесть из какого-либо числа сумму нескольких чисел, можно вычесть из этого числа каждое слагаемое одно за другим. Например,

$$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

4. Чтобы вычесть число из суммы нескольких, можно вычесть его из какого-нибудь одного слагаемого, оставив другие без изменения. Например,

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

5. Чтобы вычесть из какого-либо числа разность двух чисел, можно прибавить к нему вычитаемое и из полученного результата вычесть уменьшаемое или вычесть из этого числа уменьшаемое (если это возможно) и к полученному результату прибавить вычитаемое. Например,

$$a - (b - c) = (a + c) - b = (a - b) + c.$$

6. Чтобы вычесть из разности какое-либо число, можно вычесть его из уменьшаемого, оставив без изменения вычитаемое, или прибавить это число к вычитаемому, оставив без изменения уменьшаемое. Например,

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c).$$

7. Чтобы умножить число на произведение нескольких чисел, можно умножить его на первый сомножитель; полученный результат умножить на второй сомножитель и т. д. до последнего. Например,

$$a \cdot (bc) = (a \cdot b) \cdot c.$$

8. Чтобы умножить произведение нескольких чисел на какое-либо число, можно умножить на него один из сомножителей, оставив другие без изменения. Например,

$$(ab) \cdot c = (ac) \cdot b = a \cdot (bc).$$

9. Чтобы разделить какое-либо число на произведение нескольких чисел, можно разделить его на первый сомножитель, полученный результат разделить на второй сомножитель и т. д. до последнего. Например,

$$a : (bc) = (a : b) : c.$$

10. Чтобы разделить произведение нескольких чисел на какое-либо число, можно разделить на него один из сомножителей, оставив другие без изменения. Например,

$$(ab) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c).$$

11. Чтобы разделить сумму нескольких чисел на какое-либо число, можно разделить на него каждое из слагаемых и полученные результаты сложить. Например,

$$(a + b) : c = (a : c) + (b : c).$$

Часто допускаются ошибки при делении числа на сумму нескольких чисел и при делении произведения нескольких чисел на какое-либо число. В связи с этим отметим, что частное от деления какого-либо числа на сумму нескольких чисел не равно сумме частных от деления этого числа на каждое из слагаемых. Например,

$$a : (b + c) \neq (a : b) + (a : c) \quad \left(\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right).$$

Частное от деления произведения нескольких чисел на какое-либо число (отличное от единицы) не равно произведению частных от деления на него каждого из сомножителей. Например,

$$(a \cdot b) : c \neq (a : c) \cdot (b : c).$$

12. Чтобы разделить разность двух чисел на какое-либо число, можно разделить на него уменьшаемое и вычитаемое отдельно и из первого результата вычесть второй, т. е.

$$(a - b) : c = (a : c) - (b : c).$$

Как и при делении на сумму частное от деления какого-либо числа на разность не равно разности частных от деления его на уменьшаемое и вычитаемое, т. е.

$$a : (b - c) \neq (a : b) - (a : c) \quad \left(\frac{a}{b-c} \neq \frac{a}{b} - \frac{a}{c}\right).$$

Изменение результатов действий в зависимости от изменения их компонентов подчиняется следующим законам.

1. Закон изменения суммы:

*если одно из слагаемых увеличить или уменьшить на какое-либо число, то и сумма увеличится или уменьшится на то же число*, т. е. если $a + b = c$, то $(a \pm d) + b = c \pm d$.

2. Законы изменения разности:

*если увеличить или уменьшить на некоторое число уменьшаемое, то и разность соответственно увеличится или уменьшится на такое же число*, т. е. если $a - b = c$, то $(a \pm d) - b = c \pm d$;

*если увеличить или уменьшить на некоторое число вычитаемое, то разность соответственно уменьшится или увеличится на такое же число*, т. е. если $a - b = c$, то $a - (b \pm d) = c \mp d$;

*если увеличить или уменьшить на одно и то же число уменьшаемое и вычитаемое, то разность не изменится*, т. е. если $a - b = c$, то $(a \pm d) - (b \pm d) = c$.

3. Законы изменения произведения:

*если один из сомножителей увеличить или уменьшить в несколько раз, то и произведение увеличится или уменьшится во столько же раз*, т. е. если $ab = c$, то $(a \cdot d)\, b = c \cdot d$ и $\left(\frac{a}{d}\right) \cdot b = \frac{c}{d}$;

*если один из сомножителей увеличить в несколько раз, а другой уменьшить во столько же раз, то произведение не изменится*, т. е. если $ab = c$, то $(a \cdot d) \cdot \left(\frac{b}{d}\right) = c$.

4. Законы изменения частного:

*если увеличить или уменьшить в несколько раз делимое, то и частное увеличится или уменьшится во столько же раз* (деление без остатка), т. е. если $a : b = c$, то $(a \cdot d) : b = c \cdot d$ и $\left(\frac{a}{d}\right) : b = \frac{c}{d}$;

*если увеличить или уменьшить в несколько раз делитель, то частное уменьшится или увеличится во столько же раз* (деление без остатка), т. е. если $a : b = c$, то $a : (bd) = \frac{c}{d}$ и $a : \left(\frac{b}{d}\right) = c \cdot d$;

*если увеличить или уменьшить в одно и то же число раз делимое и делитель, то частное не изменится* (деление без остатка), т. е. если $a : b = c$, то $(ad) : (bd) = c$ и $\left(\frac{a}{d}\right) : \left(\frac{b}{d}\right) = c$;

*если увеличить или уменьшить в одно и то же число раз делимое и делитель, то частное не изменится, а остаток увеличится или уменьшится во столько же раз*, т. е. если $a = bc + r$, то $a \cdot d = (bd) \cdot c + rd$ и $\frac{a}{d} = \left(\frac{b}{d}\right) \cdot c + \frac{r}{d}$.

### Порядок действий. Скобки и их употребление

Арифметические действия делятся на действия двух ступеней. Сложение и вычитание являются действиями первой ступени, умножение и деление — действиями второй ступени.

Действия первой ступени выполняются в порядке записи. Действия только умножения или только деления также выполняются в порядке записи. При выполнении действий второй ступени сначала производится умножение, а затем деление. (Во многих учебниках по арифметике правило для выполнения действий умножения и деления сформулировано так: «действия второй ступени выполняются в порядке их записи», что противоречит правилу порядка выполнения действий, принятому в алгебре. Например, в арифметике правильным результа-

том выполнения действий $8 \cdot 6 : 3 \cdot 2$ будет 32. В алгебре $ab : cd = \cdot 8 \cdot 6 : 3 \cdot 2 = 8$. Следует в арифметике придерживаться такого же порядка выполнения действий, как в алгебре).

Для изменения принятого порядка действий употребляются круглые, квадратные (прямоугольные) и фигурные скобки. Обычно сначала выполняются действия в круглых скобках, затем в квадратных и далее в фигурных.

## § 3. Делимость натуральных чисел

*Делителем* натурального числа называется всякое натуральное число, на которое данное число делится без остатка.

*Кратным* натурального числа называется всякое натуральное число, которое делится на данное без остатка.

Например, делителями числа 72 являются числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Кратными числа 15 являются числа 15, 30, 45, 60, 75, ...

*Признаком делимости* называют правило, посредством которого можно установить делимость одного числа на другое, не выполняя действия деления.

Признак делимости суммы:

**Теорема 1.** *Если каждое слагаемое делится на какое-либо число, то и их сумма разделится на это число.*

Теорема, обратная теореме 1, неверна. Если сумма делится на какое-либо число, то слагаемые этой суммы могут делиться и не делиться на это число.

**Теорема 2.** *Если одно из слагаемых не делится на какое-либо число, а все остальные слагаемые делятся, то сумма не разделится на это число.*

Теорема, обратная теореме 2, неверна.

Замечание. Если больше одного слагаемого не делится на некоторое число, то о делимости суммы ничего определенного сказать нельзя (сумма может либо делиться, либо не делиться на это число).

Признак делимости разности:

**Теорема 1.** *Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое число, то на это число делится и разность.*

**Теорема 2.** *Если уменьшаемое (вычитаемое) делится на некоторое число, а вычитаемое (уменьшаемое) не делится, то и разность на это число не разделится.*

Теоремы, обратные теоремам 1 и 2, неверны.

Замечание. Если и уменьшаемое и вычитаемое не делится на некоторое число, то о делимости разности ничего определенного сказать нельзя (разность может делиться или не делиться на это число).

Признаки делимости произведения:

**Теорема 1.** *Если хотя бы один из сомножителей делится на некоторое число, то и произведение разделится на это число.*

Обратная теорема неверна.

**Теорема 2.** *Если первое число делится на второе, а второе делится на третье, то первое число делится на третье.*

**Теорема 3.** *Если одно число не делится на другое, то оно не может делиться на любое кратное другому числу.*

**Теорема 4.** *Если некоторое число делится на произведение нескольких сомножителей, то оно делится и на каждый из них.*

Теорема, обратная теореме 4, неверна.

**Теорема 5.** *Если данное число делится на каждое из нескольких*

*попарно взаимно простых чисел*, то оно делится и на их произведение.*

Признаки делимости на некоторые числа.

Числа, которые делятся на 2 (без остатка), называются четными, а которые не делятся на 2 — нечетными. Цифры 0, 2, 4, 6, 8—четные; цифры 1, 3, 5, 7, 9 — нечетные.

Всякое четное число $k$ может быть представлено в виде $k = 2n$, а нечетное — в виде $k = 2n - 1$, где $n$ — натуральное число (в общем случае $n$ — целое число).

На 2 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются четной цифрой.

На 5 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются цифрой 0 или 5.

На 4 (на 25) делятся все те и только те числа, которые оканчиваются двумя нулями или две последние цифры которых составляют число, делящееся на 4 (на 25).

На 3 делятся все те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3. На 9 делятся все те и только те числа, сумма цифр которых делится на 9.

На 6 делятся все те и только те числа, которые делятся и на 2 и на 3.

На 8 (на 125) делятся все те и только те числа, которые оканчиваются тремя нулями или три последние цифры которых изображают число, делящееся на 8 (на 125).

На 10 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются нулем.

На 7 (на 11 или на 13) делятся все те и только те числа, у которых разность между числом, изображенным тремя последними цифрами, и числом, изображенным остальными цифрами (или наоборот), делится на 7 (на 11 или на 13). Существует более простой признак делимости на 11: на 11 делятся все те и только те числа, у которых сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме остальных цифр или отличается от нее на число, делящееся на 11.

**Числа простые и составные.** Единственное натуральное число, имеющее единственный делитель,— это единица. Остальные числа имеют по два и больше делителей.

Числа, имеющие только два различных делителя, называются простыми. Например, 5 — простое число, так как оно делится только на 1 и на 5; 41 — простое число, так как оно делится только на 1 и на 41.

Числа, имеющие больше двух различных делителей, называются составными. Например, 10 — составное число, так как оно делится на 1, 2, 5 и 10; 39 — составное число, так как оно делится на 1, 3, 13 и 39.

Множество простых чисел, как и множество составных чисел, бесконечно.

Единица не относится ни к простым, ни к составным числам.

**Разложение составных чисел на произведение простых.** Основная теорема арифметики: *всякое составное число можно представить в виде произведения простых чисел и притом единственным способом (порядок множителей не учитывается).*

Чтобы разложить данное число на простые множители, надо сначала проверить по таблице простых чисел, не является ли оно прос-

* См. подраздел «Числа простые и составные» этого параграфа.

тым. Если число оказалось составным, то, пользуясь признаками делимости, проверяют последовательно, на какое из простых чисел 2, 3, 5, 7, ... оно делится; затем аналогично поступают с частным, полученным после деления. Этот процесс продолжают до тех пор, пока в частном не получится простое число.

Одни и те же простые множители в разложении составного числа могут встречаться несколько раз. Например, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Для обозначения произведения одинаковых сомножителей вводится понятие степени.

Произведение одинаковых сомножителей называется степенью. Сомножитель этого произведения называется основанием степени, а количество сомножителей — показателем степени. Обозначение: $a^n$, где $a$ — основание степени, $n$ — показатель степени. Следовательно, по определению, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ раз}}$.

Пользуясь определением степени, разложение числа 360 на простые множители можно записать $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

*Наибольшим общим делителем* (НОД) нескольких чисел называется наибольшее натуральное число, на которое делятся все эти числа.

Общие делители нескольких чисел обозначим $d$, а наибольший общий делитель $D$.

Для двух чисел $a$ и $b$ записывают $D = D(a; b)$; аналогично для нескольких чисел. Например, число 24 имеет делителями числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; число 36 имеет делителями числа 1, 2, 3, 4, 6, 9. 12, 18, 36. Тогда $d = d(24; 36) — 1, 2, 3, 4, 6, 12$; $D = D(24; 36) = 12$,

Два числа, имеющие НОД единицу, называются взаимно простыми.

Для получения НОД нескольких данных чисел достаточно разложить каждое число на простые множители, выписать общие простые множители для всех данных чисел и перемножить их. Найдем, например, НОД чисел 18, 48 и 72.

Разложим каждое из чисел на простые множители: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Выписываем общие для всех чисел простые множители 2 и 3; тогда $D = D(18; 48; 72) = 2 \times \times 3 = 6$.

Для нахождения наибольшего общего делителя двух данных чисел существует так называемый алгоритм Евклида, основанный на последовательном делении. Алгоритм Евклида строится на основании следующих свойств НОД:

а) если первое число делится на второе число, то второе число есть НОД этих чисел:

б) если первое число не делится на второе, то НОД этих чисел равен НОД второго числа и остатка, полученного при делении первого числа на второе.

Чтобы найти НОД двух данных чисел с помощью алгоритма Евклида, надо большее число разделить на меньшее; если деление выполнилось без остатка, то НОД есть меньшее число. Если при делении получился остаток, то меньшее число нужно разделить на этот остаток; затем первый остаток разделить на второй и т. д. до тех пор, пока деление не выполнится без остатка. Первый делитель, при котором деление выполнится без остатка, и будет НОД двух данных чисел. Найдем, например, НОД чисел 112 и 80. При делении 112 на 80 получаем в остатке 32 ($112 = 80 \cdot 1 + 32$). При делении 80 на 32 получаем в остатке 16 ($80 = 32 \cdot 2 + 16$). Деление 32 на 16

выполнилось без остатка ($32 = 16 \cdot 2$). Следовательно, НОД чисел 112 и 80 равен 16, т. е. $D = D(112; 80) = 16$.

Некоторые свойства НОД:

а) частные от деления данных чисел на их НОД есть взаимно простые числа;

б) если умножить каждое из данных чисел на одно и то же число, то и их НОД умножится на это число;

в) всякий общий делитель данных чисел есть делитель их НОД;

г) всякий делитель НОД данных чисел есть общий делитель этих чисел.

*Наименьшим общим кратным* (НОК) данных чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на все данные числа. Например, кратными числа 8 есть числа 8, 16, 24, 32, 40, 48, ...; кратными числа 12 есть числа 12, 24, 36, 48, 60, ... Общими кратными чисел 8 и 12 есть числа 24, 48, ... Наименьшим общим кратным чисел 8 и 12 есть число 24. Это записывают так: $m = m(8; 12) = 24$.

Чтобы найти НОК нескольких чисел, достаточно разложить эти числа на простые множители, затем выписать все множители из наибольшего числа и к ним дописать недостающие множители из остальных чисел (учитывая количество одинаковых множителей). Например, чтобы найти НОК чисел 12, 16, 18, достаточно разложить каждое из них на простые множители ($12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$), затем выписать все простые множители числа 18 (они равны $2 \cdot 3 \cdot 3$) и дописать к ним недостающие множители из разложений чисел 12 и 16 (это $2 \cdot 2 \cdot 2$). Следовательно, $m = m(12; 16; 18) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 144$.

Между НОД и НОК двух чисел существует взаимная связь, которая выражается теоремой: *произведение двух данных чисел равно произведению их НОД и НОК.*

Пользуясь этой теоремой, НОК двух чисел $a$ и $b$ можно найти как частное от деления произведения $ab$ этих чисел на их НОД, т. е.

$$m = \frac{ab}{D}, \tag{1.10}$$

а НОД — как частное от деления произведения $ab$ этих чисел на их НОК, т. е.

$$D = \frac{ab}{m}. \tag{1.11}$$

Некоторые свойства НОК:

а) частные от деления НОК данных чисел на эти числа есть взаимно простые числа;

б) если каждое из данных чисел умножить на одно и то же число, то и их НОК умножится на это число;

в) если некоторое из данных чисел делится на все остальные, то оно есть НОК данных чисел:

г) если данные числа взаимно простые, то НОК равно их произведению.

### § 4. Число нуль

Если в некотором множестве отсутствуют элементы, то говорят, что множество пустое. Численность пустого множества называют 0 (числом нуль).

0 меньше любого натурального числа. Если 0 и все натуральные числа разместить в порядке возрастания, то получим ряд чисел 0, 1, 2, 3, 4, ..., который называют расширенным натуральным рядом.

Множество всех целых неотрицательных чисел расширенного натурального ряда обозначают буквой $Z_0$:

$$Z_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

Пусть $a$ — натуральное число ($a \neq 0$). Действия с нулем определяются следующим образом:

Сложение: $a + 0 = 0 + a = a$; $0 + 0 = 0$.

Вычитание: $a - 0 = a$; $a - a = 0$; $0 - 0 = 0$.

Умножение: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$; $0 \cdot 0 = 0$.

Деление: $0 : a = 0$. Деление на 0 невыполнимо.

Докажите, пользуясь принятыми определениями для действий с нулем, что основные законы действий над натуральными числами имеют место и для действий над целыми неотрицательными числами.

## § 5. Дробные числа

Положительным дробным числом (или дробью) называют пару натуральных чисел, одно из которых, называемое знаменателем, показывает, на сколько равных частей разделена некоторая величина, принятая за единицу, а другое, называемое числителем, — сколько таких частей взято.

Если $a$ и $b$ — натуральные числа, то дробное число со знаменателем $b$ и числителем $a$ записывают $\frac{a}{b}$. Например, запись $\frac{3}{5}$ означает, что некоторую единицу разделили на 5 равных частей, из которых взяты 3 части.

Числитель и знаменатель называются членами дроби.

*Условие равенства:* два дробных числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называются равными, если $ad = bc$.

*Условия неравенства:* дробное число $\frac{a}{b}$ больше дробного числа $\frac{c}{d}\left(\frac{a}{b} > \frac{c}{d}\right)$, если $ad > bc$; дробное число $\frac{a}{b}$ меньше дробного числа $\frac{c}{d}\left(\frac{a}{b} < \frac{c}{d}\right)$, если $ad < bc$.

Например, сравним дробные числа $\frac{5}{41}$ с $\frac{8}{59}$ и $\frac{3}{17}$ с $\frac{21}{119}$.

$5 \cdot 59 = 295$ и $41 \cdot 8 = 328$; так как $5 \cdot 59 < 41 \cdot 8$, то $\frac{5}{41} < \frac{8}{59}$.

$3 \cdot 119 = 357$ и $17 \cdot 21 = 357$; так как $3 \cdot 119 = 17 \cdot 21$, то $\frac{3}{17} = \frac{21}{119}$.

Из условий сравнения дробных чисел следует:

большим из двух дробных чисел с равными знаменателями и неравными числителями является то, у которого числитель больше;

большим из двух дробных чисел с равными числителями и неравными знаменателями является то, у которого меньше знаменатель.

Следует отметить, что всякая дробь, числитель которой меньше знаменателя, меньше единицы; всякая дробь, числитель которой равен знаменателю, равна единице; всякая дробь, числитель которой больше знаменателя, больше единицы. Например, $\frac{3}{7} < 1$, $\frac{8}{8} = 1$ и $\frac{15}{11} > 1$.

Дробь меньше единицы называют правильной, а дробь больше или равную единице — неправильной.

*Основное свойство дробного числа:* если числитель и знаменатель любого дробного числа умножить на одно и то же натуральное число, то получим новое дробное число, равное данному, т. е. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Справедливо и обратное: если числитель и знаменатель данной дроби имеют общий делитель, то при делении на него получаем дробь, равную данной, т. е. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$. Такое деление называют сокращением данной дроби.

Дробь называется несократимой, если числитель и знаменатель взаимно простые числа.

Основное свойство дробного числа позволяет приводить дробные числа к одному и тому же знаменателю или к одному и тому же числителю.

### Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю (числителю)

Чтобы привести несколько дробей * к общему наименьшему знаменателю, надо найти наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей и принять его за знаменатель каждой дроби, а каждый из числителей умножить на частное (дополнительный множитель) от деления НОК на знаменатели. Например, приведем к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{3}{16}$, $\frac{5}{48}$ и $\frac{7}{15}$: НОК $= (16; 48; 15) = 240$; дополнительными множителями к числителям данных дробей будут соответственно $240 : 16 = 15$, $240 : 48 = 5$, $240 : 15 = 16$. Выполняя описанные правилом действия, получим

$$\frac{3}{16} = \frac{3 \cdot 15}{240} = \frac{45}{240}; \quad \frac{5}{48} = \frac{5 \cdot 5}{240} = \frac{25}{240}; \quad \frac{7}{15} = \frac{7 \cdot 16}{240} = \frac{112}{240}.$$

Аналогично приводятся дроби к наименьшему общему числителю. Если требуется, например, сравнить дроби $\frac{2}{141}$ и $\frac{3}{209}$, то удобно их привести к общему наименьшему числителю, а затем сравнить их знаменатели, т. е. $\frac{2}{141} = \frac{6}{423}$ и $\frac{3}{209} = \frac{6}{418}$. Так как $\frac{6}{423} < \frac{6}{418}$, то $\frac{2}{141} < \frac{3}{209}$.

Неограниченная выполнимость действия деления натуральных чисел с помощью дробных чисел проявляется в том, что деление любого натурального числа $a$ на любое натуральное число $b$ дает в

---

* Если среди данных дробей есть сократимые, то сначала выполняется сокращение этих дробей, а затем приведение к общему наименьшему знаменателю. Однако в некоторых случаях лучше не проводить сокращения.

частном дробное число $\frac{a}{b}$, в котором делимое является числителем, а делитель — знаменателем, т. е. $a : b = \frac{a}{b}$. Поэтому всякое натуральное число можно представить в виде дроби, т. е. натуральные числа являются частным случаем дробных. Например, $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \dots$

Число 0 можно представить в виде дроби, у которой числитель 0, а знаменатель — любое натуральное число. Например, $0 = \frac{0}{3} = \frac{0}{15} = \frac{0}{127} = \frac{0}{1000} = \dots$

Всякое дробное число, большее единицы, можно представить в виде суммы натурального и дробного (правильной дроби) чисел.

Пусть $\frac{a}{b} > 1$, т. е. $a > b$. По определению деления с остатком, можно подобрать два таких натуральных числа $q$ и $r$ $(r < b)$, что $a = bq + r$. Разделив обе части равенства на $b$, получим

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b},$$

где $\frac{r}{b}$ — правильная дробь. Например, $\frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7}$; сумму $2 + \frac{1}{7}$ записывают как $2\frac{1}{7}$ и называют смешанным числом.

Целую часть числа $\frac{a}{b}$ обозначают $\left[\frac{a}{b}\right]$, т. е. если $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$, то $\left[\frac{a}{b}\right] = q$. Например, $\left[\frac{1}{3}\right] = 0$; $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$; $\left[\frac{37}{6}\right] = 6$.

Дробную часть числа $\frac{a}{b}$ обозначают $\left\{\frac{a}{b}\right\}$, т. е. если $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$, то $\left\{\frac{a}{b}\right\} = \frac{r}{b}$. Например,

$$\left\{\frac{3}{8}\right\} = \frac{3}{8}; \quad \left\{\frac{10}{3}\right\} = \frac{1}{3}; \quad \left\{\frac{27}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

### § 6. Действия над дробными числами

**Сложение.** Чтобы сложить несколько дробей, достаточно привести их к общему наименьшему знаменателю *, а затем сложить их числители и полученную сумму взять числителем, а найденный общий знаменатель — знаменателем.

Например, $\frac{2}{7} + \frac{3}{14} + \frac{4}{35} = \frac{20}{70} + \frac{15}{70} + \frac{8}{70} = \frac{20 + 15 + 8}{70} = \frac{43}{70}$.

* Если знаменатели дробей одинаковые, то достаточно сложить их числители и полученный результат взять числителем, а знаменатель оставить тот же.

В общем виде правило сложения двух дробей можно определить формулой *

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \tag{1.12}$$

где $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — слагаемые, а $\frac{ad+bc}{bd}$ — сумма.

**Вычитание.** Определение вычитания для дробных чисел такое же, как и для натуральных. Сумму дробей называют уменьшаемым, известное слагаемое вычитаемым, а неизвестное — разностью. Найти разность двух дробных чисел значит найти число, которое в сумме с вычитаемым дает уменьшаемое, т. е.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{x}{y}, \text{ если } \frac{x}{y}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.$$

По правилу сложения получаем

$$\frac{xd+yc}{yd}=\frac{a}{b}.$$

Из условия равенства дробных чисел следует, что $(xd+yc)\,b=yda$ или $bdx+bcy=ady$, откуда $bdx=ady-bcy$ или $bdx=(ad-bc)\,y$.

Находим окончательно

$$\frac{x}{y}=\frac{ad-bc}{bd},$$

т. е.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd} \text{ при } ad\geqslant bc, \text{ или } \frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{d}. \tag{1.13}$$

Чтобы вычесть из дроби дробь, достаточно привести их к наименьшему общему знаменателю, а затем из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого и результат взять числителем, а найденный общий знаменатель — знаменателем.

Например, $\frac{5}{18}-\frac{2}{9}=\frac{5}{18}-\frac{4}{18}=\frac{5-4}{18}=\frac{1}{18}$.

Действие вычитания выполнимо в множестве неотрицательных чисел, если уменьшаемое не меньше вычитаемого, а результат вычитания (разность) однозначен.

Следует отметить, что, как и в случае сложения дробей, формула для определения разности по правилу вычитания двух дробей отли-

---

* По сформулированному правилу сложения дробей формула для сложения двух дробей должна быть записана так:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ap+cl}{m},$$

где $m$ — НОК знаменателей $b$ и $d$, а $p=\frac{m}{b}$ и $l=\frac{m}{d}$. Но приведенная формула дает тот же результат:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a\frac{m}{l}+c\frac{m}{p}}{\frac{m}{p}\;\frac{m}{l}}=\frac{ap+cl}{m}$$

Если $b$ и $d$ — взаимно простые числа, то $m=bd$, и обе формулы совпадают.

чается от приведенной выше. Читателю рекомендуется убедиться самостоятельно, что результат в обоих случаях одинаков.

**Умножение.** Чтобы перемножить две дроби, достаточно перемножить числители этих дробей и их произведение взять числителем, а затем перемножить знаменатели и их произведение взять знаменателем.

Например, $\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{11} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 11} = \frac{24}{55}$.

Действие умножения в множестве неотрицательных чисел всегда возможно, а произведение однозначно.

Правило умножения двух дробей можно записать в виде формулы

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \tag{1.14}$$

**Деление.** Определение деления для дробных чисел такое же, как и для натуральных. Произведение дробей называется делимым, известный сомножитель — делителем, а неизвестный сомножитель — частным.

Согласно определению действия деления

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{x}{y}, \text{ если } \frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Перемножив дробные числа левой части последнего равенства, получим

$$\frac{xc}{yd} = \frac{a}{b}$$

и, по условию равенства дробных чисел, найдем

$$xcb = yad$$

или

$$\frac{x}{y} = \frac{ad}{bc}.$$

Поэтому деление дробных чисел производится по правилу, выраженному формулой

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \tag{1.15}$$

т. е. чтобы разделить дробь на дробь, достаточно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй и полученное произведение взять числителем, а знаменатель первой дроби умножить на числитель второй и полученное произведение взять знаменателем.

Например, $\frac{3}{5} : \frac{7}{9} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 7} = \frac{27}{35}$.

Действие деления положительных дробных чисел всегда выполнимо, а частное однозначно.

Читателю предлагается, пользуясь правилами действия над дробными числами и законами действий над целыми положительными числами, доказать, что все эти законы имеют место и для дробных чисел.

## § 7. Рациональные числа

Множество положительных дробных чисел замкнуто относительно сложения, умножения и деления, но не замкнуто относительно вычитания.

Чтобы построить числовое множество, замкнутое относительно вычитания, множество всех положительных дробных чисел и числа 0 расширяют введением отрицательных чисел.

Рассмотрим луч $Ox$ (рис. 1), на котором точки 0, 1, 2, 3, 4, ... соответствуют числам расширенного натурального ряда. Дробные

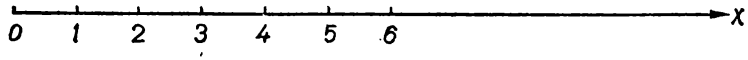



Рис. 1.

числа $\frac{a}{b}$ наносим, как показано на рис. 2. К лучу $Ox$ от точки $O$ под острым углом проводим луч $OM$, на котором от точки $O$ откладываем равные по длине отрезки, концы их нумеруем по порядку: 1, 2, 3, ... Конец отрезка с номером $b$ луча $OM$ соединяем с точкой 1 луча $Ox$, затем из конца отрезка с номером $a$ на луче $OM$ проводим прямую, параллельную отрезку $\overline{b1}$, до пересечения с лучом $Ox$. Точка пересе-

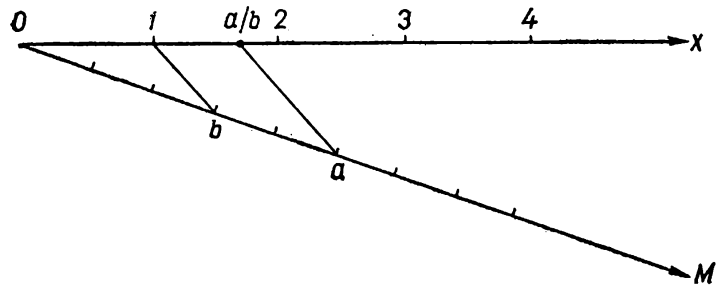



Рис. 2.

чения этой прямой с лучом $Ox$ соответствует числу $\frac{a}{b}$. Таким образом, каждому дробному числу $\frac{a}{b}$ на луче $Ox$ можно поставить в соответствие определенную точку.

Продолжим теперь луч $Ox$ в противоположную от точки $O$ сторону и на продолжении каждому числу $\frac{a}{b}$ поставим в соответствие противоположное число $-\frac{a}{b}$, которое будем называть отрицательным и изображать точкой, симметричной относительно точки $O$ (рис. 3).

Прямая, на которой указано направление, называется осью.

Числовой или координатной осью называется ось, на которой задано точку $O$ — начало оси и единичный отрезок [0; 1] для измерения длин (рис. 3).

Числа, изображающиеся точками числовой оси, лежащими вправо от точки $O$, — положительные, а числа, изображающиеся точками, лежащими влево от точки $O$, — отрицательные. Число 0, изображающееся точкой $O$, не принадлежит ни к положительным, ни к отрицательным.

Числа $-1, -2, -3, -4, \ldots$ называются целыми отрицательными числами.

Множество всех целых отрицательных чисел будем обозначать буквой $Z_-$:

$$Z_- = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}.$$

Целые положительные (натуральные) числа, число нуль и целые отрицательные числа вместе $\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ называются целыми числами. Множество всех целых чисел будем обозначать буквой $Z$:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

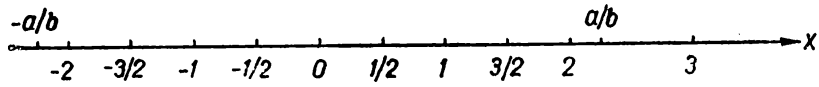



Рис. 3.

Множество целых чисел замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, а результаты этих действий однозначны.

Все целые и дробные положительные числа, нуль и все целые и дробные отрицательные числа называются рациональными. Таким образом, рациональное число — это число, которое можно представить в виде $\frac{a}{b}$, где $a$ — любое целое число, $b$ — натуральное число.

Например: $\frac{3}{5}$; $5 = \frac{5}{1}$; $-\frac{6}{7} = \frac{-6}{7}$; $-5\frac{1}{2} = \frac{-11}{2}$.

Множество всех рациональных чисел обозначают буквой $Q$.

**Абсолютная величина (модуль) рационального числа.** Абсолютная величина рационального числа $a$ обозначается $|a|$.

Абсолютная величина положительного числа равна самому числу; абсолютная величина нуля равна нулю; абсолютная величина отрицательного числа равна противоположному ему положительному числу, т. е.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Из определения (1.16) следует, что

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0, \end{cases}$$

или

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0. \\ -a, & \text{если } a \leqslant 0. \end{cases}$$

Геометрически абсолютная величина числа равна расстоянию от начала числовой оси (точки, изображающей число нуль) до точки, изображающей данное число.

Сравнение рациональных чисел производится по следующим правилам.

1. Всякое отрицательное число меньше всякого положительного числа.

2. Всякое положительное число больше нуля, а всякое отрицательное число меньше нуля (напомним, что число нуль не является ни положительным, ни отрицательным числом). Наоборот, если число положительное, то оно больше нуля; если число отрицательное, то оно меньше нуля.

3. Из двух отрицательных чисел больше то, у которого абсолютная величина меньше. Положительные рациональные числа сравниваются по правилам сравнения целых положительных (натуральных) и дробных положительных чисел.

4. Для любых двух рациональных чисел $a$ и $b$ всегда имеет место только один из трех следующих случаев: $a > b$, $a = b$ или $a < b$.

5. Для любых рациональных чисел, если $a > b$, то $b < a$; если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Для всех рациональных чисел имеет место только разностное сравнение, т. е. на сколько одно число больше другого; кратное сравнение для них места не имеет, т. е. нельзя сказать, во сколько раз $3\frac{1}{2}$ больше $-\frac{1}{2}$ или во сколько раз $-5$ больше $-10$. Кратное сравнение имеет смысл только для положительных чисел.

## § 8. Действия над рациональными числами

**Сложение.** Чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные величины и результат взять с тем же знаком;

чтобы сложить два числа с разными знаками, надо найти разность их абсолютных величин и результат взять со знаком, который стоит при числе с большей абсолютной величиной;

сумма двух противоположных чисел равна нулю;

сумма двух чисел, из которых одно равно нулю, равна второму числу.

Например, $(+5)+(+3)=+8$; $\left(-5\frac{1}{3}\right)+\left(-3\frac{2}{3}\right)=-9$; $(-8)+(+3)=-5$; $\left(-3\frac{1}{7}\right)+\left(+3\frac{1}{7}\right)=0$; $0+(-5)=-5$; $(-4)+0=-4$.

**Вычитание** для рациональных чисел определяется так же, как и для натуральных. Чтобы найти разность двух рациональных чисел, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому; если вычитаемое равно нулю, то разность равна уменьшаемому.

Например, $(+5)-(-3)=(+5)+(+3)=+8$; $(-4)-0=-4$.

В общем виде $a - b = a + (-b)$; $a - 0 = a$. Из правила вычитания следует, что действие вычитания рациональных чисел можно свести к их сложению.

Алгебраическое выражение (понятие алгебраического выражения будет дано в § 1, гл. 2), в котором над числами последовательно выполняются только действия сложения и вычитания, называется алгебраической суммой.

Множество рациональных чисел замкнуто относительно алгебраического сложения, а сумма однозначна.

**Умножение.** Произведением двух отличных от нуля чисел называется число, равное произведению абсолютных величин этих чисел, взятое со знаком плюс, если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, и со знаком минус, если разные; если один или оба сомножителя равны нулю, то их произведение равно нулю.

Например, $(+3) \cdot (+6) = +18$; $(-5) \cdot (-2) = +10$; $(-1)\ (+3) = -3$; $(+6) \cdot (-2) = -12$; $0 \cdot (+3) = 0$; $(-2)\ 0 = 0$; $0 \cdot 0 = 0$.

Из сказанного следует, что произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Чтобы найти произведение нескольких отличных от нуля рациональных чисел, надо перемножить их абсолютные величины и результат взять со знаком плюс, если число отрицательных сомножителей четно, и со знаком минус, если число отрицательных сомножителей нечетно.

Множество рациональных чисел замкнуто относительно умножения, а результат умножения (произведение) однозначен.

**Деление** для рациональных чисел определяется так же, как для натуральных. Чтобы разделить рациональное число $a$ на рациональное число $b$ ($b \neq 0$), достаточно разделить абсолютную величину числа $a$ на абсолютную величину числа $b$ и результат взять со знаком плюс, если $a$ и $b$ имеют одинаковые знаки, и со знаком минус, если $a$ и $b$ имеют разные знаки;

если делимое равно нулю, то и частное равно нулю.

Например, $(+15) : (+3) = +5$; $(-12) : (+6) = -2$; $\left(-3\frac{4}{5}\right) : \left(+1\frac{1}{2}\right) = -\left(\left|-3\frac{4}{5}\right| : \left|+1\frac{1}{2}\right|\right) = -\frac{38}{15} = -2\frac{8}{15}$; $0 : \left(-3\frac{1}{8}\right) = 0$.

Для деления рациональных чисел можно пользоваться умножением на обратное число. Число $\frac{1}{a}$ называется обратным числу $a$; обратным рациональному числу $\frac{a}{b}$ есть число $\frac{b}{a}$.

Чтобы разделить число $a$ на число $b$, достаточно умножить это число на число, обратное числу $b$, т. е. $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$.

Например, $(+15) : \left(-\frac{3}{2}\right) = (+15) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -10$.

Множество рациональных чисел замкнуто относительно деления (делитель отличен от нуля), а результат деления (частное) однозначен.

**Основные законы действий над рациональными числами** те же, что и для действий над натуральными числами. Это законы, выражаемые тождествами

$$a+b=b+a;$$

$$a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c;$$

$$a\cdot b=b\cdot a;$$

$$a\cdot b\cdot c=a(bc)=(ab)c;$$

$$(a+b)c=a\cdot c+b\cdot c.$$

Читателю рекомендуется доказать эти тождества.

Таким образом, множество рациональных чисел замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления, за исключением деления на нуль, а результаты всех этих действий однозначны.

Отметим еще одно важное свойство рациональных чисел: между любыми двумя рациональными числами содержится бесчисленное множество рациональных чисел (говорят, что множество рациональных чисел всюду плотно). Действительно, пусть $a$ и $b$ — рациональные числа, причем $a<b$. Тогда $a<\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ и $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}<b$, т. е. $a<\frac{a+b}{2}<b$. Следовательно, среднее арифметическое двух рациональных чисел является рациональным числом, заключенным между данными рациональными числами. Если обозначить $\frac{a+b}{2}=c$, то $a<c<b$. Между числами $a$ и $c$, а также $c$ и $b$ находятся рациональные числа $\frac{a+c}{2}$ и $\frac{c+b}{2}$. Продолжать аналогичные рассуждения можно до бесконечности. Этот частный способ построения рациональных чисел, заключенных между двумя данными рациональными числами, доказывает верность указанного свойства.

## § 9. Десятичные дроби

*Десятичными дробями* называются такие обыкновенные дроби, у которых знаменатель изображается единицей с последующими нулями (натуральная степень 10). Например, $\frac{3}{10}$; $\frac{32}{100}$; $\frac{1234}{1000}$. Записывают их так:

$$\frac{3}{10}=0{,}3;\quad \frac{32}{100}=0{,}32;\quad \frac{1234}{1000}=1{,}234.$$

Запятая, отделяющая целую часть числа от дробной, называется знаком дробности. Цифры, стоящие после знака дробности (запятой), называются десятичными знаками.

Десятичную дробь, меньшую единицы, называют правильной, а большую или равную единице — неправильной.

Из основного свойства обыкновенной дроби следует, что если в правой ее части дописать несколько нулей, то величина дроби от этого не изменится.

Например, $0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300 = 0{,}30000$, так как $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000} = \frac{30000}{100000}$.

Всякое натуральное число можно рассматривать как десятичную дробь, у которой дробная часть состоит из нулей.

Например, $15 = 15{,}0 = 15{,}00 = 15{,}0000$.

Действия над десятичными дробями выполняются аналогично действиям над целыми числами.

**Сложение.** Чтобы сложить несколько десятичных дробей, достаточно привести их к одинаковому количеству десятичных знаков (к общему знаменателю) и сложить их как целые числа, а в результате отделить запятой то же число десятичных знаков.

**Вычитание.** Чтобы вычесть из десятичной дроби десятичную дробь, достаточно привести их к одинаковому количеству десятичных знаков и вычесть как целые числа, а в результате отделить запятой столько же десятичных знаков.

**Умножение.** Чтобы перемножить две десятичные дроби, достаточно перемножить их как целые числа (не учитывая запятую дробности), а в результате отделить запятой столько десятичных знаков, сколько их в обоих сомножителях вместе.

**Деление.** Чтобы разделить число на десятичную дробь, достаточно перенести знак дробности (запятую) в делимом и делителе на число десятичных знаков в делителе (сделать делитель целым числом), а затем разделить как целые числа, причем запятую в частном поставить при отнесении к остатку десятых долей делимого.

Следует учесть, что деление двух натуральных чисел (или десятичных дробей) в десятичной системе счисления не всегда выполнимо в конечном виде, т. е. частное не всегда можно представить конечной десятичной дробью.

Обыкновенная несократимая дробь может быть представлена в виде конечной десятичной дроби тогда и только тогда, когда в разложении ее знаменателя на простые множители входят только множители 2 и 5 (или только множители 2, или только множители 5).

Пусть дана несократимая дробь $\frac{a}{b}$, в которой $b = 2^n \cdot 5^k$, где $n$ и $k$ — целые неотрицательные числа; пусть, для конкретности, $n > k$. Тогда

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^n 5^k} = \frac{a \cdot 5^{n-k}}{2^n \cdot 5^n} = \frac{5^{n-k}a}{10^n},$$

т. е. дробь $\frac{a}{b}$ обращается в конечную десятичную дробь, имеющую $n$ десятичных знаков.

Наоборот, всякую десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{a}{10^n}$, где $n$ — натуральное число; следовательно, в разложении знаменателя этой дроби на простые множители не может быть множителей, отличных от 2 и 5 (если дробь $\frac{a}{10^n}$ сократимая, то

и после сокращения в знаменателе останутся множители только 2 или 5).

Несократимая обыкновенная дробь, содержащая простые множители, отличные от 2 и 5, не может быть представлена в виде конечной десятичной дроби, так как деление ее числителя на знаменатель бесконечно. Например, пусть требуется дробь $\frac{2}{7}$ обратить в десятичную:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 7 \\ \hline 20 & 0{,}28571428\ldots \\ \hline 60 & \\ \hline 40 & \\ \hline 50 & \\ \hline 10 & \\ \hline 30 & \\ \hline 20 & \\ \hline 60 & \\ \hline 4\ldots & \end{array},$$

т. е. $\frac{2}{7} = 0{,}285714285714\ldots$ Как видно, сколько бы ни продолжалось деление, в частном группа цифр 285714 будет периодически повторяться.

*Периодической десятичной дробью* называется такая десятичная дробь, у которой, начиная с некоторого десятичного знака, бесконечно повторяется в известном порядке одна и та же группа цифр, называемая периодом. Например: 2,321212121... (период 21); 0,361361361... (период 361). Сокращенно бесконечные периодические десятичные дроби записывают 2,3212121...= 2,3(21); 0,361361361...= 0,(361).

Если в периодической десятичной дроби период начинается сразу после запятой, то такая дробь называется чистой периодической дробью; в противном случае дробь называется смешанной периодической дробью, причем число, стоящее после знака дробности (запятой) до первого периода, называется допериодической частью дроби. Например: 2,(35)— чистая периодическая дробь; 13,25(6) — смешанная периодическая дробь, а 25 — ее допериодическая часть.

Если обыкновенная несократимая дробь обращается в бесконечную десятичную дробь, то это обязательно периодическая дробь. Причем полученная периодическая дробь будет чистой, если в разложении знаменателя на простые множители нет множителей 2 и 5, и смешанной, если они есть.

Всякую бесконечную периодическую десятичную дробь можно обратить в обыкновенную (правила обращения и их доказательства приведены в гл. 8).

**Представление рациональных чисел десятичными дробями.** Всякое рациональное число может быть представлено либо конечной десятичной дробью, либо бесконечной периодической десятичной дробью.

Всякую конечную десятичную дробь (кроме нуля) можно представить в виде бесконечной периодической дроби двумя способами.

Например: 2,5 = 2,5000... и 2,5 = 2,4999...

Действительно, обращая 2,4999... в обыкновенную дробь, получим

$$2{,}4(9) = 2\frac{49-4}{90} = 2\frac{1}{2} = 2{,}5.$$

Таким образом, всякое рациональное число может быть представлено бесконечной периодической десятичной дробью. Справедливо и обратное: всякая бесконечная периодическая десятичная дробь представляет собой некоторое рациональное число (так как она может быть обращена в обыкновенную дробь).

## § 10. Проценты

**Понятие процента.** *Процентом числа (величины)* называется сотая часть данного числа (величины).

Слово *процент* происходит от латинского pro cento — «с сотни».

Проценты обозначаются символом «%».

Всякое действительное число можно выразить в процентах, умножив его на 100. Например, $0{,}35 = 35\%$, $2 = 200\%$, $21{,}05 = 2105\%$, $\frac{4}{5} = 80\%$, $0{,}00025 = 0{,}025\%$.

Наоборот, проценты можно представить в виде чисел. Например: $35\% = 0{,}35$, $143\% = 1{,}43$, $0{,}381\% = 0{,}00381$.

Проценты очень удобно сравнивать между собой. В связи с этим они широко используются в науке, народном хозяйстве, финансовых расчетах, статистических обработках числовых данных и т. д.

Если сотая часть числа (процент) оказывается очень большой единицей для сравнения величин, то употребляют понятие *промилле*.

*Промилле числа (величины)* называется тысячная часть данного числа (величины).

Слово *промилле* происходит от латинского pro mille — «с тысячи».

Промилле обозначаются символом «‰».

Например, $0{,}035 = 35‰$, $\frac{1}{4} = 250‰$, $1{,}35 = 1350‰$

(и, наоборот, $62‰ = 0{,}062$, $4028‰ = 4{,}028$, $560‰ = 0{,}560$).

В промилле выражают концентрации растворов, составов сплавов дорогостоящих металлов (золота, серебра, платины и др). Причем для сплавов дорогостоящих металлов употребляется вместо «промилле» слово «проба». Например, золотом 560-й пробы называют сплав, который содержит $560‰$ чистого золота.

**Основные задачи на проценты.** Обычно рассматривают три основные задачи на проценты.

1. Нахождение процентного отношения двух чисел.

*Правило.* Чтобы найти процентное отношение числа $b$ к числу $a$, достаточно найти их отношение и умножить последнее на 100, т. е.

$$p\% = \frac{b}{a} \cdot 100\%, \tag{1.17}$$

где $p$ — искомое процентное отношение.

Пример. Найти, сколько процентов составляет число 28 от числа 40.

Решение. По формуле (1.17) находим

$$p\% = \frac{28}{40} \cdot 100\% = 70\%.$$

Ответ. 70%.

Задача. Совхоз по плану должен посеять 1200 га пшеницы. За первые три дня было посеяно 540 га. Сколько процентов плана сева пшеницы выполнил совхоз за первых три дня?

Решение. Найдем процентное отношение чисел 540 и 1200 по формуле (1.17):

$$p\% = \frac{540}{1200} \cdot 100\% = 45\%.$$

Ответ. 45%.

2. Нахождение процентов данного числа.

*Правило.* Чтобы найти $p\%$ данного числа $a$, достаточно это число разделить на 100 и умножить на число процентов, т. е.

$$b = \frac{ap}{100}, \tag{1.18}$$

где $b$ — число, равное $p\%$ числа $a$.

Пример. Найти 65% числа 600.

Решение. По формуле (1.18) находим

$$b = \frac{600 \cdot 65}{100} = 390.$$

Ответ. 390.

Задача. В колхозном саду 1600 фруктовых деревьев, из них 60% — яблони. Сколько яблонь в колхозном саду?

Решение. Чтобы узнать, сколько яблонь в колхозном саду, достаточно найти 60% числа 1600.

По формуле (1.18) имеем

$$b = \frac{1600 \cdot 60}{100} = 960.$$

Ответ. 960 яблонь.

3. Нахождение числа по данному количеству его процентов.

*Правило.* Чтобы найти неизвестное число $a$, $p\%$ которого составляют данное число $b$, достаточно число $b$ умножить на 100 и полученное произведение разделить на $p$, т. е.

$$a = \frac{b \cdot 100}{p}. \tag{1.19}$$

Пример. Найти число, 5% которого равно 40.

Решение. По формуле (1.19) находим

$$a = \frac{40 \cdot 100}{5} = 800.$$

Ответ. 800.

Задача 1. Завод за первый квартал года выпустил продукции на 1 740 000 рублей, что составляет 29% годового плана. На какую сумму должен выпустить продукции завод согласно плану за год?

Решение. Чтобы решить задачу, достаточно найти число, 29% которого составляют 1 740 000. По формуле (1.19) находим

$$a = \frac{1740000 \cdot 100}{29} = 6000000.$$

Ответ. 6 000 000 р.

Сравнивая формулы (1.17), (1.18) и (1.19), замечаем, что это различные виды одной и той же зависимости:

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{100}, \tag{1.20}$$

где $b$ составляет $p\%$ числа $a$.

Заметим, что основные задачи на проценты — это задачи того же типа, что и задачи на нахождение отношения двух чисел, нахождение дроби данного числа и числа по величине его дроби.

Задача 2. Вкладчик положил в сберегательную кассу 300 р. Сберегательная касса начисляет на вложенную сумму 2% годовых. Какая сумма денег будет у вкладчика через год?

Решение. Чтобы узнать сумму вклада через год, достаточно найти 102% числа 300:

$$\frac{300 \cdot 102}{100} = 306$$

Ответ. 306 р.

**Сложные проценты.** На практике часто встречаются задачи, в которых приходится начислять проценты на величины, полученные в результате начисления процентов. К таким относятся задачи начисления годовых процентов на вклады, определение роста населения, прироста величины через определенные промежутки времени и т. д. Проценты, начисленные на величины, полученные в результате начисления процентов, называются *сложными*.

Рассмотрим задачу о начислении годовых процентов на вклады в сберегательных кассах.

Пусть сумма в $a$ р. положена на сбережение в сберкассу при условии начисления на нее $p\%$ годовых.

Тогда по истечении первого года сбережения начисленный процент на эту сумму составит

$$\frac{a \cdot p}{100}$$

и к началу второго года сумма вклада (обозначим ее через $a_1$) будет составлять

$$a + \frac{ap}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

По истечении второго года сбережения на сумму $a_1$ будет начислено $p\%$ годовых, что составит

$$\frac{a_1 \cdot p}{100},$$

и к началу третьего года сумма сбережения (обозначим ее $a_2$) составит

$$a_1 + \frac{a_1 p}{100} = a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

или (после подстановки значения $a_1$)

$$a_2 = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Аналогично по истечении третьего года сумма сбережений составит

$$a_3 = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \text{ и т. д.}$$

Естественно предположить, что первоначальная сумма в $a$ р, положенная в сберкассу по $p\%$ годовых, по истечении $n$ лет превратится в сумму $a_n$, которая определяется по формуле

$$a_n = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \qquad (1.21)$$

Докажем эту формулу методом математической индукции (см. гл. 7, § 4).

а) При $n = 1$ из формулы (1.21) получаем

$$a_1 = a\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

что, как было показано, определяет сумму вклада по истечении первого года, т. е. формула верна.

б) Допустим, что формула верна при $n = k$, т. е.

$$a_k = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^k,$$

и докажем, что она при этом допущении будет верной при $n = k+1$.

Действительно, пусть к началу $k+1$-го года сумма вклада составляла $a_k$ р.; тогда по истечении $k+1$-го года при $p\%$ годовых эта сумма увеличится на

$$\frac{a_k p}{100} \text{ (р.)}$$

и составит

$$a_{k+1} = a_k + \frac{a_k p}{100} = a_k\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

или, учитывая допущение,

$$a_{k+1} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{k+1}, \text{ т. е.}$$

$$a_{k+1} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{k+1}.$$

Следовательно, на основании принципа индукции формула (1.21) верна при всех натуральных значениях $n$.

Проценты, начисляемые по формуле (1.21), называются *сложными*, а формула (1.21) — *формулой сложных процентов*.

Задача 1. На сбережение в сберкассу внесено 1000 р. по 3% годовых. Найти сумму вклада по истечении 10 лет.

Решение. По формуле (1.21) находим

$$a_{10} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{10} \approx 1343{,}92.$$

Ответ. 1343 р. 92 коп.

Задача 2. За три года население города увеличилось с 200 000 до 231 525 человек. Найти средний годовой процент прироста населения.

Решение. Применяя формулу (1.21), получаем

$$231\,525 = 200\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3,$$

откуда

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{231525}{200000}} - 1\right) = 5.$$

Ответ. Ежегодный прирост населения города составляет 5%.

## § 11. Действительные числа

Для решения различных задач (измерения величин, решения уравнений и др.) множества рациональных чисел недостаточно. Познакомимся с числами, расширяющими возможности решения таких задач.

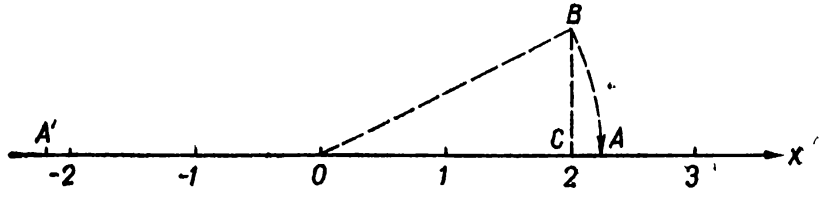



Рис. 4.

Остановимся на понятии *иррациональное число*. Проведем к числовой оси перпендикуляр $CB$ в точке $C$, соответствующей числу 2 (рис. 4); длину отрезка $BC$ возьмем равной 1 ($BC = 1$) и соединим отрезком прямой точку $B$ с началом оси $O$. Получим прямоугольный треугольник $OBC$ с катетами $OC = 2$ и $BC = 1$. Затем раствором циркуля, равным $OB$, из точки $O$ как из центра опишем дугу окружности до пересечения с осью в точке $A$, лежащей справа от начала оси. По теореме Пифагора

$$OB^2 = OC^2 + BC^2, \text{ или } OA^2 = OC^2 + BC^2 = 2^2 + 1^2 = 5.$$

Докажем от противного, что среди положительных рациональных чисел не существует числа, квадрат которого равен 5. Предположим, что существует несократимая дробь (рациональное число), квадрат

которой равен 5, т. е. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$, или $a^2 = 5b^2$ ($a$ и $b$ — натуральные взаимно простые числа). Из последнего равенства следует, что $a^2$ делится на 5, так как $5b^2$ делится на 5. Представив $a^2$ в виде произведения $a \cdot a$, убеждаемся, что число $a$ делится на 5, т. е. $a = 5c$, где $c$ — натуральное число. Тогда $(5c)^2 = 5b^2$ и $5c^2 = b^2$, откуда вытекает, что число $b$ тоже делится на 5. Это означает, что дробь $\frac{a}{b}$, числитель и знаменатель которой делятся на 5, сократима, что противоречит условию. Следовательно, доказываемое утверждение верно.

Пусть $\frac{a}{b}$ — несократимая отрицательная дробь, квадрат которой равен 5, т. е. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$. Тогда $-\frac{a}{b}$ — положительное рациональное число. Возведем его в квадрат: $\left(-\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$. Но по доказанному выше не существует положительного рационального числа, квадрат которого равен 5. Следовательно, и это предположение неверно, т. е. и среди отрицательных рациональных чисел не существует числа, квадрат которого равен 5.

Таким образом, длину отрезка $OA$ числовой оси при выбранной масштабной единице нельзя выразить с помощью рациональных чисел.

Чтобы можно было выразить числом длину рассматриваемого отрезка $OA$ с помощью выбранной масштабной единицы (единицы измерения), надо ввести новые, отличные от рациональных, числа, которые нельзя представить в виде обыкновенной дроби.

Обозначим число, квадрат которого равен 5, символом $\alpha$, т. е. $\alpha^2 = 5$ ($\alpha > 0$). Будем находить рациональные точки оси, между которыми лежит точка $A$. Найдем сначала два последовательных натуральных числа, квадраты которых заключают между собой число 5. Это числа 2 и 3, так как $2^2 < 5 < 3^2$; тогда

$$2 < \alpha < 3.$$

Разделим отрезок [2; 3] числовой оси на десять равных частей точками 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 2,6; 2,7; 2,8; 2,9. Возведя эти числа в квадрат и сравнивая с числом 5, найдем, что $2{,}2^2 = 4{,}84 < 5 < 5{,}29 = 2{,}3^2$, т. е. $2{,}2 < \alpha < 2{,}3$. Затем отрезок [2,2; 2,3] числовой оси разделим на десять равных частей точками 2,21; 2,22; 2,23; 2,24; . . . ; 2,29. Возводя их в квадрат и сравнивая с числом 5, найдем, что

$$2{,}23^2 = 4{,}9729 < 5 < 5{,}0176 = 2{,}24^2.$$

т. е. $2{,}23 < \alpha < 2{,}24$.

Продолжая по аналогии этот процесс, найдем последовательно

$$\begin{gathered} 2{,}236 < \alpha < 2{,}237 \\ 2{,}2360 < \alpha < 2{,}2361 \\ 2{,}23606 < \alpha < 2{,}23607 \\ 2{,}236067 < \alpha < 2{,}236068 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{gathered}$$

Так как $\alpha$ не может равняться ни одному из чисел, которые появляются в точках деления последовательных отрезков числовой оси на

десять равных частей (иначе $\alpha$ было бы рациональным числом, квадрат которого равен 5), этот процесс будет продолжаться бесконечно. Число $\alpha$ определится как бесконечная десятичная дробь $\alpha = 2{,}236067\ldots$ Эта дробь не может быть периодической, так как тогда ее можно было бы обратить в обыкновенную, т. е. $\alpha$ было бы рациональным числом.

Таким образом, длина отрезка $OA$ числовой оси, для измерения которой было введено число $\alpha$, выражается бесконечной непериодической десятичной дробью.

Точке $A$, изображающей число $\alpha$, на числовой оси соответствует симметричная относительно точки $O$ точка $A'$. Число, соответствующее точке $A'$ числовой оси, называется противоположным числу $\alpha$ и обозначается через $-\alpha$. Числа $\alpha$ и $-\alpha$ называются соответственно положительным и отрицательным иррациональными числами.

Числа, которые могут быть представлены в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, называются *иррациональными*.

Например, число 0,31311311131111 ..., в десятичной записи которого после первой тройки стоит одна единица, после второй тройки — две единицы и т. д., есть иррациональное.

Все рациональные и иррациональные числа вместе называются *действительными* или *вещественными* числами.

Множество всех действительных (вещественных) чисел обозначается буквой $R$.

Множество всех действительных положительных чисел обозначается буквой $R_+$.

Множество всех неотрицательных действительных чисел обозначается буквой $R_0$.

Если на числовой оси взять произвольную точку, то этой точке будет соответствовать либо рациональное, либо иррациональное число, т. е. каждой точке числовой оси соответствует одно единственное действительное число. Наоборот, каждому действительному числу соответствует одна единственная точка числовой оси. Это означает, что между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек числовой оси существует взаимно однозначное соответствие.

**Сравнение действительных чисел.** Из двух положительных действительных чисел больше то, в десятичном представлении которого целая часть больше; если целые части равны, большим считается то число, у которого первый из неравных десятичных знаков больше.

Из двух отрицательных действительных чисел большим считается то, абсолютная величина которого меньше (см. § 12 данной главы).

Например: $1{,}434241\ldots > 1{,}434240\ldots$, $-8{,}32423\ldots > -8{,}32424\ldots$

Два действительных числа считаются равными, если их десятичные представления одинаковы.

**Десятичные приближения действительных чисел.** Представление любого действительного числа бесконечной десятичной дробью можно записать в виде

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots, \text{ если } a > 0, \qquad (1.22)$$

$$a = -\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots\right), \text{ если } a < 0, \qquad (1.23)$$

где $a_0$ — целое число, а $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры десятичной системы счисления).

Например: $5{,}231045\ldots = 5 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{4}{10^5} + \frac{5}{10^6} + \ldots$; $0{,}3 = 0{,}299999\ldots = 0 + \frac{2}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \ldots$; $-2{,}5709\ldots = -\left(2 + \frac{5}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \ldots\right)$.

Конечные десятичные дроби

$$\underline{a}_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \text{ и}$$

$$\overline{a}_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n} \text{ (при } a > 0)$$

или

$$\underline{a}_n = -\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n}\right) \text{ и}$$

$$\overline{a}_n = -\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) \text{ (при } a < 0),$$

между которыми заключено число $a$, называются его десятичными приближениями соответственно с недостатком ($\underline{a}_n$) и с избытком ($\overline{a}_n$) с точностью до $\frac{1}{10^n}$, а число $n$ — порядком приближения, причем

$$\underline{a}_n < a \leqslant \overline{a}_n \text{ при } a > 0 \text{ и } \underline{a}_n \leqslant a < \overline{a}_n \text{ при } a < 0 \qquad (1.24)$$

(равенство достигается только в случае, когда $a$ — рациональное число).

Например: 1. $a = 1{,}23425\ldots$; $\underline{a}_3 = 1{,}234$, $\overline{a}_3 = 1{,}235$. 2. $a = -7{,}32897\ldots$; $\underline{a}_4 = -7{,}3290$, $\overline{a}_4 = -7{,}3289$. 3. $a = 0{,}2$; $\underline{a}_2 = 0{,}19$, $\overline{a}_2 = 0{,}20$.

Для любого действительного числа $a$ всегда выполняется условие

$$\underline{a}_n \leqslant a \leqslant \overline{a}_n. \qquad (1.25)$$

Десятичное приближение данного числа $a$ с недостатком будем называть его нижней границей (НГ), а десятичное приближение с избытком — верхней границей (ВГ): НГ$a = \underline{a}_n$, ВГ$a = \overline{a}_n$.

Основные свойства десятичных приближений действительного числа:

1. Любая нижняя граница данного действительного числа $a$ меньше любой верхней границы этого числа, т. е. $\underline{a}_n < \overline{a}_m$.

2. Любая верхняя граница данного действительного числа больше любой его нижней границы, т. е. $\overline{a}_n > \underline{a}_m$.

3. С увеличением порядка приближений данного действительного числа разность между верхней и нижней границами его десятичных приближений неограниченно уменьшается (стремится к нулю).

## § 12. Действия над действительными числами

Если два действительных числа рациональны, то действия над ними выполняются по правилам, сформулированным в § 8.

Рассмотрим правила действий над действительными числами, одно из которых или оба — иррациональные.

**Сложение**. Суммой двух действительных чисел $a$ и $b$ называется такое действительное число $c$, которое не меньше суммы любых десятичных приближений этих чисел с недостатком и не больше суммы любых десятичных приближений этих чисел с избытком.

В частности, если десятичные приближения чисел $a$ и $b$ одного порядка ($\underline{a}_n \leqslant a \leqslant \bar{a}_n$ и $\underline{b}_n \leqslant b \leqslant \bar{b}_n$), то

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n \leqslant a + b \leqslant \bar{a}_n + \bar{b}_n, \tag{1.26}$$

т. е. если $\underline{a}_n + \underline{b}_n \leqslant c \leqslant \bar{a}_n + \bar{b}_n$, где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, то $a + b = c$.

Например, пусть $a = 2{,}3527132\ldots$, $b = 1{,}3245697\ldots$ и требуется найти сумму $a + b$.

Последовательно находим

$$\underline{a}_0 + \underline{b}_0 = 2 + 1 = 3; \qquad \bar{a}_0 + \bar{b}_0 = 3 + 2 = 5;$$

$$\underline{a}_1 + \underline{b}_1 = 2{,}3 + 1{,}3 = 3{,}6; \qquad \bar{a}_1 + \bar{b}_1 = 2{,}4 + 1{,}4 = 3{,}8;$$

$$\underline{a}_2 + \underline{b}_2 = 2{,}35 + 1{,}32 = 3{,}67; \qquad \bar{a}_2 + \bar{b}_2 = 2{,}36 + 1{,}33 = 3{,}69;$$

$$\underline{a}_3 + \underline{b}_3 = 2{,}352 + 1{,}324 = 3{,}676; \qquad \bar{a}_3 + \bar{b}_3 = 2{,}353 + 1{,}325 = 3{,}678;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Тогда сумма $c = a + b$ есть число, удовлетворяющее системе неравенств

$$3 < c \leqslant 5$$
$$3{,}6 < c \leqslant 3{,}8$$
$$3{,}67 < c \leqslant 3{,}69$$
$$3{,}676 < c \leqslant 3{,}678$$

. . . . . . . .

Можно доказать, что существует единственное число $c$, удовлетворяющее последней системе неравенств.

Данное определение суммы двух действительных чисел не противоречит приведенному ранее определению суммы двух рациональных чисел.

Множество действительных чисел замкнуто относительно сложения, а результат действия (сумма) однозначна.

**Вычитание** для действительных чисел определяется, как и для натуральных, т. е.

$$a - b = c, \text{ если } b + c = a.$$

Если данные числа $a$ и $b$ определяются системами неравенств $\underline{a}_n \leqslant a \leqslant \bar{a}_n$ и $\underline{b}_n \leqslant b \leqslant \bar{b}_n$, то их разность определяется системой неравенств

$$\underline{a}_n - \bar{b}_n \leqslant c \leqslant \bar{a}_n - \underline{b}_n \; (n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.27}$$

Разность двух любых действительных чисел всегда существует и притом она однозначна, т. е. множество действительных чисел замкнуто относительно вычитания.

**Умножение.** Произведением двух положительных действительных чисел $a$ и $b$ называется такое действительное число $c$, которое больше всякого произведения любых десятичных приближений этих чисел с недостатком, но не больше всякого произведения любых десятичных приближений этих чисел с избытком.

В частности, если $\underline{a}_n < a \leqslant \bar{a}_n$ и $\underline{b}_n < b \leqslant \bar{b}_n$, то произведение $c = ab$ чисел $a$ и $b$ определяется системой неравенств

$$\underline{a}_n \underline{b}_n < c \leqslant \bar{a}_n \bar{b}_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.28}$$

Если $a$ и $b$ — произвольные действительные числа, отличные от нуля ($a \neq 0$, $b \neq 0$), то надо перемножить их абсолютные величины по вышеизложенному определению и результат взять со знаком плюс, если сомножители имеют одинаковые знаки, и со знаком минус, если знаки разные.

Если хотя бы один из сомножителей равен нулю, то произведение равно нулю

$$a \cdot 0 = 0; \; 0 \cdot a = 0; \; 0 \cdot 0 = 0. \tag{1.29}$$

Произведение нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Множество действительных чисел замкнуто относительно умножения, а результат умножения (произведение) однозначен.

**Деление** для действительных чисел определяется так же, как и для натуральных, т. е.

$$a : b = c, \text{ если } b \quad c = a.$$

Если числа $a$ и $b$ положительные и определяются системами неравенств $\underline{a}_n < a \leqslant \bar{a}_n$ и $\underline{b}_n < b \leqslant \bar{b}_n$, то их частное определяется системой неравенств

$$\frac{\underline{a}_n}{\bar{b}_n} < \frac{a}{b} < \frac{\bar{a}_n}{\underline{b}_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.30}$$

Если же $a$ и $b$ — произвольные действительные числа, отличные от нуля ($a \neq 0$, $b \neq 0$), то, чтобы найти их частное $\frac{a}{b}$, надо разделить их абсолютные величины и результат взять со знаком плюс, если $a$ и $b$ имеют одинаковые знаки, и со знаком минус, если знаки разные.

Если делимое равно нулю, то частное равно нулю:

$$0 : a = 0 \; (a \neq 0). \tag{1.31}$$

Множество действительных чисел замкнуто относительно деления (за исключением деления на нуль), а результат деления (частное) однозначен.

Деление на нуль невозможно.

Таким образом, множество действительных чисел замкнуто относительно арифметических действий (за исключением деления на нуль), а результаты этих действий однозначны.

Заметим, что множество иррациональных чисел не замкнуто относительно арифметических действий, т. е. сумма, разность, произведение и частное двух иррациональных чисел не всегда является иррациональным числом.

**Основные законы действий над действительными числами.**

1. Законы сложения:

переместительный (коммутативный):

$$a + b = b + a;$$

сочетательный (ассоциативный):

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c);$$

закон монотонности:

если $a > b$, то $a + c > b + c$, какое бы ни было число $c$.

2. Законы умножения:

переместительный (коммутативный):

$$ab = ba;$$

сочетательный (ассоциативный):

$$abc = (ab)\, c = a\,(bc);$$

распределительный (дистрибутивный):

$$(a + b)\, c = ac + bc;$$

закон монотонности:

если $a > b$, то $ac > bc$ при $c > 0$ и $ac < bc$ при $c < 0$.

## § 13. Абсолютная величина (модуль) действительного числа

Абсолютная величина неотрицательного действительного числа равна самому числу; абсолютная величина отрицательного действительного числа равна противоположному числу.

Абсолютная величина числа $a$ обозначается $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \qquad (1.32)$$

Геометрически абсолютная величина действительного числа равна расстоянию от начала числовой оси до точки, изображающей данное число.

Основные свойства абсолютной величины действительного числа.

1. Абсолютная величина действительного числа есть число неотрицательное, т. е.

$$|a| \geqslant 0$$

2. Противоположные числа имеют равные абсолютные величины, т. е.

$$|-a| = |a|.$$

3. Действительное число не больше своей абсолютной величины, т. е.

$$a \leqslant |a|.$$

4. Неравенство $|x| < a\ (a > 0)$ равносильно двойному неравенству

$$-a < x < a.$$

5. Неравенство $|x| > a\ (a > 0)$ равносильно двум неравенствам

$$x < -a \text{ и } x > a.$$

6. Абсолютная величина суммы двух чисел не превышает суммы абсолютных величин каждого из слагаемых, т. е.

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|. \tag{1.33}$$

Доказательство: а) пусть $a+b \geqslant 0$; тогда $|a+b| = a+b$. По свойству 3 $a \leqslant |a|$ и $b \leqslant |b|$, откуда $a+b \leqslant |a|+|b|$, т. е. $|a+b| \leqslant |a|+|b|$; б) пусть $a+b < 0$; тогда $|a+b| = -a-b$. По свойству 3 $-a \leqslant |-a|$ и $-b \leqslant |-b|$. Так как по свойству 2 $|-a| = |a|$ и $|-b| = |b|$, то $-a \leqslant |a|$ и $-b \leqslant |b|$ или $-a-b \leqslant |a|+|b|$, т. е. $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

Свойство 6 легко распространяется на любое количество слагаемых, т. е.

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|. \tag{1.34}$$

7. Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности их абсолютных величин, т. е.

$$|a-b| \geqslant |a| - |b|. \tag{1.35}$$

Заменив в (1.35) $b$ на $-b$, получим

$$|a+b| \geqslant |a| - |b|. \tag{1.36}$$

Учитывая (1.33) и (1.36), имеем

$$|a| - |b| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|. \tag{1.37}$$

8. Абсолютная величина произведения нескольких чисел равна произведению абсолютных величин каждого из сомножителей, т. е.

$$|a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|. \tag{1.38}$$

9. Абсолютная величина частного двух чисел равна частному от деления абсолютной величины делимого на абсолютную величину делителя, т. е.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}. \tag{1.39}$$

Читателю рекомендуется доказать свойства 7—9 абсолютной величины действительного числа.

## § 14. Приближенные вычисления

**1. Числа точные и приближенные.** Число называется *точным* или *приближенным* в зависимости от того, точное или приближенное значение величины оно выражает. Число жителей г. Киева — всегда число приближенное, а число кинотеатров в Киеве — число точное. Что же касается чисел, получаемых при измерениях величин, то они, как правило, приближенные. Различные измерительные приборы и инструменты позволяют измерять величины с различной степенью точности.

По правилу, предложенному академиком А. Н. Крыловым, приближенный результат следует записывать так, чтобы последняя его цифра указывала на его точность; все цифры, кроме последней, должны быть верными, и лишь в последней допустима небольшая ошибка (не более, чем на одну единицу*).

Например, если длина отрезка $l \approx 15{,}21$ м, то это означает, что она измерена с точностью до 0,01 м (или 1 см). Следовательно, точное значение длины отрезка $l = x$ заключено между 15,20 м и 15,22 м, т. е. $15{,}20 \text{ м} < x < 15{,}22$ м.

Если приближенное число $a$ есть некоторое приближение точного числа $x$, то это записывают так: $x \approx a$.

Если $x \approx 2{,}548$ по правилу А. Н. Крылова, то это значит, что число $x$ задано с точностью до 0,001.

Значащими цифрами приближенного числа, записанного по правилу А. Н. Крылова, называются все его цифры, начиная с первой слева, отличной от нуля. Следовательно, все значащие цифры приближенного числа должны быть верными, за исключением последней, которая может быть сомнительной.

Например, приближенное число 2,301 имеет четыре значащие цифры, число 0,038 — две. Если число жителей некоторого города определено с точностью до тысячи, то в числе 1 235 000 чел. (жителей этого города) содержится четыре значащие цифры; такое число принято записывать в форме $1235 \cdot 10^3$. Если число 2,300 задано с точностью до 0,001, то в нем четыре значащие цифры.

**2. Абсолютная и относительная погрешность.** Пусть $a$ — некоторое приближение точного числа $x$, т. е. $x \approx a$.

*Погрешностью* $\Delta x$ *приближенного равенства* $x \approx a$ называется разность $x - a$, т. е. $\Delta x = x - a$.

Если $\Delta x > 0$, то число $a$ называется приближением числа $x$ по недостатку, а если $\Delta x < 0$ — по избытку. Если $\Delta x = 0$, то $x = a$, т. е. точное число можно рассматривать как приближенное с погрешностью нуль.

Абсолютная величина погрешности приближенного равенства $x \approx a$ называется абсолютной погрешностью этого равенства, т. е.

$$|\Delta x| = |x - a|.$$

Так как точное значение числа $x$, как правило, в большинстве случаев неизвестно, то вместе с ним неизвестна и абсолютная погрешность приближения $a$. Поэтому в приближенных вычислениях пользуются понятием предельной абсолютной погрешности.

---

* М. Н. Швец в работе «О приближенных числах» предлагает последнюю цифру брать с точностью до $\sqrt{3}$.

Предельной абсолютной погрешностью приближенного равенства $x \approx a$ называется такое неотрицательное число $\Delta a$ ($\Delta a > 0$), для которого выполняется неравенство

$$|x - a| \leqslant \Delta a.$$

Если известна предельная абсолютная погрешность приближения $a$, то приближенное равенство $x \approx a$ записывают так:

$$x \approx a\ (\pm \Delta a). \tag{1.40}$$

Пользуясь свойством 4 абсолютной величины (§ 13), из неравенства

$$|x - a| \leqslant \Delta a$$

получаем, что

$$-\Delta a \leqslant x - a \leqslant \Delta a,$$

или

$$a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a. \tag{1.41}$$

Числа $a - \Delta a$ и $a + \Delta a$ называются соответственно нижней и верхней границей числа $x$, т. е. $НГx = a - \Delta a$, а $ВГx = a + \Delta a$.

Относительной погрешностью приближенного равенства $x \approx a$ называется отношение абсолютной погрешности этого равенства к абсолютной величине числа $x$:

$$\delta x = \frac{|\Delta x|}{|x|} = \frac{|x - a|}{|x|}\ (x \neq 0). \tag{1.42}$$

Так как абсолютная погрешность $|\Delta x|$, как правило, неизвестна, то неизвестна и относительная погрешность, поэтому на практике пользуются понятием предельной относительной погрешности.

Предельной относительной погрешностью $\delta a$ приближенного равенства $x \approx a$ называется отношение предельной абсолютной погрешности этого равенства к абсолютной величине числа $x$:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|x|}\ (x \neq 0). \tag{1.43}$$

Число $x$ в общем случае неизвестно, поэтому предельную относительную погрешность $\delta a$ вычисляют по приближенной формуле

$$\delta a \approx \frac{\Delta a}{|a|}. \tag{1.44}$$

Формула (1.44), определяющая приближенно предельную относительную погрешность, устанавливает связь между приближением $a$ и погрешностями $\Delta a$ и $\delta a$, т. е. $\Delta a \approx |a| \cdot \delta a$.

Предельную относительную погрешность очень часто выражают в процентах. Например, пусть число $a = 15{,}6$ получено измерением величины $x$ инструментом, погрешность которого не превышает 0,1. Тогда предельная абсолютная погрешность $\Delta a = 0{,}1$, т. е. $|x - a| = |x - 15{,}6| \leqslant 0{,}1$; следовательно, $x \approx 15{,}6\ (\pm\ 0{,}1)$. Предельная относительная погрешность равенства $x \approx 15{,}6$

$$\delta a \approx \frac{\Delta a}{|a|} = \frac{0{,}1}{15{,}6} \approx 0{,}0064 = 0{,}64\%.$$

3. **Округление.** На практике очень часто во избежание ненужных вычислений числа округляют до необходимой степени точности, т. е. заменяют данные числа их приближениями.

Существует три вида округления чисел: по недостатку, по избытку и с поправкой.

а) *Округление по недостатку.* При округлении данного положительного числа до $n$-го разряда по недостатку все его цифры до $n$-го разряда включительно сохраняют без изменения, а остальные отбрасывают. При округлении данного отрицательного числа до $n$-го разряда по недостатку до его цифры $n$-го разряда прибавляют единицу, а все последующие цифры отбрасывают.

б) *Округление по избытку.* При округлении данного положительного числа до $n$-го разряда по избытку до цифры $n$-го разряда его округления по недостатку прибавляют единицу. При округлении данного отрицательного числа до $n$-го разряда по избытку все его цифры до $n$-го разряда включительно сохраняют без изменения, а остальные отбрасывают.

в) *Округление с поправкой.* При округлении данного числа с поправкой до $n$-го разряда последняя сохраняемая цифра (цифра $n$-го разряда) не меняется, если цифра, следующая за ней, меньше 5, и увеличивается на 1, если цифра, следующая за ней, не меньше 5.

Примеры округления чисел приводятся в табл. 1.

Таблица 1

| Данное число | Погрешность округления | Округление | | |
|---|---|---|---|---|
| | | по недостатку | по избытку | с поправкой |
| 235682 | До 100 | 235600 | 235700 | 235700 |
| 2,4852 | До 0,001 | 2,485 | 2,486 | 2,486 |
| 0,0248 | До 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,02 |
| 1,0368 | До 0,1 | 1,0 | 1,1 | 1,0 |
| 14,602 | До 1 | 14 | 15 | 15 |
| 5,43215 | До 0,0001 | 5,4321 | 5,4322 | 5,4322 |
| —4,0147 | До 0,001 | —4,015 | —4,014 | —4,015 |
| —2356 | До 100 | —2400 | —2300 | —2400 |

При округлении точного числа по недостатку или избытку предельная абсолютная погрешность не превосходит одной единицы последнего сохраненного разряда, а при округлении с поправкой — половины единицы последнего сохраненного разряда.

Заметим, что предельную абсолютную погрешность всегда следует округлять по избытку. Это относится и к предельной относительной погрешности.

4. **Действия над приближенными числами.** При выполнении действий над приближенными числами необходимо знать:

а) если исходные числа заданы с некоторой известной степенью точности, то с какой максимальной степенью точности можно получить результат при выполнении тех или иных действий над ними;

б) если требуется иметь результат с наперед заданной степенью точности, то с какой степенью точности должны быть заданы исходные числа.

При выполнении действий над приближенными числами совершенно недопустима большая (фиктивная) точность, чем это допускают исходные данные. Кроме того, при действиях над приближенными числами следует пользоваться техническими правилами, позволяющими при наименьшем количестве вычислений получить результат с наибольшей возможной, при некоторых данных, степенью точности.

Погрешности результатов действий над приближенными числами выражаются через погрешности этих чисел на основании следующих теорем.

**Теорема 1.** Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей ее слагаемых.

Например, пусть $x \approx a$, $y \approx b$, $z \approx c$, $x + y - z \approx a + b - c$; тогда

$$\Delta (a + b - c) = \Delta a + \Delta b + \Delta c. \tag{1.45}$$

**Теорема 2.** Предельная относительная погрешность суммы заключена между наименьшей и наибольшей из предельных относительных погрешностей ее слагаемых.

Например, пусть $x \approx a$, $y \approx b$, $z \approx c$, $x + y + z \approx a + b + c$ и $\delta a \leqslant \delta b \leqslant \delta c$; тогда

$$\delta a \leqslant \delta (a + b + c) \leqslant \delta c. \tag{1.46}$$

**Теорема 3.** Предельная относительная погрешность произведения приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.

Например, если $x \approx a$, $y \approx b$, то

$$\delta (ab) \approx \delta a + \delta b. \tag{1.47}$$

**Теорема 4.** Предельная относительная погрешность частного приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя, т. е. если $x \approx a$, $y \approx b$ и $\frac{x}{y} \approx \frac{a}{b}$, то

$$\delta \left(\frac{a}{b}\right) \approx \delta a + \delta b. \tag{1.48}$$

Учитывая связь (1.44) между предельными относительной и абсолютной погрешностями, легко получить формулы для определения предельных абсолютных погрешностей произведения и частного. Сначала выведем формулу для определения предельной абсолютной погрешности произведения двух множителей. Пусть $x \approx a$, $y \approx b$ и $xy \approx ab$. Тогда, по теореме 3, $\delta (ab) \approx \delta a + \delta b$. Так как $\delta (ab) \approx \frac{\Delta (ab)}{|ab|}$, $\delta a \approx \frac{\Delta a}{|a|}$ и $\delta b \approx \frac{\Delta b}{|b|}$, то $\frac{\Delta (ab)}{|ab|} \approx \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$. Умножив обе части последнего равенства на $|a| \cdot |b|$ и учитывая, что $|ab| = |a| \, |b|$, получим

$$\Delta (ab) = |b| \cdot \Delta a + |a| \, \Delta b. \tag{1.49}$$

Аналогично для частного

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{|b|\,\Delta a + |a|\,\Delta b}{b^2}. \tag{1.50}$$

**Теорема 5.** Предельная относительная погрешность степени приближенно равна произведению показателя степени на предельную относительную погрешность основания, т. е. если $x \approx a$ и $x^\alpha \approx a^\alpha$, то

$$\delta(a^\alpha) \approx \alpha\ \delta a. \tag{1.51}$$

Из формулы (1.51) получаем

$$\frac{\Delta a^\alpha}{|a|^\alpha} \approx \alpha\ \frac{\Delta a}{|a|},$$

откуда

$$\Delta a^\alpha \approx \alpha\,|a|^{\alpha-1} \cdot \Delta a. \tag{1.52}$$

В частном случае, при $\alpha = \frac{1}{n}$, имеем

$$\delta\left(\sqrt[n]{a}\right) \approx \frac{1}{n}\,\delta a \tag{1.53}$$

и

$$\Delta\left(\sqrt[n]{a}\right) \approx \frac{\Delta a}{n\sqrt[n]{|a|^{n-1}}}. \tag{1.54}$$

Теоремы 1—5 дают возможность по данным погрешностям компонентов действий определить степень точности результата.

Если требуется решить обратную задачу, т. е. определить, с какими погрешностями достаточно взять значения компонентов действий, чтобы получить результат действий с наперед заданной точностью, то, пользуясь формулами, вытекающими из теорем 1—5, можно определить допустимые погрешности для компонентов действий. Следует отметить, что решение обратной задачи вообще не однозначно и для ее решения привлекают дополнительные условия.

**5. Приближенные вычисления с помощью правил подсчета цифр.** Вычисления над приближенными числами производят со строгим учетом погрешностей и без него (с помощью правил подсчета цифр).

Правила подсчета цифр следующие.

I. При сложении и вычитании приближенных чисел в их сумме или разности следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном числе, имеющем наименьшее число десятичных знаков.

Пример. Найти сумму приближенных чисел 2,38035; 0,0342; 51,247018 и 5,3.

Решение.

$$\begin{array}{rl} & 2{,}3\,|\,8035 \\ & 0{,}0\,|\,342 \\ + & 51{,}2\,|\,47018 \\ & 5{,}3\,| \\ \hline & 58{,}9\,|\,61568 \approx 58{,}9 \text{ (или } 59{,}0) \end{array}$$

Ответ. $\approx 58{,}9$ (по недостатку) или $\approx 59{,}0$ (по избытку; с поправкой).

Точность суммы, вычисленной по правилу I, определяется точностью слагаемого с наименьшим числом десятичных знаков. Поэтому на практике рационально до сложения все числа с большим числом десятичных знаков округлить, сохранив в каждом из них на один десятичный знак больше, чем в слагаемом с наименьшим числом десятичных знаков.

Приведенный выше пример рационально решать так:

$$\begin{array}{r} 2{,}38 \\ 0{,}03 \\ +\ 51{,}25 \\ 5{,}3 \\ \hline 58{,}96 \end{array} \approx 59{,}0.$$

II. При умножении и делении приближенных чисел в произведении или, соответственно, в частном следует сохранить столько значащих цифр, сколько их есть в приближенном данном числе, имеющем наименьшее число значащих цифр.

Пример. Умножить приближенные числа 3,1283 и 2,41.

Решение.

$$\begin{array}{r} 3{,}1283 \\ \times\ 2{,}41 \\ \hline 3\,|\,1283 \\ 125\,|\,132 \\ 625\,|\,66 \\ \hline 7{,}53\,|\,9203 \end{array} \approx 7{,}54.$$

Ответ. $\approx 7{,}53$ (по недостатку) или $\approx 7{,}54$ (по избытку; с поправкой).

Из решения этого примера видно, что вычисления, проведенные справа от пунктирной линии, лишние, а, значит, в приближенных вычислениях они недопустимы, так как половина вычислительной работы выполнена напрасно.

Выполним это вычисление более рациональным способом. Округлим первый сомножитель с точностью до 0,01 и перемножим эти числа:

$$\begin{array}{r} 3{,}13 \\ \times\ 2{,}41 \\ \hline 3\,|\,13 \\ 125\,|\,2 \\ 626\,| \\ \hline 7{,}54333 \end{array} \approx 7{,}54.$$

При таком вычислении лишней работы стало меньше, но она еще есть. Умножим эти числа так:

$$\begin{array}{r} 3{,}13 \\ \times\ 2{,}41 \\ \hline 6\,26\,| \\ 1\,25\,|\,1 \\ 3\,|\,0 \\ \hline 7{,}54. \end{array}$$

Умножение выполнено следующим образом: множимое 313 (не учитывая запятой) умножили на 2 — цифру старшего разряда множителя и результат записали под чертой. Затем вторую цифру множителя 4 умножили на 31 — множимое без цифры последнего разряда, причем учитывали, что последняя цифра множимого 3, умноженная на 4, дает 12, т. е. «замечали» 1 и прибавляли ее к последней цифре произведения $31 \times 4$; подписали 125 под 626 так, чтобы последние цифры в этих числах были одна под другой. Затем третью цифру множителя 1 умножили на 3 — множимое без двух последних цифр; учитывая, что $1 \times 1 = 1$, перехода через десяток нет. Полученное число 3 подписываем под цифрой 5 числа 125, а затем складываем и в результате отделяем запятой столько десятичных знаков после запятой, сколько их в множителе (или множимом).

Например, умножить приближенные числа 1,235 и 21,342379.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
\times\ 21{,}342 & \\
1{,}235 & \\
\hline
21\,342 & \\
4\,268 & 0 \\
640 & 1 \\
106 & 1 \\
\hline
26{,}356 \approx 26{,}36 &
\end{array}
$$

Ответ. $\approx 26{,}36$.

III. При возведении приближенных чисел в степень в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их имеет основание степени.

Пример. Возвести в квадрат 1,414.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
\times\ 1{,}414 & \\
1{,}414 & \\
\hline
1\,414 & \\
565 & 1 \\
14 & 0 \\
5 & 1 \\
\hline
1{,}998 &
\end{array}
$$

Ответ. $\approx 1{,}998$.

IV При извлечении корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное значение подкоренного выражения.

Замечание. Если приближенные числа, действия над которыми надо выполнить, заданы с различной степенью точности, то их надо предварительно округлить, сохраняя лишь одну запасную цифру по сравнению с тем числом, которое задано с наименьшей точностью. Аналогично округляются промежуточные результаты действий.

Пример. Вычислить способом подсчета цифр $x = \dfrac{(a+b)\,c}{a^2}$, если $a = 2{,}11$, $b = 0{,}3216$, $c = 2{,}5$.

Решение.

$$a + b = 2{,}11 + 0{,}32 = 2{,}43;$$

$$(a + b)\quad c = 2{,}43 \cdot 2{,}5 \approx 6{,}08;$$

$$a^2 = 2{,}11^2 \approx 4{,}452;$$

$$x \approx 6{,}08 : 4{,}45 \approx 1{,}37.$$

Окончательный результат округляем до двух значащих цифр.

Ответ. $x \approx 1{,}4$.

Правила подсчета цифр при приближенных вычислениях дают самый грубый способ оценки результатов вычислений, но они просты и удобны и в большинстве случаев практики дают достаточную точность.

**6. Приближенные вычисления по способу границ.** Вычисления по способу границ строго учитывают погрешности результатов по погрешностям данных приближенных чисел. Этот способ заключается в том, что по известным нижним и верхним границам данных чисел находят нижние и верхние границы результатов действий над ними.

Пусть дано число $x \approx a\ (\pm\Delta a)$; это означает, что

$$a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a.$$

Обозначим $\text{НГ}x = \underline{x}$ и $\text{ВГ}x = \bar{x}$, т. е.

$$\underline{x} = a - \Delta a, \quad \bar{x} = a + \Delta a;$$

тогда

$$\underline{x} \leqslant x \leqslant \bar{x}.$$

**1. Сложение.** Сложение двух приближенных чисел $x \approx a\ (\pm\Delta a)$ и $y \approx b\ (\pm\Delta b)$ по способу границ производится по правилу

$$\underline{x} + \underline{y} \leqslant x + y \leqslant \bar{x} + \bar{y}, \quad x + y \approx \frac{(\underline{x} + \underline{y}) + (\bar{x} + \bar{y})}{2} (\pm\,(\Delta a + \Delta b)). \tag{1.55}$$

Пример. Сложить $x \approx 15{,}3\ (\pm 0{,}05)$ и $y \approx 3{,}2\ (\pm 0{,}05)$.

Решение. В данном примере $a = 15{,}3$, $b = 3{,}2$, $\Delta a = 0{,}05$, $\Delta b = 0{,}05$. Поэтому $\underline{x} = 15{,}25$, $\bar{x} = 15{,}35$, $\underline{y} = 3{,}15$, $\bar{y} = 3{,}25$; по правилу сложения получаем

$$15{,}25 + 3{,}15 \leqslant x + y \leqslant 15{,}35 + 3{,}25,$$

или

$$18{,}40 \leqslant x + y \leqslant 18{,}60.$$

По теореме 1 этого параграфа

$$\Delta\,(a + b) = \Delta a + \Delta b = 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}1.$$

Следовательно,

$$x + y \approx \frac{18{,}6 + 18{,}4}{2}\ (\pm 0{,}1) = 18{,}5\ (\pm 0{,}1).$$

Ответ. $x + y \approx 18{,}5\ (\pm 0{,}1)$.

**II. Вычитание.** Вычитание приближенных чисел $x \approx a\ (\pm\Delta a)$ и $y \approx b\ (\pm\Delta b)$ по способу границ производится по правилу

$$\underline{x} - \bar{y} \leqslant x - y \leqslant \bar{x} - \underline{y},$$

$$x - y \approx \frac{(\underline{x} - \bar{y}) + (\bar{x} - \underline{y})}{2}\ (\pm\ (\Delta a + \Delta b)). \qquad (1.56)$$

Пример. Найти разность чисел $x \approx 1{,}25\ (\pm 0{,}005)$ и $y \approx 0{,}51\ (\pm 0{,}005)$.

Решение. В данном примере $a = 1{,}25$, $b = 0{,}51$, $\Delta a = 0{,}005$, $\Delta b = 0{,}005$. Поэтому $\underline{x} = 1{,}245$, $\bar{x} = 1{,}255$, $\underline{y} = 0{,}505$, $\bar{y} = 0{,}515$; тогда

$$1{,}245 - 0{,}515 \leqslant x - y \leqslant 1{,}255 - 0{,}505,$$

или

$$0{,}730 \leqslant x - y \leqslant 0{,}750.$$

По теореме 1 этого параграфа

$$\Delta\,(a - b) = \Delta a + \Delta b = 0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01.$$

Следовательно,

$$x - y \approx \frac{0{,}730 + 0{,}750}{2}\ (\pm 0{,}01) = 0{,}74\ (\pm 0{,}01).$$

Ответ. $x - y \approx 0{,}74\ (\pm 0{,}01)$.

**III. Умножение.** Умножение двух приближенных чисел $x \approx a\ (\pm\Delta a)$ и $y \approx b\ (\pm\Delta b)$ по способу границ производится по правилу

$$\underline{x}\,\underline{y} \leqslant xy \leqslant \bar{x}\,\bar{y}, \quad xy \approx \frac{\underline{x}\,\underline{y} + \bar{x}\,\bar{y}}{2}\ (\pm\ (|\,b\,|\,\Delta a + |\,a\,|\,\Delta b)), \qquad (1.57)$$

если $\underline{x}$, $\bar{x}$, $\underline{y}$, $\bar{y}$ — положительные числа. Если хотя бы одно из приближенных чисел отрицательное, то сначала находим произведение абсолютных величин этих чисел.

Пример. Умножить числа $x \approx -2{,}43\ (\pm 0{,}005)$ и $y \approx 1{,}23\ (\pm 0{,}005)$.

Решение. Умножаем числа $|x| \approx 2{,}43\ (\pm 0{,}005)$ и $|y| \approx 1{,}23\ (\pm 0{,}005)$.

$$2{,}425 \cdot 1{,}225 \leqslant |x| \cdot |y| \leqslant 2{,}435 \cdot 1{,}235,$$

$$2{,}970 \leqslant |x| \cdot |y| \leqslant 3{,}008^{*}.$$

На основании (1.49) имеем

$$\Delta\,(|a| \cdot |b|) \approx |b|\,\Delta\,|a| + |a|\,\Delta\,|b| =$$
$$= 0{,}005 \cdot 1{,}23 + 0{,}005 \cdot 2{,}43 = 0{,}0183 \approx 0{,}019$$

(напомним, что округление предельной абсолютной погрешности всегда производится по избытку).

---

* Округление НГ всегда производится по недостатку, а округление ВГ — всегда по избытку.

Предельная абсолютная погрешность результата действия равна полуразности верхней и нижней его границ. Например, для произведения

$$\Delta(ab) = \frac{\bar{x}\bar{y} - \underline{x}\underline{y}}{2}.$$

Если воспользоваться этой формулой, то в данном случае получим

$$\Delta(ab) = \frac{3{,}008 - 2{,}970}{2} = 0{,}019.$$

Поэтому

$$|x|\,|y| \approx \frac{3{,}008 + 2{,}970}{2}(\pm 0{,}019) = 2{,}989\,(\pm 0{,}019).$$

Округляя до трех значащих цифр, получаем $xy \approx -2{,}99\,(\pm 0{,}02)$.

Ответ. $xy \approx -2{,}99\,(\pm 0{,}02)$.

**IV. Деление.** Деление приближенных чисел $x \approx a\,(\pm\Delta a)$ и $y \approx b\,(\pm\Delta b)$, если их нижние и верхние границы положительные, по способу границ производится по правилу

$$\frac{\underline{x}}{\bar{y}} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \quad \frac{x}{y} \approx \frac{\frac{\underline{x}}{\bar{y}} + \frac{\bar{x}}{\underline{y}}}{2}\left(\pm \frac{|b| \cdot \Delta a + |a|\,\Delta b}{b^2}\right). \quad (1.58)$$

Если хотя бы одно из приближенных чисел отрицательно, то сначала находят частное абсолютных величин этих чисел.

Пример. Найти частное от деления $\frac{x}{y}$, если $x \approx 2{,}1\,(\pm 0{,}05)$, $y \approx 3{,}2\,(\pm 0{,}05)$.

Решение. В данном примере $a = 2{,}1$, $b = 3{,}2$, $\Delta a = 0{,}05$, $\Delta b = 0{,}05$. Поэтому $\underline{x} = 2{,}05$, $\bar{x} = 2{,}15$, $\underline{y} = 3{,}15$, $\bar{y} = 3{,}25$ и по правилу деления имеем

$$\frac{2{,}05}{3{,}15} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{2{,}15}{3{,}25},$$

или

$$0{,}65 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 0{,}67.$$

Применяя для определения предельной абсолютной погрешности формулу

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\frac{\bar{x}}{\underline{y}} - \frac{\underline{x}}{\bar{y}}}{2},$$

получим

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{0{,}67 - 0{,}65}{2} = 0{,}01.$$

Если для определения предельной абсолютной погрешности воспользоваться формулой (1.50), то найдем

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{0{,}05 \cdot 3{,}2 + 0{,}05 \cdot 2{,}1}{3{,}2} \approx 0{,}03.$$

В данном случае формула (1.50) дает завышенную предельную абсолютную погрешность (если числа $x$ и $y$ имеют одинаковые знаки, то эта формула всегда дает завышенную предельную абсолютную погрешность).

Принимая $\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = 0{,}01$, имеем

$$\frac{x}{y} \approx \frac{0{,}65 + 0{,}67}{2}(\pm 0{,}01) = 0{,}66\,(\pm 0{,}01).$$

Ответ. $\frac{x}{y} \approx 0{,}66\,(\pm 0{,}01)$.

Если числа заданы с различной степенью точности, то их следует предварительно округлить до необходимой в вычислениях степени точности.

### Упражнения

1. Выполнить действия:

$$17{,}81 : 0{,}0137 + \left[\frac{\left(6 - 4\frac{1}{2}\right) : 0{,}003}{\left(3\frac{1}{20} - 2{,}65\right) \cdot 4 : \frac{1}{5}} - \frac{\left(0{,}3 - \frac{3}{20}\right) \cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88 + 2\frac{3}{25}\right) \cdot \frac{1}{8}}\right] : 62\frac{1}{20}.$$

2. Найти $x$, если

а) $$\frac{\left[2{,}(36)x - 1\frac{7}{55}x + 30{,}2\right] \cdot 2{,}5}{0{,}3} = 303{,}(18);$$

б) $$5\frac{4}{7} : \left\{x : 1{,}3 + 8{,}4 \cdot \frac{6}{7} \cdot \left[6 - \frac{(2{,}3 + 5 : 6{,}25) \cdot 7}{8 \cdot 0{,}0125 + 6{,}9}\right]\right\} = 1\frac{1}{14}.$$

3. При делении некоторого числа на 45 цифру тысяч 3 в делимом приняли за 9, а цифру единиц за 4 вместо 9 и получили в частном 438, а в остатке 44. Найти верное частное и остаток.
4. Найти наибольшее трехзначное число, при делении которого на 4 в остатке получается 3, при делении на 5 — 4, а при делении на 6 — 5.
5. Изменится ли при делении с остатком частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в $n$ раз? Ответ подтвердить примером.
6. Доказать, что если два числа при делении на третье число дают одинаковые остатки, то их разность делится на это третье число.

7. Даны три последовательных натуральных числа, из которых первое — четное. Доказать, что произведение этих чисел кратно 24.
8. Наименьшее кратное двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 630, а наибольший их общий делитель — 18. Найти эти числа.
9. Даны дроби $\frac{8}{15}$ и $\frac{18}{35}$. Найти наибольшее из всех чисел, при делении на которое каждой из данных дробей получаются целые числа.
10. И разность, и частное двух чисел равно 0,6. Найти эти числа.
11. Сумма трех дробей равна $2\frac{7}{96}$; числители их относятся, как 15 : 25 : 9, а знаменатели,— как 4 : 3 : 2. Найти эти дроби.
12. Найти два числа, из которых одно в 5,5 раза меньше другого, а среднее арифметическое равно 10,01.
13. Для нумерации страниц книги потребовалось 2322 цифры. Сколько страниц в книге?
14. Найти шесть чисел, из которых каждое следующее больше предыдущего на 0,4, а среднее арифметическое равно 3.
15. Одно число больше другого на 16, причем $\frac{5}{32}$ одного равны $\frac{3}{16}$ другого. Найти эти числа.
16. Найти несократимую дробь, зная, что произведение ее числителя и знаменателя равно 550 и что эта дробь выражается конечной десятичной дробью.
17. Доказать, что разность между несократимой дробью и ее квадратом есть также несократимая дробь.
18. Доказать, что не существует целого числа, которое после перестановки начальной цифры в конец увеличивается в 5 раз.
19. Показать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.
20. Произведение двух целых чисел равно 216, а их наименьшее кратное — 36. Найти эти числа.
21. Из двух сплавов с 60-процентным и 80-процентным содержанием меди требуется получить сплав в 40 кг с 75-процентным содержанием меди. Сколько килограммов каждого сплава следует взять для этого?
22. Сколько граммов 8%-ной серной кислоты можно получить из 200 г жидкости, содержащей 62% серной кислоты?
23. До какого веса надо выпарить 800 г 10%-ного раствора соли, чтобы довести содержание последней до 16%?
24. При обработке деревянного бруса его длина уменьшилась на 2,5, ширина на 7,2 и толщина на 2,8%. Сколько процентов первоначального объема бруса составили отходы при обработке? (Ответ дать с точностью до 0,1%).
25. Только что добытый каменный уголь содержит 2% воды. Через какое-то время он впитывает в себя еще некоторое количество воды и содержит ее уже 15%. На сколько увеличивается при этом вес 25,75 т только что добытого каменного угля? (Ответ дать с точностью до 0,1 т).
26. Вычислить с точностью до 0,01: $32{,}142 \cdot 1\frac{2}{3}$.

27. Вычислить с точностью до 0,01: $(\sqrt{5}+\sqrt{3}):12$.
28. Вычислить с точностью до 0,01: $0{,}1\sqrt{200}-2\sqrt{0{,}08}+4\sqrt{0{,}5}+0{,}4\sqrt{50}$.
29. Вычислить $x$ и установить границу абсолютной погрешности, применив способ границ, если $x=\dfrac{a+b}{(a-b)\cdot c}$, где $a\approx 3{,}575$ $(\pm 0{,}005)$, $b\approx 3{,}455$ $(\pm 0{,}005)$ и $c\approx 28{,}335$ $(\pm 0{,}005)$.
30. Установить погрешность по способу границ погрешностей и вычислить $x=a+2b-3c$, где $a\approx 27{,}3$ $(\pm 0{,}1)$, $b\approx 3{,}212$ $(\pm 0{,}002)$ и $c\approx 6{,}32$ $(\pm 0{,}01)$.

## Глава 2

# ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

### § 1. Понятие тождества и тождественного преобразования

*Алгебраическим выражением* называется совокупность конечного количества чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками). К алгебраическим действиям относятся сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с натуральным показателем и извлечение корня натуральной степени.

Например:

$$2(a+b-3);\ a^2+\frac{1}{b-1};\ (x+y)^3;$$

$$\frac{a+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2};\ 5\cdot 3+1;\ a;\ 3{,}2.$$

Алгебраическое выражение может состоять из одного числа, обозначенного буквой или цифрой. Если все числа, входящие в выражение, обозначены цифрами, то такое выражение называют *арифметическим*.

Алгебраическое выражение, в котором над теми числами, которые обозначены буквами, указаны только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем, называют целым рациональным выражением. Если кроме указанных действий входит деление, то выражение называют дробно-рациональным. Целые рациональные и дробно-рациональные выражения вместе называются рациональными. Если входит еще и действие извлечения корня, то такое выражение называют иррациональным.

Например, целыми рациональными являются выражения

$$2a+3b^2-\sqrt{2}\,c;\quad \frac{3}{4}a^3+0{,}5b;$$

$$5a^3+\frac{1}{2}a^2-\sqrt{3}a+5;\quad xy^2z+x^2yz-x^3y^3z^3;$$

выражения $a^2+\frac{3}{a}-b$; $\frac{a^2+5}{a^2+b+1}$ и $\frac{x^2+xy-y^2}{x^2+y+x}$ относятся к дробным рациональным; выражения

$$\sqrt{a};\ \frac{\sqrt{x}+y}{x-\sqrt{y}};\quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

— иррациональные.

*Числовым значением алгебраического выражения* при заданных числовых значениях букв называют тот результат, который получится после замены букв их значениями и выполнения указанных в выражении действий.

Например: числовое значение выражения $a + 2b - c$ при $a = 5$, $b = -2$, $c = 1$ равно $5 + 2(-2) - 1 = 0$; числовое значение выражения $\frac{2x}{x + y - z}$ при $x = 1$, $y = 2{,}5$, $z = 3$ равно $\frac{2 \cdot 1}{1 + 2{,}5 - 3} = \frac{2}{0{,}5} = 4$.

Очевидно, не при любых совокупностях значений букв, входящих в данное алгебраическое выражение, может быть вычислено его числовое значение. Так, при $a = 2$ и $b = 1$ выражение $\frac{a}{a - 2b}$ не может быть вычислено, поскольку делитель $a - 2b$ при этих значениях букв обращается в нуль, а деление на 0 невозможно. При $a = -4$ в множестве действительных чисел не может быть вычислено выражение $a^3 + \sqrt{a}$, так как $\sqrt{a}$ при $a = -4$ не имеет действительных значений (не существует).

Совокупность значений букв, входящих в выражение, при которых оно не может быть вычислено, называют недопустимыми значениями. Все совокупности числовых значений букв, при которых данное выражение имеет числовой смысл, называют допустимыми значениями этих букв.

*Областью существования алгебраического выражения* называют множество всех допустимых совокупностей значений букв, входящих в это выражение.

Например, пусть требуется найти область существования выражений $x + y - 2xy$ и $\frac{a^2 + ab + b^2}{a - 3}$.

Так как в первом выражении над $x$ и $y$ указаны действия сложения, вычитания и умножения, относительно которых множество действительных чисел замкнуто, то данное выражение определено при всех действительных значениях $x$ и $y$.

Во втором выражении кроме сложения, вычитания и умножения указано деление, которое невыполнимо, если делитель равен 0, т. е. значение $a = 3$, при котором $a - 3 = 0$, является недопустимым. Таким образом, выражение существует при любых действительных значениях $a$ и $b$, кроме $a = 3$.

Следует отметить, что целые алгебраические выражения существуют при всех действительных значениях букв, в них входящих.

При рассмотрении алгебраических выражений всегда должно быть известно множество чисел, в котором это выражение рассматривается. Так, например, выражение $\frac{1}{2x - 3}$ в множестве целых чисел определено при всех значениях $x$, а в множестве рациональных (и действительных) чисел значение $x = \frac{3}{2}$ недопустимо, т. е. данное выражение существует при $x \neq \frac{3}{2}$.

Таким образом, область существования данного выражения зависит от множества чисел, в котором оно рассматривается.

Два выражения, соединенные между собой знаком «=» (равно), называют *равенством*.

Например: а) $5 = 2 + 3$; б) $(a + b)\,c = ac + bc$; в) $6 = 2$; г) $x^2 + 1 = x^2$; д) $3xy + 5 = 0$; е) $x^2 - 6x = 7$ и т. д. Равенства бывают верными и неверными. Так, равенства «а» и «б» верны, равенства «в» и «г» неверны, а равенства «д» и «е» при некоторых значениях букв верны, а при некоторых нет. Так, равенство «е» при $x = 7$ верно, а при $x = 8$ неверно.

*Тождественными* называются два одинаковых выражения. Обозначается $A \equiv A$ (в теории чисел этот знак употребляется в другом смысле).

Например: $x^2 \equiv x^2$; $ab + c \equiv ab + c$; $5 \equiv 5$. Выражения $(a + b)^2$ и $a^2 + 2ab + b^2$, 5 и $3 + 2$ — не тождественны.

Два выражения называются *тождественно равными*, если их числовые значения равны при всех допустимых системах значений букв, при которых оба эти выражения имеют числовой смысл, т. е. в общей части их областей существования. Два тождественных выражения тождественно равны.

Алгебраические выражения будем обозначать большими латинскими буквами $A$, $B$, $C$, $D$ и т. д.

Для обозначения равенства двух тождественно равных выражений наряду со знаком равенства употребляют знак тождества, т. е. если $A$ и $B$ тождественно равные выражения, то это записывают $A \equiv B$.

Например: $2 \equiv 5 - 3$; $a + b \equiv b + a$; $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b} \equiv a + b$ при $a \neq b$.

*Тождественным преобразованием* называется замена одного выражения другим, ему тождественно равным. Например:

$$3(a + 2) - 5 \equiv 3a + 6 - 5 \equiv 3a + 1;$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} \equiv a^2 + ab + b^2 \text{ при } a \neq b.$$

В последнем примере области определения выражений $\dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$ и $a^2 + ab + b^2$ не совпадают; первое выражение определено при $a \neq b$, а второе — при всех действительных значениях $a$ и $b$, т. е. при тождественных преобразованиях область определения нового выражения, полученного после преобразования, может отличаться от области существования преобразуемого выражения; данное выражение и полученное после преобразования будут тождественно равными только в общей части их областей определений. Общая часть области определений двух выражений, в которой они тождественно равны, называется областью верности тождества.

Понятие тождества — относительное понятие. В одном числовом множестве два выражения могут быть тождественно равными, а в другом нет.

Например, в множестве положительных чисел $\sqrt{x^2} \equiv x$; в множестве действительных чисел $\sqrt{x^2} \not\equiv x$.

**Основные свойства тождеств.** Пусть выражения $A$, $B$, $C$ и $D$ имеют общую часть $\omega$ областей их определения. Тогда в области $\omega$ имеют место свойства:

а) если $A \equiv B$, то $B \equiv A$; (2.1)

б) если $A \equiv B$ и $B \equiv C$, то $A \equiv C$; (2.2)

в) если $A \equiv B$, то $A \pm C \equiv B \pm C$; (2.3)

г) если $A \equiv B$, то $AC \equiv BC$; (2.4)

д) если $A \equiv B$ и $C \equiv D$, то $A \pm C \equiv B \pm D$. (2.5)

## § 2. Целые рациональные выражения

*Степенью* называют произведение одинаковых сомножителей. Пусть $\underbrace{a \cdot a \ldots a \cdot a}_{n \text{ раз}} = b$; это записывают $a^n = b$, причем $a$ называется основанием степени, $n$ — показателем степени, а $b$ — степенью ($b$ есть $n$-я степень $a$).

Принимается по определению: $a^1 = a$; $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$. Действие, посредством которого по известному основанию и показателю степени находят степень, называется *возведением в степень*. Так как действие возведения в натуральную степень есть частный случай умножения, то множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел замкнуты относительно действия возведения в степень с натуральным показателем, а результат действия (степень) однозначен.

Некоторые свойства степени:

а) четная степень любого действительного числа не отрицательна;

б) нечетная степень неотрицательного числа неотрицательна;

в) нечетная степень отрицательного числа отрицательна.

**Действия над степенями** производятся по нижеследующим правилам.

**Умножение.** Произведение степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей сомножителей, т. е.

$$a^n \cdot a^m \equiv a^{n+m} \tag{2.6}$$

и, наоборот,

$$a^{n+m} \equiv a^n \cdot a^m. \tag{2.7}$$

**Деление.** Частное двух степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, равным разности показателей делимого и делителя, т. е.

$$a^n : a^m = a^{n-m} \ (n > m) \tag{2.8}$$

и, наоборот,

$$a^{n-m} \equiv a^n : a^m \ (n > m). \tag{2.9}$$

**Возведение в степень.** Чтобы возвести данную степень $(a^n)$ в $m$-ю степень, достаточно основание данной степени $a$ возвести в степень, показатель которой равен произведению показателей обеих степеней, т. е.

$$(a^n)^m \equiv a^{mn} \tag{2.10}$$

и, наоборот,

$$a^{mn} \equiv (a^n)^m. \tag{2.11}$$

При возведении произведения в степень можно каждый сомножитель возвести в ту же степень и результаты перемножить, т. е.

$$(a \cdot b)^n \equiv a^n \cdot b^n \tag{2.12}$$

и, наоборот,

$$a^n \cdot b^n \equiv (a \cdot b)^n. \tag{2.13}$$

При возведении частного в степень можно в ту же степень возвести делимое и делитель и первый результат разделить на второй, т. е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \equiv \frac{a^n}{b^n} \tag{2.14}$$

и, наоборот,

$$\frac{a^n}{b^n} \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^n. \tag{2.15}$$

### Одночлен

*Одночленом* называют произведение, состоящее из числового множителя, называемого числовым коэффициентом одночлена, и натуральных степеней чисел, обозначенных буквами. Например:

$$5a^2b;\ \frac{1}{3}x^3yz;\ -0{,}3a^3c;\ 15mn;\ a;\ 2gh;\ 8{,}5;\ 0 \text{ и т. д.}$$

Степенью одночлена называют сумму всех показателей степеней чисел, обозначенных буквами. Число, обозначенное цифрами, называют одночленом нулевой степени. Например, $6a^3b^2c$ — одночлен 6-й степени $(3 + 2 + 1 = 6)$; $5xyz$ — одночлен 3-й степени $(1 + 1 + 1 = 3)$, а 12 — одночлен нулевой степени.

Два одночлена называются подобными, если они одинаковы или отличаются только коэффициентами.

Если коэффициент одночлена равен нулю, то одночлен имеет неопределенную степень и называется нулевым. Например, $0 \cdot x^2 \cdot y = 0$; $0 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c^4 = 0$ и т. д. Нулевой одночлен подобен всем одночленам.

**Сложение.** Сумма нескольких подобных одночленов равна одночлену, подобному каждому из них, с коэффициентом, равным сумме коэффициентов слагаемых.

Например, пусть требуется сложить одночлены

$$2a^2bc^3,\ -5a^2bc^3 \text{ и } 8a^2bc^3.$$

$$2a^2bc^3 + (-5a^2bc^3) + 8a^2bc^3 = (2 - 5 + 8)\,a^2bc^3 = 5a^2bc^3.$$

Вывод правила сложения одночленов основан на распределительном законе умножения относительно сложения. Сложение подобных одночленов называют еще приведением подобных членов.

**Умножение.** Чтобы перемножить два или несколько одночленов, достаточно перемножить их коэффициенты, а показатели одинаковых букв сложить.

Например, пусть требуется умножить одночлены

$$8a^3bc^2 \text{ и } -2a^4b^3c.$$

$$8a^3bc^2 \cdot (-2a^4b^3c) = [8 \cdot (-2)]\,a^{3+4}b^{1+3}c^{2+1} = -16a^7b^4c^3.$$

Вывод правила умножения одночленов основан на применении переместительного и сочетательного законов умножения и правила умножения степеней.

Два одночлена называются противоположными, если один из них равен другому, умноженному на —1.

**Деление.** Чтобы разделить одночлен на одночлен, достаточно разделить их коэффициенты, а показатели одинаковых букв вычесть.

Например, пусть требуется разделить $15a^6b^3c^2$ на $3a^2b^2c$.

$$15a^6b^3c^2 : 3a^2b^2c = (15 : 3) \cdot a^{6-2}b^{3-2}c^{2-1} = 5a^4bc.$$

Следует отметить, что деление одночленов возможно в случаях, когда показатели букв делимого не меньше показателей соответствующих букв делителя. После введения понятия степени с отрицательным показателем это деление становится возможным (но не в множестве одночленов).

**Раскрытие скобок и заключение в скобки.** Раскрыть в алгебраическом выражении скобки значит заменить его тождественным выражением, не содержащим скобок.

*Правило раскрытия скобок.* Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак плюс, надо записать без скобок все члены, стоящие в скобках, с их знаками. Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак минус, надо записать без скобок все члены, стоящие в скобках, с противоположными знаками.

Например, $a + [b - (c - d)] = a + [b - c + d] = a + b - c + d$.

*Правило заключения в скобки.* Чтобы заключить в скобки сумму нескольких слагаемых со знаком плюс перед скобками, надо записать в скобках все слагаемые этой суммы с их знаками. Чтобы заключить в скобки сумму нескольких слагаемых со знаком минус перед скобками, надо записать в скобках все слагаемые этой суммы с противоположными знаками.

Например, пусть требуется в выражении $a - b + c - d$ три последних слагаемых заключить в скобки сначала со знаком плюс, а затем со знаком минус перед ними:

$$a - b + c - d = a + (-b + c - d);$$

$$a - b + c - d = a - (b - c + d).$$

## Многочлен

*Многочленом* называется алгебраическая сумма конечного числа одночленов. Например,

$$a + b - c;\ 3x^2y + 2xy - 3x + 2y - 5;$$

$$a^3 + 2a^2 - 3a + 1.$$

Каждый одночлен, входящий в состав многочлена, называется его членом.

Многочлен, заданный в виде суммы попарно неподобных одночленов, называется многочленом, заданным в каноническом виде.

Пример. Привести многочлен

$$2a^3b + 3a^2b^2 - 2ab + 5a - a^3b + 2a^2b^2 + a - 3$$

к каноническому виду.

Чтобы привести многочлен к каноническому виду, нужно привести его подобные члены:

$$2a^3b + 3a^2b^2 - 2ab + 5a - a^3b + 2a^2b^2 + a - 3 =$$
$$= (2a^3b - a^3b) + (3a^2b^2 + 2a^2b^2) - 2ab + (5a + a) - 3 =$$
$$= a^3b + 5a^2b^2 - 2ab + 6a - 3.$$

Если при приведении подобных членов многочлена в результате получаются только нулевые одночлены, то такой многочлен называют *нуль-многочленом.*

Например, выражение

$$2x^3 + 3x^2y + 2y^3 - x^3 + x^2y - 2y^3 - x^3 - 4x^2y =$$
$$= (2x^3 - x^3 - x^3) + (3x^2y + x^2y - 4x^2y) + (2y^3 - 2y^3) =$$
$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

есть нуль-многочлен.

Для всякого многочлена каноническое представление единственно с точностью до порядка следования его членов.

Если многочлен, представленный в каноническом виде, содержит один член, то его называют одночленом, если два члена, то двучленом (биномом), если три члена, то трехчленом и т. д. Одночлен — частный случай многочлена.

Степенью многочлена, заданного в каноническом виде и отличного от нуль-многочлена, называется наибольшая из степеней его членов. Нуль-многочлену не приписывается никакой степени.

Например, $2a^3b^3 + 3ab^4 + 3ab^2c^2 + 3$ — многочлен 6-й степени; $x^2yz + 2x^2y - 3xz + z^2 + xz^2$ — многочлен 4-й степени.

Если все члены многочлена, заданного в каноническом виде, имеют одну и ту же степень, то такой многочлен называется однородным. Всякий одночлен также называется однородным многочленом.

Например, $2x + 3y$ — однородный многочлен 1-й степени; $x^2 - 3xy + y^2$ — однородный многочлен 2-й степени; $a^3 + 5a^2b + b^3$ — однородный многочлен 3-й степени.

При записи многочленов удобно располагать его члены по убывающим или возрастающим степеням какой-либо буквы, входящей в его члены. Эту букву называют главной. Если многочлен зависит только от одной буквы, то она является главной. Если же в состав его членов входят несколько букв, то условливаются, какую букву принять главной, а остальные считают параметрами многочлена.

Пример 1. Многочлен $2a^2 + 5a^3 - 3a + 4$ расположить: а) по убывающим степеням $a$; б) по возрастающим степеням $a$.

Решение:

а) $2a^2 + 5a^3 - 3a + 4 = 5a^3 + 2a^2 - 3a + 4.$

б) $2a^2 + 5a^3 - 3a + 4 = 4 - 3a + 2a^2 + 5a^3.$

Пример 2. Многочлен $3x^3y^3z - xyz^3 + 2x^2y^2z^2 + z^4$ расположить: а) по убывающим степеням $x$; б) по убывающим степеням $z$; в) по возрастающим степеням $y$.

Решение:

а) $3x^3y^3z - xyz^3 + 2x^2y^2z^2 + z^4 = 3y^3zx^3 + 2y^2z^2x^2 - yz^3x + z^4;$

б) $3x^3y^3z - xyz^3 + 2x^2y^2z^2 + z^4 = z^4 - xyz^3 + 2x^2y^2z^2 + 3x^3y^3z;$

в) $3x^3y^3z - xyz^3 + 2x^2y^2z^2 + z^4 = z^4 - xyz^3 + 2x^2y^2z^2 + 3x^3y^3z.$

Многочлены располагают также по возрастающим и убывающим степеням его членов. Например, многочлен $3x^3y^3z - xyz^3 + 2x^2y^2z^2 + z^4$, расположенный по убывающим степеням его членов, имеет вид $3x^3y^3z + 2x^2y^3z^2 - xyz^3 + z^4$ (два первых члена этого многочлена имеют одну и ту же степень, поэтому для их расположения следует выбрать главную букву, по которой их расположить. В данном случае это $x$). Степенью многочлена относительно его главной буквы называется показатель степени главной буквы в том члене многочлена, в котором он наибольший (если таких членов несколько, то в любом из них). Например, $3ab^2x^3 - 2a^6x + 5b$ есть многочлен 3-й степени относительно $x$.

Область существования всякого многочлена — все действительные значения букв, в него входящих.

**Условие тождественного равенства многочленов.** Два многочлена, заданные в каноническом виде, тождественно равны тогда и только тогда, когда все их члены подобны, а коэффициенты подобных членов равны.

Рассмотрим многочлен $n$-й степени одной переменной $x$:

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0. \qquad (1)$$

Необходимым и достаточным условием тождественного равенства многочлена (1) нулю является равенство нулю всех его коэффициентов.

*Необходимость.* Пусть

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \equiv 0.$$

Покажем, что все коэффициенты многочлена (1) равны нулю.

Из данного тождества при $x = 0$ получаем

$$a_0 \equiv 0;$$

так как $a_0 \equiv 0$, то

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x \equiv 0,$$

или

$$x(a_nx^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1) \equiv 0.$$

Поскольку $x \not\equiv 0$, то

$$a_nx^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \equiv 0.$$

Из этого тождества при $x = 0$ находим

$$a_1 \equiv 0,$$

и тождество принимает вид

$$a_nx^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2x \equiv 0,$$

или

$$x(a_nx^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + a_2) \equiv 0.$$

Продолжая аналогичные рассуждения $(n - 1)$ раз, придем к тождеству

$$a_nx \equiv 0;$$

отсюда $a_n \equiv 0$.

Таким образом,

$$a_n \equiv a_{n-1} \equiv \cdots \equiv a_1 \equiv a_0 \equiv 0.$$

*Достаточность.* Пусть все коэффициенты многочлена (1) равны нулю, т. е.

$$a_n \equiv a_{n-1} \equiv \cdots \equiv a_1 \equiv a_0 \equiv 0.$$

Покажем, что

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv 0.$$

Действительно, исходя из правила умножения на нуль, получаем

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv$$
$$\equiv 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \cdot x + 0 \equiv 0.$$

Таким образом, многочлен тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю.

Необходимым и достаточным условием тождественного равенства двух многочленов одной и той же переменной является равенство их коэффициентов при одинаковых степенях переменной.

Если в многочлене отсутствует член с какой-либо степенью переменной, то это означает, что коэффициент при этой степени переменной равен нулю.

*Необходимость.* Пусть

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv$$
$$\equiv b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Перенесем все члены тождества в левую часть и приведем подобные члены по $x$; тогда

$$(a_n - b_n)\, x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})\, x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)\, x + (a_0 - b_0) \equiv 0.$$

Поэтому

$$a_n - b_n \equiv 0,\ a_{n-1} - b_{n-1} \equiv 0,\ \ldots,\ a_0 - b_0 \equiv 0;$$

отсюда получаем

$$a_n \equiv b_n,\ a_{n-1} \equiv b_{n-1},\ \ldots,\ a_0 \equiv b_0.$$

*Достаточность* очевидна.

Заметим, что при доказательстве условия тождественного равенства двух многочленов можно брать многочлены различных степеней.

Два многочлена называются противоположными, если все члены одного из них противоположны членам второго, а все члены второго противоположны членам первого.

Например, $2x^2y - 3xy + y^2$ и $-2x^2y + 3xy - y^2$ — противоположные многочлены.

**Сложение многочленов.** Чтобы сложить многочлены, достаточно последовательно записать все члены с их знаками, а затем привести подобные члены.

Например, пусть требуется сложить многочлены $3ab^2 + 5ab - 2a^2b$ и $4ab^2 - 8a^2b + 3ab$.

$$(3ab^2 + 5ab - 2a^2b) + (4ab^2 - 8a^2b + 3ab) \equiv$$
$$\equiv 3ab^2 + 5ab - 2a^2b + 4ab^2 - 8a^2b + 3ab \equiv$$
$$\equiv (3ab^2 + 4ab^2) + (5ab + 3ab) + (-2a^2b - 8a^2b) \equiv 7ab^2 + 8ab - 10a^2b$$

(в дальнейшем вместо знака «$\equiv$» будем писать «$=$», где это очевидно).

Сложение многочленов основано на применении основных законов действий.

Сложение расположенных многочленов удобно выполнять по аналогии со сложением многозначных чисел, т. е. подписывать их один под другим так, чтобы подобные члены находились в одном столбце.

Например, пусть требуется сложить многочлены $3x^3 + 2x^2 - x + 5$; $2x^3 + 3x^2 - 3$ и $-4x^3 + 2x + 1$.

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 - x + 5 \\ + \quad 2x^3 + 3x^2 \quad\quad - 3 \\ -4x^3 \quad\quad + 2x + 1 \\ \hline x^3 + 5x^2 + x + 3. \end{array}$$

Множество всех многочленов замкнуто относительно действия сложения, а результат действия (сумма) однозначен, причем степень многочлена-суммы не превышает наибольшую из степеней многочленов-слагаемых.

**Вычитание многочленов.** Разностью двух многочленов называют такой третий, который в сумме с вычитаемым дает уменьшаемый многочлен.

Из этого определения разности многочленов и условия тождественного равенства двух многочленов можно вывести следующее *правило вычитания многочленов:* чтобы вычесть многочлен, достаточно прибавить многочлен, противоположный вычитаемому. Например,

$$(2a^3 + 3a^2 - 5a + 4) - (a^3 - a^2 + a + 1) =$$
$$= (2a^3 + 3a^2 - 5a + 4) + (-a^3 + a^2 - a - 1) = a^3 + 4a^2 - 6a + 3.$$

Вычитание расположенных многочленов, как и сложение, удобно выполнять в столбик. Приведенный пример удобнее записать так:

$$\begin{array}{r} 2a^3 + 3a^2 - 5a + 4 \\ - \quad -a^3 \pm a^2 \mp a \mp 1 \\ \hline a^3 + 4a^2 - 6a + 3 \end{array}$$

(у членов вычитаемого многочлена меняем знаки на противоположные, а затем многочлены складываем).

Множество всех многочленов замкнуто относительно действия вычитания, а результат действия (разность) однозначен, причем степень многочлена-разности не превышает наибольшей из степеней уменьшаемого и вычитаемого многочленов.

**Умножение многочленов.** Чтобы умножить многочлен на многочлен, достаточно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

Например, пусть требуется умножить многочлен $2a^2b + 3ab - 2b^2$ на многочлен $a^2 - a + b$.

$$(2a^2b + 3ab - 2b^2) \cdot (a^2 - a + b) = 2a^2b \cdot a^2 + 3ab \cdot a^2 -$$
$$- 2b^2 \cdot a^2 + 2a^2b\,(-a) + 3ab\,(-a) - 2b^2\,(-a) + 2a^2b \cdot b +$$
$$+ 3ab \cdot b - 2b^2 \cdot b = 2a^4b + 3a^3b - 2a^2b^2 - 2a^3b -$$
$$- 3a^2b + 2ab^2 + 2a^2b^2 + 3ab^2 - 2b^3 = 2a^4b + a^3b - 3a^2b + 5ab^2 - 2b^3.$$

Умножение расположенных многочленов удобно выполнять аналогично умножению многозначных чисел. Сопоставьте, например, умножение 211 на 122 и $2a^2 + a + 1$ на $a^2 + 2a + 2$:

$$\begin{array}{r} 211 \\ \times\ 122 \\ \hline 422 \\ +\ 422 \\ 211 \\ \hline 25\,742 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a^2 + a + 1 \\ \times\ a^2 + 2a + 2 \\ \hline 4a^2 + 2a + 2 \\ +\ 4a^3 + 2a^2 + 2a \\ 2a^4 + a^3 + a^2 \\ \hline 2a^4 + 5a^3 + 7a^2 + 4a + 2. \end{array}$$

Однако при умножении расположенных многочленов записи удобнее располагать так:

$$\begin{array}{r} 2a^2 + a + 1 \\ \times\ a^2 + 2a + 2 \\ \hline 2a^4 + a^3 + a^2 \\ 4a^3 + 2a^2 + 2a \\ 4a^2 + 2a + 2 \\ \hline 2a^4 + 5a^3 + 7a^2 + 4a + 2. \end{array}$$

Множество всех многочленов замкнуто относительно действия умножения, а результат действия (произведение) однозначен, причем степень многочлена-произведения не превышает суммы степеней умножаемых многочленов.

*Формулы сокращенного умножения.* Пользуясь правилом умножения многочленов, легко получить следующие формулы.

1. Произведение суммы двух одночленов на их разность равно разности квадратов этих одночленов, например:

$$(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2. \tag{2.16}$$

2. Квадрат суммы двух одночленов равен квадрату первого одночлена плюс удвоенное произведение первого на второй, плюс квадрат второго одночлена, например

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2. \tag{2.17}$$

Сумму $a^2 + ab + b^2$ называют неполным квадратом суммы $(a + b)$.

3. Квадрат разности двух одночленов равен квадрату первого одночлена минус удвоенное произведение первого на второй, плюс квадрат второго одночлена, например

$$(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2. \tag{2.18}$$

Алгебраическую сумму $a^2 - ab + b^2$ называют неполным квадратом разности $(a - b)$.

4. Куб суммы двух одночленов равен кубу первого одночлена плюс утроенное произведение квадрата первого одночлена на второй, плюс утроенное произведение первого на квадрат второго, плюс куб второго одночлена, например

$$(a + b)^3 \equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \tag{2.19}$$

5. Куб разности двух одночленов равен кубу первого одночлена минус утроенное произведение квадрата первого одночлена на второй,

плюс утроенное произведение первого на квадрат второго, минус куб второго одночлена, например

$$(a-b)^3 \equiv a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \qquad (2.20)$$

6. Произведение суммы двух одночленов на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих одночленов, например:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) \equiv a^3 + b^3. \qquad (2.21)$$

7. Произведение разности двух одночленов на неполный квадрат их суммы равно разности кубов этих одночленов, например:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) \equiv a^3 - b^3. \qquad (2.22)$$

8. Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов плюс удвоенное произведение каждого предыдущего члена на все последующие. Например:

$$(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc; \qquad (2.23)$$

$$(a+b+c+d)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd. \qquad (2.24)$$

Формулы (2.16)—(2.24) остаются верными, если вместо одночленов $a$, $b$, $c$, $d$ подставить любые выражения.

**Деление многочленов** на одночлены и многочлены производится по следующим правилам.

1. Чтобы разделить многочлен на одночлен, достаточно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и результаты сложить (деление каждого члена многочлена на одночлен предполагается выполнимым). Например,

$$(8a^4b^3 + 6a^3b^2 - 2a^2b) : 2ab = 4a^3b^2 + 3a^2b - a.$$

Правило деления многочлена на одночлен есть следствие распределительного закона умножения относительно сложения.

2. Деление многочлена на многочлен не всегда выполнимо без остатка. Рассмотрим сначала деление расположенных многочленов, зависящих от одной буквы.

Многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ при $a_n \neq 0$ называют многочленом $n$-й степени относительно $x$.

Числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ называют коэффициентами этого многочлена, $n$ — его степенью ($n$ — натуральное число), $a_n x^n$ — старшим членом, $a_0$ — свободным членом.

*Частным от деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ называется такой многочлен $S_{n-m}(x)$ (если он существует), который в произведении с многочленом-делителем $Q_m(x)$ дает многочлен-делимое $P_n(x)$, т. е. $P_n(x) : Q_m(x) \equiv S_{n-m}$, если $Q_m(x) \cdot S_{n-m}(x) \equiv P_n(x)$.*

Деление многочленов возможно, если степень многочлена-делимого $P_n(x)$ не меньше степени многочлена-делителя $Q_m(x)$, т. е. $n \geqslant m$.

Деление многочленов выполняется аналогично делению многозначных чисел. При делении многочлена на многочлен делят старший член многочлена-делимого на старший член многочлена-делителя, а затем частное от деления этих старших членов, которое будет старшим членом многочлена-частного, умножают на многочлен-делитель и это произведение вычитают из многочлена-делимого; затем получен-

ную разность (первый остаток) снова аналогичным образом делят на многочлен-делитель и находят второй член многочлена-частного. Этот процесс продолжают до тех пор, пока деление не закончится или степень остатка будет меньшей степени многочлена-делителя (т. е. многочлен-делимое на многочлен-делитель без остатка не делится).

Например:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + x^3 - 10x^2 - 7x + 2 & x^2 + 3x + 2 \\ \hline -2x^4 \mp 6x^3 \mp 4x^3 & 2x^2 - 5x + 1, \\ \hline -5x^3 - 14x^2 - 7x & \\ \pm 5x^3 \pm 15x^2 \pm 10x & \\ \hline x^2 + 3x + 2 & \\ x^2 + 3x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

т. е. $(2x^4 + x^3 - 10x^2 - 7x + 2) : (x^2 + 3x + 2) = 2x^2 - 5x + 1$.

Если многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $Q_m(x)$ без остатка, то говорят, что многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $Q_m(x)$ нацело и $P_n(x)$ называют кратным $Q_m(x)$, а $Q_m(x)$ — делителем $P_n(x)$.

*Разделить многочлен $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ $(m \leqslant n)$ значит найти два таких многочлена $S_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, чтобы $P_n(x) \equiv Q_m(x) S_{n-m}(x) + R_k(x)$ и степень многочлена $R_k(x)$ была меньше степени делителя $Q_m(x)$, т. е. $k < m$. При этом многочлен $S_{n-m}(x)$ называют частным, а многочлен $R_k(x)$ — остатком.*

Можно показать, что для любых двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ $(m < n$ и $Q_m(x) \neq 0)$ всегда найдется, и притом единственная, пара многочленов $S_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, удовлетворяющая тождеству

$$P_n(x) \equiv Q_m(x) S_{n-m}(x) + R_k(x) \quad (k < m),$$

т. е. если делитель не нуль-многочлен, действие деления многочленов всегда выполнимо в множестве многочленов, а частное и остаток определяются однозначно.

Пример. Разделить многочлен $P_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ на двучлен $Q_1(x) = x + 2$.

Решение. Частное и остаток будем соответственно искать в виде

$$S_2(x) = Ax^2 + Bx + C \text{ и } R_0(x) = D.$$

По определению деления многочленов с остатком должно быть

$$P_3(x) \equiv Q_1(x) \cdot S_2(x) + R_0(x)$$

или в данном случае

$$2x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \equiv (x + 2)(Ax^2 + Bx + C) + D.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$2x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \equiv Ax^3 + (B + 2A)x^2 + (C + 2B)x + (D + 2C).$$

Так как два многочлена тождественно равны, если их коэффициенты при одинаковых степенях переменной $x$ равны, то

$$\begin{cases} A = 2, \\ B + 2A = 3, \\ C + 2B = -3, \\ D + 2C = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$A = 2,\ B = -1,\ C = -1 \text{ и } D = 3.$$

Следовательно,

$$S_2(x) = 2x^2 - x - 1, \quad R_0(x) = 3$$

$$\text{и } 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \equiv (x + 2)(2x^2 - x - 1) + 3,$$

или

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{x + 2} \equiv 2x^2 - x - 1 + \frac{3}{x + 2}.$$

Однако на практике деление многочленов выполняют аналогично делению многозначных чисел. Например, деление рассмотренных многочленов выполняют следующим образом:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1 & x + 2 \\ \underline{-2x^3 \mp 4x^2} & \\ -x^2 - 3x & 2x^2 - x - 1. \\ \underline{\pm x^2 \pm 2x} & \\ -x + 1 & \\ \underline{\pm x \pm 2} & \\ 3 & \end{array}$$

Тогда, по определению, $2x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \equiv (x + 2)(2x^2 - x - 1) + 3$, т. е. многочлен-делитель тождественно равен многочлену-делимому, умноженному на многочлен-частное, плюс многочлен-остаток.

Следует отметить, что при делении многочленов без остатка их можно располагать как по убывающим, так и по возрастающим степеням относительно главной буквы. При делении с остатком многочлены надо располагать только по убывающим степеням, так как при их расположении по возрастающим степеням деление будет продолжаться бесконечно.

Если многочлены зависят от нескольких букв, то деление этих многочленов с остатком не определяется однозначно, т. е. многочлен-частное и многочлен-остаток будут зависеть от того, по какой букве, как по главной, расположены многочлены.

Например, пусть требуется разделить многочлен $2a^3 + 3a^2b - 2ab^2 + 6b^3$ на многочлен $a^2 - 2ab + b^2$ (оба многочлена расположены по убывающим степеням буквы $a$):

$$\begin{array}{r|l} 2a^3 + 3a^2b - 2ab^2 + 6b^3 & a^2 - 2ab + b^2 \\ \underline{-2a^3 \pm 4a^2b \mp 2ab^2} & \\ 7a^2b - 4ab^2 + 6b^3 & 2a + 7b, \\ \underline{-7a^2b \pm 14ab^2 \mp 7b^3} & \\ 10ab^2 - b^3 & \end{array}$$

т. е. в частном получили многочлен $S = 2a + 7b$, а в остатке многочлен $R = 10ab^2 - b^3$.

Расположим данные многочлены по убывающим степеням буквы $b$ и разделим их:

$$\begin{array}{r|l} 6b^3 - 2ab^2 + 3a^2b + 2a^3 & b^2 - 2ab + a^2 \\ \underline{-6b^3 \pm 12ab^2 \mp 6a^2b} & \underline{\phantom{b^2 - 2ab + a^2}} \\ -10ab^2 - 3a^2b + 2a^3 & 6b + 10a, \\ \underline{-10ab^2 \pm 20a^2b \mp 10a^3} & \\ 17a^2b - 7a^3 & \end{array}$$

т. е. в частном получится многочлен $S_1 = 6b + 10a$, а в остатке многочлен $R_1 = 17a^2b - 7a^3$. В результате получаем

$$2a^3 + 3a^2b - 2ab^2 + 6b^3 \equiv (a^2 - 2ab + b^2)(2a + 7b) + 10ab^2 - b^3 \equiv$$
$$\equiv (a^2 - 2ab + b^2)(6b + 10a) + 17a^2b - 7a^3,$$

т. е. деление многочленов с остатком в случае, если они зависят от нескольких букв, не однозначно определяется, а зависит от выбора главной буквы.

### § 3. Разложение многочленов на множители

**Вынесение общего множителя за скобки** основано на применении распределительного закона действий. Данный многочлен заменяют произведением общего (чаще всего наибольшего) делителя всех его членов на частное, полученное от деления многочлена на этот делитель; последний называют множителем, выносимым за скобки.

Например:

$$3a^2b - 2abc + ab^2c^2 = ab(3a - 2c + bc^2);$$
$$x(x + y - z) + y(x + y - z) - z(x + y - z) =$$
$$= (x + y - z)(x + y - z) = (x + y - z)^2.$$

**Способ группировки** основан на применении основных законов действий. Многочлен располагают по группам одночленов, имеющих общий множитель, выносимый за скобки.

Например, предлагается разложить на множители многочлены:

1. $ax - ay + bx - by$.

Все члены многочлена общего множителя не имеют. Сгруппируем их попарно первый со вторым и третий с четвертым:

$$(ax - ay) + (bx - by);$$

из каждой группы вынесем за скобки их общие множители:

$$a(x - y) + b(x - y);$$

вынесем за скобки общий множитель $(x - y)$ полученных произведений:

$$(x - y)(a + b).$$

Итак,

$$ax - ay + bx - by = a(x - y) + b(x - y) = (x - y)(a + b).$$

2. $a^2 - 8a + 12$.

Разобьем второй член на сумму двух слагаемых $-8a = -2a - 6a$; тогда

$$a^2 - 8a + 12 = a^2 - 2a - 6a + 12 = a(a - 2) - 6(a - 2) =$$
$$= (a - 2)(a - 6).$$

3. $x^3+9x^2+26x+24=x^3+2x^2+7x^2+14x+12x+24=$ $=x^2(x+2)+7x(x+2)+12(x+2)=(x+2)(x^2+7x+12)=(x+$ $+2)(x^2+3x+4x+12)=(x+2)[x(x+3)+4(x+3)]=(x+2)(x+$ $+3)(x+4)$.

4. $9a^3-13a+6=9a^3-4a-9a+6=a(9a^2-4)-3(3a-2)=$ $=a(3a+2)(3a-2)-3(3a-2)=(3a-2)(3a^2+2a-3)$.

**Разложение на множители по формулам сокращенного умножения.** Если многочлен имеет форму правой части какой-либо из формул сокращенного умножения (2.16)—(2.24), то его разложение на множители записывается по этой формуле.

Например:

1. $(a+2b)^2-4c^2=[(a+2b)+2c]\cdot[(a+2b)-2c]=(a+2b+$ $+2c)(a+2b-2c)$. Используется формула $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

2. $8a^3-27b^3=(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$. Используется формула $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

3. $x^2-6x+9=(x-3)^2$. Используется формула $a^2-2ab+b^2=$ $=(a-b)^2$.

4. $a^3+6a^2+12a+8=(a+2)^3$. Используется формула $a^3+$ $+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$.

Чтобы воспользоваться формулой разложения разности квадратов на множители, часто пользуются преобразованием выделения полного квадрата. Это преобразование заключается в дополнении некоторой группы членов многочлена до квадрата двучлена (или многочлена).

Например:

1. $a^2+10a+21=a^2+2\cdot a\cdot 5+5^2-4=(a+5)^2-2^2=(a+$ $+5+2)(a+5-2)=(a+7)(a+3)$.

2. $a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=$ $=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$.

3. $x^8+x^4+1=x^8+2x^4+1-x^4=(x^4+1)^2-(x^2)^2=(x^4+1+$ $+x^2)(x^4+1-x^2)=[(x^4+2x^2+1)-x^2](x^4-x^2+1)=[(x^2+1)^2-$ $-x^2](x^4-x^2+1)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

4. $(a^2+a+4)^2+8a(a^2+a+4)+15a^2=[(a^2+a+4)^2+8a(a^2+$ $+a+4)+16a^2]-a^2=(a^2+a+4+4a)^2-a^2=(a^2+6a+4)(a^2+$ $+4a+4)=(a^2+6a+4)(a+2)^2$.

При разложении многочленов на множители пользуются, как правило, всеми способами, применяя их в различной последовательности. Навыки в разложении многочленов на множители приобретаются при выполнении достаточного числа разнообразных упражнений.

Рассмотрим несколько примеров на применение различных способов разложения многочленов на множители.

1. $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b+c)^3=[(a+$ $+b+c)^3-(a+b-c)^3]-[(a-b+c)^3+(-a+b+c)^3]=2c[(a+b+$ $+c)^2+(a+b+c)(a+b-c)+(a+b-c)^2]-2c[(a-b+c)^2-$ $-(a-b+c)(-a+b+c)+(-a+b+c)^2]=2c[3(a+b)^2+c^2]-$ $-2c[3(a-b)^2+c^2]=2c[3(a+b)^2-3(a-b)^2]=24abc$.

2. $2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-(a^4+b^4+c^4)=4a^2b^2-(2a^2b^2+2a^2c^2-$ $-2b^2c^2+a^4+b^4+c^4)=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2=(2ab-a^2-b^2+c^2)\times$ $\times(2ab+a^2+b^2-c^2)=[c^2-(a-b)^2][(a+b)^2-c^2]=(a+b+c)(a+$ $+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

3. $4x^2y^2(2x+y)+4x^2z^2(z-y)-4x^2z^2(2x+z)=4x^2[y^2(2x+y)+$ $+z^2(z-y)-z^2(2x+z)]=4x^2[y^2(2x+y)-z^2(2x+y)]=4x^2(2x+y)\times$ $\times(y+z)(y-z)$.

Многочлен называется приводимым над данным множеством чисел тогда и только тогда, когда его можно представить в виде двух или нескольких многочленов не нулевой степени с коэффициентами из этого же множества чисел.

Например, многочлен $x^3 + x^2 - 2x - 2$ над множеством целых чисел является приводимым, так как его можно представить в виде

$$x^3 + x^2 - 2x - 2 \equiv (x + 1)(x^2 - 2).$$

Этот же многочлен является приводимым и над множеством действительных чисел, так как

$$x^3 + x^2 - 2x - 2 \equiv (x + 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Многочлен называется неприводимым (не раскладывающимся на множители) над данным множеством чисел, если его нельзя представить в виде произведения многочленов не ниже первой степени с коэффициентами из заданного множества чисел.

Например, многочлен $a^2 - 2$ не приводится над множеством рациональных чисел, но является приводимым над множеством действительных чисел: $a^2 - 2 = (a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2})$. В множестве многочленов неприводимые многочлены играют роль простых чисел в множестве целых.

Рассмотрим несколько упражнений на многочлены.

Пример 1. При каких значениях $a$ и $b$ многочлен $P_4(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + 4x + b$ делится без остатка на трехчлен $Q_2(x) = x^2 + 2x + 2$?

Решение. Разделим многочлен $P_4(x)$ на квадратный трехчлен $Q_2(x)$:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 + ax^2 + 4x + b & x^2 + 2x + 2 \\
\hline
x^4 + 2x^3 + 2x^2 & x^2 - x + a \\
\hline
-x^3 + (a-2)x^2 + 4x & \\
-x^3 - 2x^2 - 2x & \\
\hline
ax^2 + 6x + b & \\
ax^2 + 2ax + 2a & \\
\hline
(6 - 2a)x + (b - 2a) &
\end{array}$$

Частное от деления $S_2(x) = x^2 - x + a$, а остаток $R_1(x) = (6 - 2a)x + (b - 2a)$.

Если остаток $R_1(x) \equiv 0$, то деление выполнится без остатка.

Из тождества

$$(6 - 2a)x + (b - 2a) \equiv 0,$$

учитывая условие тождественного равенства многочлена нулю, имеем

$$\begin{cases} 6 - 2a \equiv 0, \\ b - 2a \equiv 0; \end{cases}$$

отсюда $a = 3$, $b = 6$.

Ответ. $a = 3$, $b = 6$.

Пример 2. При каком значении $a$ многочлен $P_5(x) = x^5 + 32$ делится без остатка на двучлен $Q_1(x) = x + a$? Найти частное от деления при этом значении $a$.

Решение. Разделим

$$\begin{array}{r|l}
x^5+32 & x+a \\
\hline
-\,x^5+ax^4 & x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4. \\
\hline
-\,ax^4 & \\
-\,ax^4-a^2x^3 & \\
\hline
a^2x^3 & \\
-\,a^2x^3+a^3x^2 & \\
\hline
-\,a^3x^2 & \\
-\,a^3x^2-a^4x & \\
\hline
a^4x+32 & \\
-\,a^4x+a^5 & \\
\hline
-a^5+32 &
\end{array}$$

Частное $S_4(x) = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$, а остаток $R_0(x) = -a^5 + 32$.

Число $a$ найдем, приравняв остаток от деления к нулю:

$$-a^5 + 32 \equiv 0;$$

отсюда $a = 2$.

При $a = 2$ находим частное

$$S_4(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16.$$

Ответ. $a = 2$, а частное $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$.

Пример 3. При каких значениях $a$ и $b$ многочлен $P_4(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + ax + 4$ делится без остатка на трехчлен $Q_2(x) = x^2 - x + b$?

Решение. Разделив $P_4(x)$ на $Q_2(x)$, как это делалось в предыдущих примерах, получим остаток

$$R_1(x) = (a - 3b + 5)x + (b^2 - 5b + 4).$$

Искомые числа $a$ и $b$ найдем из тождества

$$(a - 3b + 5)x + (b^2 - 5b + 4) \equiv 0$$

или

$$\begin{cases} a - 3b + 5 \equiv 0, \\ b^2 - 5b + 4 \equiv 0; \end{cases}$$

отсюда

$$\begin{cases} a_1 = -2, \\ b_1 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = 7, \\ b_2 = 4. \end{cases}$$

Ответ.

$$\begin{cases} a_1 = -2, \\ b_1 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = 7, \\ b_2 = 4. \end{cases}$$

## § 4. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное нескольких многочленов

Если каждый из нескольких многочленов делится без остатка на некоторый многочлен, то этот многочлен называется общим делителем данных многочленов.

*Наибольшим общим делителем (НОД) двух или нескольких многочленов* называется их общий делитель наивысшей степени.

Нахождение НОД многочленов производится аналогично нахождению НОД чисел. Чтобы найти НОД нескольких многочленов, достаточно каждый многочлен разложить на неприводимые множители и найти произведение общих множителей для всех данных многочленов.

Пример 1. Найти НОД многочленов $a^3 + 3a^2 + 4a + 12$ и $a^3 + 4a^2 + 4a + 3$.

Раскладываем эти многочлены на множители:

$$a^3 + 3a^2 + 4a + 12 = (a + 3)(a^2 + 4),$$

$$a^3 + 4a^2 + 4a + 3 = (a + 3)(a^2 + a + 1).$$

Выписывая общие множители из разложений этих многочленов, находим

$$\text{НОД} = a + 3.$$

Пример 2. Найти НОД многочленов $P = (x + 1)^2 (x - 2)^3 \times (x^2 + x + 1)$, $Q = (x + 1)(x - 2)^2 (x^2 + x + 1)^2$ и $R = (x + 1) \times (x - 1)(x - 2)^3 (x^2 + x + 1)$, разложенных на множители.

Выписываем общие для всех многочленов множители в наивысших степенях и перемножаем их:

$$\text{НОД} = (x + 1)(x - 2)^2 (x^2 + x + 1) \equiv$$
$$\equiv x^5 - 2x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x + 4.$$

Если разложение многочленов на множители затруднительно, то для нахождения НОД двух многочленов пользуются алгоритмом Евклида. По этому алгоритму, как и при нахождении НОД двух чисел, один многочлен делят на другой; если деление выполнилось без остатка, то второй многочлен является НОД двух данных многочленов. Если же при этом делении получен остаток, то второй многочлен делят на этот остаток; если при этом деление выполнилось без остатка, то первый остаток есть НОД данных многочленов. Если получен второй остаток, то первый остаток делят на второй, и если деление выполнилось без остатка, то второй остаток является НОД данных многочленов; если получен остаток, то деление продолжают до его выполнения без остатка. Делитель последнего деления и будет искомым НОД.

Такое последовательное деление после конечного числа делений (не превышающего большую из степеней данных многочленов) всегда выполнится без остатка. Если при этом в результате получится число (многочлен нулевой степени), то многочлены называют взаимно простыми (любой многочлен делится на любое число, отличное от нуля).

Пример. Найти НОД многочленов $x^4 - x^3 - 6x^2 + 10x - 4$ и $x^3 + 5x^2 + 4x - 6$.

Делим первый многочлен на второй:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 - 6x^2 + 10x - 4 & x^3 + 5x^2 + 4x - 6 \\ \underline{-x^4 \mp 5x^3 \mp 4x^2 \pm 6x} & \\ -6x^3 - 10x^2 + 16x - 4 & x - 6. \\ \underline{\pm 6x^3 \pm 30x^2 \pm 24x \mp 36} & \\ 20x^2 + 40x - 40 & \end{array}$$

Первый остаток равен $20x^2 + 40x - 40$.

Делим второй многочлен на первый остаток:

$$\begin{array}{r|l} x^3+5x^2+4x-6 & 20x^2+40x-40 \\ \hline -x^3\mp 2x^2\pm 2x & \frac{1}{20}x+\frac{3}{20}. \\ \hline 3x^2+6x-6 & \\ -3x^2\mp 6x\pm 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Таким образом, $20x^2+40x-40$ является НОД данных многочленов. Так как всякий многочлен делится на любое число (отличное от нуля), то НОД этих многочленов можно взять $x^2+2x-2$ (числовой множитель 20 можно отбросить), т. е.

$$\text{НОД}\,(x^4-x^3-6x^2+10x-4;\quad x^3+5x^2+4x-6)=x^2+2x-2.$$

Если с помощью алгоритма Евклида надо найти НОД нескольких многочленов, то можно найти НОД первых двух многочленов, а затем НОД третьего многочлена и первых двух и т. д.

**Наименьшее общее кратное.** Многочлен, который делится без остатка на каждый из данных многочленов, называется кратным этих многочленов. Очевидно, кратных многочленов для нескольких данных многочленов существует бесконечное множество.

Многочлен наименьшей степени, делящийся без остатка на каждый из данных многочленов, называется *наименьшим общим кратным* (НОК) данных многочленов.

Наименьшее общее кратное многочленов находят аналогично нахождению НОК многозначных чисел.

Чтобы найти НОК нескольких многочленов, можно каждый многочлен разложить на неприводимые множители, а затем выписать все множители из первого многочлена и к ним дописать из остальных многочленов множители, отсутствующие в разложении первого многочлена. Произведение всех выписанных множителей и будет НОК данных многочленов.

Пример 1. Найти НОК одночленов $2a^2b$, $12ab^2c$ и $6a^3bc$.

Решение. Выписываем из первого одночлена все буквенные множители, т. е. $a^2b$; из второго одночлена надо к ним дописать $bc$, а из третьего $a$.

Тогда НОК $(2a^2b,\ 12ab^2c,\ 6a^3bc)=a^2b\cdot bc\cdot a=a^3b^2c$.

Это кратное при делении на первый одночлен дает $\frac{1}{2}abc$, при делении на второй $\frac{1}{12}a^2$, при делении на третий $\frac{1}{6}b$. Так как числовой множитель не влияет на делимость многочленов, то НОК также являются $2a^3b^2c$, $8a^3b^2c$, $24a^3b^2c$ и т. д. Если бы в условии требовалось, чтобы кратное при делении на данные одночлены давало одночлены с целыми коэффициентами, то надо было бы находить еще НОК коэффициентов 2, 12 и 6. Тогда НОК данных одночленов было бы равно $12a^3b^2c$.

Пример 2. Найти НОК многочленов $a^2+ab-2b^2$, $a^2+4ab+3b^2$ и $a^3+2a^2b-ab^2-2b^3$.

Решение. Разложим данные многочлены на множители:

$$a^2+ab-2b^2\equiv(a-b)(a+2b);$$
$$a^2+4ab+3b^2\equiv(a+b)(a+3b);$$
$$a^3+2a^2b-ab^2-2b^3\equiv(a+b)(a-b)(a+2b).$$

Тогда НОК $= (a+b)(a-b)(a+2b)(a+3b) \equiv a^4+5a^3b+5a^2b^2-5ab^3-6b^4$.

Ответ. НОК $= a^4+5a^3b+5a^2b^2-5ab^3-6b^4$.

*Некоторые свойства НОД:*

а) частные от деления данных многочленов на их НОД есть взаимно простые многочлены;

б) если умножить каждый из данных многочленов на один и тот же многочлен, то и их НОД умножится на этот многочлен;

в) всякий общий делитель данных многочленов есть делитель их НОД;

г) всякий делитель НОД данных многочленов есть общий делитель этих многочленов.

*Некоторые свойства НОК:*

а) частные от деления НОК данных многочленов на эти многочлены есть взаимно простые многочлены;

б) если каждый из данных многочленов умножить на один и тот же многочлен, то и их НОК умножится на этот многочлен;

в) если некоторый из данных многочленов делится на все остальные, то он есть НОК для данных многочленов;

г) если данные многочлены взаимно простые, то их НОК равно произведению этих многочленов.

Между НОД и НОК многочленов существует такая же связь, как и между НОД и НОК чисел.

Пусть $P$ и $Q$ — многочлены, $D =$ НОД $(P; Q)$, $m =$ НОК $(P; Q)$. Тогда

$$m = \frac{P \cdot Q}{D}; \tag{2.25}$$

$$D = \frac{P \cdot Q}{m}. \tag{2.26}$$

## § 5. Дробные рациональные выражения

### Алгебраические дроби

Отношение двух многочленов $P$ и $Q$ называется *алгебраической или рациональной дробью.*

Многочлен $P$ называется числителем, а многочлен $Q$ — знаменателем алгебраической дроби.

Например:

$$\frac{a}{b+c};\quad \frac{x^2+3x-1}{x^3+5};\quad \frac{x^2+y}{x+y};\quad \frac{1}{a};\quad \frac{3a^2b}{a+b}$$

Областью существования алгебраической дроби в рассматриваемом множестве чисел является совокупность систем численных значений букв, при которых знаменатель не обращается в нуль.

Например, дробь $\frac{3a^2+b^2}{3a-2}$ в множестве целых чисел определена при всех значениях $a$, а в множестве рациональных (или действительных) чисел при всех $a \neq \frac{2}{3}$; дробь $\frac{x^2+2y^2}{x-y}$ определена при $x \neq y$ в множестве целых, рациональных и действительных чисел.

**Условие тождественного равенства двух алгебраических дробей.** Две алгебраические дроби $\frac{P}{Q}$ и $\frac{R}{S}$ ($P$, $Q$, $R$ и $S$ — многочлены) тождественно равны (в общей области их существования), т. е. $\frac{P}{Q} \equiv \frac{R}{S}$, тогда и только тогда, когда имеет место тождество $P \cdot S \equiv Q \cdot R$.

Пример. Доказать, что дроби $\frac{ab+a^2}{a^3+a^2}$ и $\frac{a+b}{a^2+a}$ при $a \neq 0$ и $a \neq -1$ тождественно равны.

По определению, $\frac{ab+a^2}{a^3+a^2} \equiv \frac{a+b}{a^2+a}$, если $(ab+a^2)(a^2+a) \equiv (a^3+a^2)(a+b)$; перемножая многочлены в левой и правой части, получим

$$a^4+a^3+a^3b+a^2b \equiv a^4+a^3+a^3b+a^2b.$$

Следовательно, $(ab+a^2)(a^2+a) \equiv (a^3+a^2)(a+b)$ и

$$\frac{ab+a^2}{a^3+a^2} \equiv \frac{a+b}{a^2+a} \quad (a \neq 0,\ a \neq -1).$$

**Основное свойство алгебраической дроби.** Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить (разделить) на многочлен, отличный от нуль-многочлена, то получим дробь, тождественно равную данной.

Действительно, пусть дана дробь $\frac{P}{Q}$ и многочлен $R \neq 0$; покажем, что $\frac{P}{Q} \equiv \frac{PR}{QR}$.

По условию тождественного равенства двух дробей, должно быть $P(QR) \equiv Q(PR)$, что выполняется, так как $P(QR) \equiv PQR \equiv QPR \equiv Q(PR)$.

Следовательно, $\frac{P}{Q} \equiv \frac{PR}{QR}$.

Пусть дана дробь $\frac{PR}{QR}$, числитель и знаменатель которой имеют общий множитель $R \neq 0$; тогда

$$\frac{PR}{QR} \equiv \frac{P}{Q}.$$

Деление числителя и знаменателя дроби на их общий множитель называют *сокращением* дроби.

Чтобы сократить дробь, достаточно числитель и знаменатель дроби разложить на неприводимые множители и разделить их на произведение общих множителей.

Например:

$$\frac{2a^2b}{a^3b^2c} = \frac{2(a^2b)}{abc(a^2b)} = \frac{2}{abc};$$

$$\frac{a^3+a^2c-ab^2-b^2c}{a^3+a^2b-ac^2-c^2b} = \frac{(a-b)(a+b)(a+c)}{(a-c)(a+b)(a+c)} = \frac{a-b}{a-c}.$$

Заметим, что при умножении числителя и знаменателя дроби на многочлен $R$ область существования полученной дроби по сравнению с областью существования данной дроби сузилась на те системы численных значений букв, при которых $R = 0$, а при сокращении дроби область существования вновь полученной дроби расширилась на те значения букв, при которых $R = 0$.

*Если числитель и знаменатель алгебраической дроби не имеют общего множителя, то дробь называется несократимой.*

Числитель и знаменатель несократимой алгебраической дроби — взаимно простые многочлены.

Для любой алгебраической дроби существует единственная, тождественно равная ей несократимая дробь.

**Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю.** Чтобы привести алгебраические дроби к общему знаменателю, достаточно найти НОК знаменателей данных дробей и взять его знаменателем каждой дроби, а числители данных дробей соответственно домножить на частные от деления НОК на знаменатели данных дробей (дополнительные множители).

Пример. Привести к общему знаменателю дроби

$$\frac{x+1}{x^2-6x+5};\quad \frac{2x}{x^3-6x^2+11x-6};\quad \frac{1}{x^2-3x+2}.$$

Найдем НОК знаменателей этих дробей, предварительно разложив знаменатели на неприводимые множители:

$$x^2-6x+5=(x-1)(x-5),$$
$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3),$$
$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2);$$
$$\text{НОК}=(x-1)(x-5)(x-2)(x-3).$$

Найдем дополнительные множители к числителям каждой из дробей:

$$[(x-1)(x-5)(x-2)(x-3)]:[(x-1)(x-5)]=(x-2)(x-3);$$
$$[(x-1)(x-5)(x-2)(x-3)]:[(x-1)(x-2)(x-3)]=x-5;$$
$$[(x-1)(x-5)(x-2)(x-3)]:[(x-1)(x-2)]=(x-5)(x-3).$$

Следовательно,

$$\frac{x+1}{x^2-6x+5}=\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}=$$
$$=\frac{x^3-4x^2+x+6}{x^4-11x^3+41x^2-61x+30};$$
$$\frac{2x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{2x(x-5)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}=$$
$$=\frac{2x^2-10x}{x^4-11x^3+41x^2-61x+30};$$
$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}=$$
$$=\frac{x^2-8x+15}{x^4-11x^3+41x^2-61x+30}.$$

**Сложение и вычитание алгебраических дробей.** Чтобы сложить (вычесть) алгебраические дроби, достаточно привести их к общему знаменателю (если они различны), сложить (вычесть) числители и полученную сумму (разность) разделить на общий знаменатель. Правило сложения (вычитания) алгебраических дробей можно записать в виде формулы

$$\frac{P}{Q} \pm \frac{R}{S} = \frac{PS \pm QR}{QS}. \tag{2.27}$$

В этой формуле знаменатель дроби результата в общем случае не является НОК знаменателей дробей, которые складываются (вычитаются). Читателю предлагается доказать, что это не противоречит правилу сложения (вычитания) дробей.

Пример. Сложить дроби

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

НОК знаменателей данных дробей равно $(a-b)(a-c)(b-c)$, поэтому

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{ab(a-b) - c(a^2-b^2) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(a-b)[ab - c(a+b) + c^2]}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{ab - ac - bc + c^2}{(a-c)(b-c)} = \frac{a(b-c) - c(b-c)}{(a-c)(b-c)} = \frac{(b-c)(a-c)}{(a-c)(b-c)} = 1.$$

Так как ответ при сложении и вычитании алгебраических дробей желательно представлять в виде несократимой дроби, то удобно общий знаменатель записывать в виде произведения, а числитель попытаться разложить на множители и, если возможно, сократить дробь.

**Умножение алгебраических дробей.** Произведение нескольких дробей равно дроби, у которой числитель равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению знаменателей данных дробей, например

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}. \tag{2.28}$$

Пример. Перемножить дроби

$$\frac{a^2 + 3ab + 2b^2}{a^2 + 2ab - 3b^2} \text{ и } \frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{a^2 - 2ab - 3b^2}.$$

$$\frac{a^2 + 3ab + 2b^2}{a^2 + 2ab - 3b^2} \cdot \frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{a^2 - 2ab - 3b^2} = \frac{(a^2 + 3ab + 2b^2)(a^2 - 3ab + 2b^2)}{(a^2 + 2ab - 3b^2)(a^2 - 2ab - 3b^2)} =$$

$$= \frac{(a+b)(a+2b)(a-b)(a-2b)}{(a-b)(a+3b)(a+b)(a-3b)} = \frac{(a+2b)(a-2b)}{(a+3b)(a-3b)} = \frac{a^2 - 4b^2}{a^2 - 9b^2}.$$

Два алгебраических выражения называются взаимно обратными, если их произведение равно 1. Например, $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$; $\frac{P}{Q}$ и $\frac{Q}{P}$.

**Деление алгебраических дробей.** Чтобы разделить одну дробь на другую, достаточно первую умножить на дробь, обратную второй. Правило деления можно записать в виде формулы.

$$\frac{P}{Q} : \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{R} = \frac{PS}{QR}. \tag{2.29}$$

Пример. Выполнить деление

$$\frac{ax^2 - ay^2}{bxy} : \frac{x+y}{ax^2}.$$

Решение. $\frac{ax^2 - ay^2}{bxy} : \frac{x+y}{ax^2} = \frac{ax^2 - ay^2}{bxy} \cdot \frac{ax^2}{x+y} =$

$$= \frac{(ax^2 - ay^2)\, ax^2}{bxy\,(x+y)} = \frac{a^2x^2\,(x-y)\,(x+y)}{bxy\,(x+y)} = \frac{a^2x\,(x-y)}{by} = \frac{a^2x^2 - a^2xy}{by}.$$

**Выделение целой части неправильной рациональной дроби.** Выражение $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — расположенные многочлены относительно $x$:

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$
$$Q_m(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0,$$

есть рациональная дробь.

Если $n \geqslant m$, то дробь называется неправильной, а если $n < m$ — правильной. Например, дроби $\frac{x+1}{x^2+2x+2}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{5x^2}{x^3+1}$ — правильные, а дроби $\frac{x}{x+10}$, $\frac{x^3+1}{x^2+8x+5}$, $\frac{x^5+1}{x}$ — неправильные.

Пусть при делении многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ получим в частном многочлен $S_{n-m}(x)$, а в остатке многочлен $R_k(x)$ $(k < m)$; тогда

$$P_n(x) = Q_m(x) \cdot S_{n-m}(x) + R_k(x).$$

Разделив обе части этого равенства на многочлен $Q_m(x)$, получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

где $S_{n-m}(x)$ — многочлен, а $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ — правильная алгебраическая дробь. Многочлен $S_{n-m}(x)$ называют целой частью дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Пример. Выделить целую часть дроби $\frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x^2 + 2x + 3}$.

Решение. Разделим числитель на знаменатель этой дроби:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^3 + 1 & x^2 + 2x + 3 \\ \underline{x^4 + 2x^3 + 3x^2} & \overline{x^2 - 3,} \\ -3x^2 + 1 & \\ \underline{-3x^2 - 6x - 9} & \\ 6x + 10 & \end{array}$$

т. е. $x^4 + 2x^3 + 1 = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 3) + 6x + 10$.

Следовательно,

$$\frac{x^4+2x^3+1}{x^2+2x+3}=x^2-3+\frac{6x+10}{x^2+2x+3},$$

где $x^2-3$ — целая часть дроби $\frac{x^4+2x^3+1}{x^2+2x+3}$.

**Основные законы действий над алгебраическими дробями.**

Множество рациональных алгебраических дробей замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления, за исключением деления на нуль-многочлен, а результаты этих действий однозначны.

Действия над рациональными алгебраическими дробями подчиняются следующим законам:

а) переместительному закону сложения: $\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}\equiv\frac{R}{S}+\frac{P}{Q}$;

б) сочетательному закону сложения:

$$\left(\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}\right)+\frac{T}{U}\equiv\frac{P}{Q}+\left(\frac{P}{S}+\frac{T}{U}\right);$$

в) переместительному закону умножения:

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}\equiv\frac{R}{S}\cdot\frac{P}{Q};$$

г) сочетательному закону умножения:

$$\frac{P}{Q}\cdot\left(\frac{R}{S}\cdot\frac{T}{U}\right)\equiv\left(\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}\right)\cdot\frac{T}{U};$$

д) распределительному закону умножения относительно сложения:

$$\left(\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}\right)\frac{T}{U}\equiv\frac{P}{Q}\cdot\frac{T}{U}+\frac{R}{S}\cdot\frac{T}{U}.$$

Поэтому упражнения на все действия с алгебраическими дробями выполняются по правилам, аналогичным правилам действий над арифметическими дробями.

Пример. Выполнить указанные действия:

$$\left[\frac{1}{a-1}+\frac{2(a-1)}{a^2-4}-\frac{4(a+1)}{a^2+a-2}+\frac{a}{a^2-3a+2}\right]\times$$
$$\times\frac{a^3-a^2-4a+4}{a^3+27}:\frac{a}{a^2-3a+9}.$$

Решение. Найдем сумму в квадратных скобках:

$$\frac{1}{a-1}+\frac{2(a-1)}{a^2-4}-\frac{4(a+1)}{a^2+a-2}+\frac{a}{a^2-3a+2}=\frac{2(a+3)}{(a+2)(a-1)(a-2)}.$$

Выполним умножение:

$$\frac{2(a+3)}{(a+2)(a-1)(a-2)} \cdot \frac{a^3-a^2-4a+4}{a^3+27} =$$

$$= \frac{2(a+3)[a^2(a-1)-4(a-1)]}{(a+2)(a-1)(a-2)(a+3)(a^2-3a+9)} =$$

$$= \frac{2(a+3)(a-1)(a-2)(a+2)}{(a+2)(a-1)(a-2)(a+3)(a^2-3a+9)} = \frac{2}{a^2-3a+9}.$$

Выполним деление:

$$\frac{2}{a^2-3a+9} : \frac{a}{a^2-3a+9} = \frac{2(a^2-3a+9)}{a(a^2-3a+9)} = \frac{2}{a}.$$

Ответ. $\frac{2}{a}$.

## § 6. Пропорции

Отношением двух алгебраических выражений называется частное от их деления.

*Пропорцией* называется тождественное равенство двух отношений

$$\frac{A}{B} \equiv \frac{C}{D}, \tag{2.30}$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — алгебраические выражения, причем $B \not\equiv 0$, $D \not\equiv 0$.

Например, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b} \equiv \frac{c}{d}$; $\frac{5}{a} \equiv \frac{7}{b}$; $\frac{x+y}{x^2+y^2} \equiv \frac{x}{y+2}$.

В пропорции члены $A$ и $D$ называются крайними членами, а $B$ и $C$ — средними. $A$ и $C$ — предыдущие члены, $B$ и $D$ — последующие.

**Основное свойство пропорции.** Во всякой пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов, т. е. если $\frac{A}{B} \equiv \frac{C}{D}$, то $AD \equiv BC$. Это следует из условия равенства двух дробей.

В пропорции можно менять местами средние и крайние члены, а также средние члены сделать крайними, а крайние — средними.

**Производные пропорции.** Из одной пропорции можно составить несколько производных. Например, из пропорции $\frac{A}{B} \equiv \frac{C}{D}$ следуют пропорции:

$$\frac{A+B}{B} \equiv \frac{C+D}{D}; \quad \frac{A-B}{B} \equiv \frac{C-D}{D}; \quad \frac{A+B}{A-B} \equiv \frac{C+D}{C-D};$$

$$\frac{A-B}{A+B} \equiv \frac{C-D}{C+D}; \quad \frac{A}{A+B} \equiv \frac{C}{C+D}; \quad \frac{A}{A-B} \equiv \frac{C}{C-D}.$$

Вообще, из пропорции $\frac{A}{B} \equiv \frac{C}{D}$ следует, что

1) $\frac{Ak + Cl}{Bk + Dl} \equiv \frac{Am + Bn}{Cm + Dn}$;

2) $\frac{Ap + Bq}{Ar + Bs} \equiv \frac{Cp + Dq}{Cr + Ds}$,

где $k$, $l$, $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$ — произвольные действительные числа, причем пары чисел $k$ и $l$, $m$ и $n$, $r$ и $s$ не могут одновременно равняться нулю.

Пусть $\frac{A}{B} \equiv \frac{C}{D} \equiv p$; тогда $A = Bp$ и $C = Dp$.

Найдем

$$\frac{Ak + Cl}{Bk + Dl} \text{ и } \frac{Am + Cn}{Bm + Dn}.$$

$$\frac{Ak + Cl}{Bk + Dl} \equiv \frac{p(Bk + Dl)}{Bk + Dl} \equiv p;$$

$$\frac{Am + Cn}{Bm + Dn} \equiv \frac{p(Bm + Dn)}{Bm + Dn} \equiv p.$$

Следовательно,

$$\frac{Ak + Cl}{Bk + Dl} \equiv \frac{Am + Cn}{Bm + Dn}.$$

Равенство 2 доказывается аналогично.

**Определение неизвестного члена пропорции.** Неизвестный средний (крайний) член пропорции равен произведению ее крайних (средних) членов, деленному на известный средний (крайний).

В пропорции $\frac{A}{x} \equiv \frac{C}{D}$ $x \equiv \frac{AD}{C}$.

**Ряд равных отношений и его свойство.** Пусть дан ряд равных отношений

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \cdots = \frac{A_n}{B_n}.$$

Обозначим эти отношения $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \cdots = \frac{A_n}{B_n} = k$; тогда $A_1 = B_1 k$, $A_2 = B_2 k$, ..., $A_n = B_n k$.

Складывая последние равенства, получим

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = k(B_1 + B_2 + \cdots + B_n),$$

или

$$\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n} = k,$$

откуда

$$\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \cdots = \frac{A_n}{B_n},$$

т. е. если несколько отношений равны друг другу, то отношение суммы их предыдущих членов к сумме последующих равно каждому из этих отношений.

## Упражнения

31. Найти числовое значение выражения $\dfrac{a^2-bc}{(2a+b)(a-c)}$ при $a=3$, $b=-1$, $c=1$.
32. Даны делимое $P(x)=x^4+ax^3-5a^2x^2+12a^3x$, частное $S(x)=x^2+3ax+a^2$ и остаток $R(x)=+14a^3x$. Определить делитель $Q(x)$.

Разложить на множители:

33. $x^4-(a^2+2)x^2-2a^2x-a^2+1$.
34. $27x^4-9x^2+14x-4$.
35. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$.
36. $z^3-(a-b+c)z^2+[ac-b(a+c)]z+abc$.
37. При каком $m$ многочлен $a^3+b^3+c^3-mabc$ делится на $a+b+c$?
38. При каких значениях $a$ и $b$ многочлен $x^4-2x^3+ax^2-9x+b$ делится без остатка на трехчлен $x^2+x+2$?
39. При каком значении $k$ многочлен $x^4+x^2+1$ делится без остатка на $x^2-x+k$?
40. При каких значениях $a$ и $b$ многочлен $2x^4-x^3-6x^2+ax-2$ делится без остатка на трехчлен $x^2+x+b$?
41. Доказать, что $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)\equiv 3(a+b)(a+c)(b+c)$.
42. Показать, что $xyz\equiv 0$, если $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$.
43. Показать, что $(a+b)^4-2(a^2+b^2)(a+b)^2+2(a^4+b^4)$ есть точный квадрат.
44. Показать, что $m^2=n^2+k^2$, если $m=n_1^2+k_1^2$ и $m$, $n$, $k$, $n_1$, $k_1$ — натуральные числа.
45. Показать, что произведение двух чисел, из которых каждое есть сумма квадратов двух целых чисел, также равно сумме квадратов двух целых чисел.
46. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$x^3+3x^2+4x+12 \text{ и } x^3+4x^2+4x+3.$$

47. Найти наименьшее общее кратное многочленов

$$3x^2-5x+2 \text{ и } 4x^3-4x^2-x+1.$$

Упростить выражения:

48. $\dfrac{a+1}{a^3+a^2+a}:\dfrac{1}{a^4-a}$.
49. $\dfrac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}$.
50. $\dfrac{1}{m+\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{p}}}:\dfrac{1}{m+\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{n(mnp+m+p)}$.
51. $\dfrac{\dfrac{x^3-1}{x^2+1}\,\dfrac{x^2-1}{x^3+1}\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right):\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{[(x+1)^2-x]:[(x-1)^2+x]}\,\dfrac{x^2}{0{,}1x(x+9)-1}$.
52. $\left(\dfrac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\dfrac{x^2+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right):\left(\dfrac{1+x^4}{x^3+x^4+x^5}-\dfrac{1-x+x^2}{x^3}\right)$.

53. Доказать, что сумма дробей $\frac{a-b}{1+ab}$, $\frac{b-c}{1+bc}$, $\frac{c-a}{1+ac}$ равна их произведению.

54. Показать, что $\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=$ $=9$, если $a+b+c=0$.

55. Пусть $a+b+c=2p$. Доказать, что

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}-\frac{1}{p}=\frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

56. Показать, что необходимым и достаточным условием независимости значений дроби $\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$ от $x$ есть условие $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$.

57. Доказать, что

а) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$, если $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$;

б) $\frac{ma^2+nac+pc^2}{mb^2+nbd+pd^2}=\frac{a^2+ac+c^2}{b^2+bd+d^2}$, если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $m$, $n$, $p$ — произвольные действительные числа, не все одновременно равные нулю.

58. Пусть $a:b=b:c=c:d$. Доказать, что

$$(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2.$$

59. Пусть $x:a=y:b=z:c$. Доказать, что

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$

60. Пусть $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$. Доказать, что

а) $\frac{a_1m_1+a_2m_2+\ldots+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+\ldots+b_nm_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$, где $m_1$, $m_2$, $\ldots$, $m_n$ — произвольные действительные числа, не все одновременно равные нулю;

б) $\frac{a_1m_1+a_2m_2+\ldots+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+\ldots+b_nm_n}=\frac{a_1l_1+a_2l_2+\ldots+a_nl_n}{b_1l_1+b_2l_2+\ldots+b_nl_n}$, где $m_1$, $m_2$, $\ldots$, $m_n$ и $l_1$, $l_2$, $\ldots$, $l_n$ — две совокупности по $n$ произвольных действительных чисел, в каждой из которых имеется хотя бы одно отличное от нуля число.

Показать, что утверждение «а» есть частный случай утверждения «б».

## Глава 3

# ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

### § 1. Понятие корня и его основные свойства

*Корнем n-й степени из числа a* называется такое число $a$, $n$-я степень которого равна $a$ ($n \geqslant 2$). Обозначается $\sqrt[n]{a}$.

По определению, $\sqrt[n]{a} = a$, если $a^n = a$, или $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Например,

$$\sqrt[4]{16} = 2, \text{ так как } 2^4 = 16;$$

$$\sqrt[4]{16} = -2 \quad » \quad » \quad (-2)^4 = 16;$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad » \quad » \quad 5^3 = 125;$$

$$\sqrt[5]{-243} = -3 \quad » \quad » \quad (-3)^5 = -243;$$

$$\sqrt[n]{0} = 0 \quad » \quad » \quad 0^n = 0.$$

Однако в множестве действительных чисел существуют корни не из всех чисел. Например, $\sqrt[4]{-81}$ не существует. Это означает, что нет действительного числа, четвертая степень которого равна $-81$ (отрицательному числу).

**Основные свойства корня.** Если корни (радикалы) рассматривать в множестве действительных чисел, то:

а) корень четной степени из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку;

б) корень четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует;

в) корень нечетной степени из положительного числа имеет только одно действительное значение, которое положительно;

г) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет только одно действительное значение, которое отрицательно;

д) корень любой натуральной степени из нуля равен нулю.

Действие, посредством которого отыскивают корень $n$-й степени из данного числа $a$, называется извлечением корня $n$-й степени из числа $a$.

Таким образом, множество действительных чисел не замкнуто относительно извлечения корня, а результат этого действия (корень) не однозначен.

Заметим, что множество действительных чисел замкнуто относительно извлечения корня нечетной степени, а результат этого действия однозначен.

Так как корни четной степени из положительных чисел имеют по два значения, результаты действий над такими корнями многозначны.

Например, при выполнении действий в выражении

$$\left(\frac{\sqrt{1}+\sqrt{4}}{\sqrt{9}+\sqrt{25}}+\frac{\sqrt{9}+\sqrt{4}}{\sqrt{1}+\sqrt{9}}\right)\cdot\left(\sqrt{4}+\frac{\sqrt{36}+\sqrt{64}}{\sqrt{4}}\right)=$$
$$=\left(\frac{\pm 1\pm 2}{\pm 3\pm 5}+\frac{\pm 3\pm 2}{\pm 1\pm 3}\right)\cdot\left(\pm 2+\frac{\pm 6\pm 8}{\pm 2}\right)$$

в результате получим 4096 различных чисел.

Чтобы избежать такой многозначности результатов действий над корнями в множестве действительных чисел, вводят понятие арифметического значения корня, или арифметического корня.

## § 2. Арифметический корень и его свойства

*Арифметическим значением корня или арифметическим корнем степени n из положительного числа a* называется положительное значение этого корня. Корень из нуля, равный нулю, также будем называть арифметическим корнем, т. е. $\sqrt[n]{a}=\alpha$ есть арифметический корень, если $a\geqslant 0$, $\alpha\geqslant 0$ и $\alpha^n=a$. Например, $\sqrt[4]{16}=2$ и $\sqrt{9}=3$— арифметические корни, а $\sqrt[3]{-8}=-2$ не является арифметическим.

Множество неотрицательных действительных чисел замкнуто относительно извлечения арифметического корня, а результат этого действия однозначен. Это значит, что для любого неотрицательного числа $a$ и натурального числа $n\,(n>1)$ всегда найдется, и притом только одно, такое неотрицательное число $\alpha$, что $\alpha^n=a$.

**Извлечение квадратных корней.** Извлечь квадратный корень из неотрицательного числа $a$ означает найти такое число $\alpha$, квадрат которого равен $a$, т. е. $\alpha^2=a$.

Натуральные числа, являющиеся квадратами некоторых натуральных чисел, называются точными квадратами.

Например, точными квадратами однозначных чисел являются 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Из небольших натуральных чисел, являющихся точными квадратами, квадратные корни нужно уметь извлекать устно. Правило извлечения квадратного корня из многозначных чисел можно вывести обращением формулы квадрата суммы двух чисел.

Для извлечения квадратного корня из многозначного числа разбивают его справа налево на грани по две цифры в каждой (в первой, крайней слева, грани может оказаться одна цифра).

Чтобы найти первую цифру корня, извлекают квадратный корень из наибольшего точного квадрата, содержащегося в первой грани. Чтобы найти вторую цифру корня, из первой грани вычитают квадрат первой цифры корня, к полученной разности приписывают (сносят) вторую грань и число десятков полученного числа делят на удвоенную первую цифру корня. Целую часть найденного частного подвергают испытанию (если целая часть больше 9, то испытывают число 9). Для этого к числу, равному удвоенной первой цифре корня, приписывают испытуемую цифру, умножают полученное число на испытуемую цифру и

результат сравнивают с числом, полученным после приписывания к разности второй грани. Если результат окажется меньше или равным указанному числу, то испытуемая цифра годна и она будет второй цифрой корня. Если результат окажется больше указанного числа, то испытуемая цифра не годится. Уменьшают ее на единицу, и новое число испытывают тем же способом.

Следующие цифры корня определяют аналогично. Если после снесения очередной грани число десятков полученного числа окажется меньше удвоенной найденной части корня, то в корне ставят 0, сносят следующую грань и продолжают действие дальше.

Пример 1. Извлечь $\sqrt{15129}$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1'\,51'\,29} = 123 & \\ -1 & \\ \hline 22 \mid 2 & -51 \\ & -44 \\ \hline 243 \mid 3 & -729 \\ & -729 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Аналогично извлекают квадратные корни из десятичных дробей. Только подкоренное число разбивают на грани так, чтобы запятая была между гранями, т. е. от запятой влево и вправо, причем если в крайней правой грани окажется одна цифра, то ее дополняют дописыванием к числу нуля.

Пример 2. Извлечь $\sqrt{28,1961}$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{28',19'\,61} = 5,31 & \\ -25 & \\ \hline 103 \mid 3 & -319 \\ & -309 \\ \hline 1061 \mid 1 & -1061 \\ & -1061 \\ \hline & 0 \end{array}$$

**Приближенные значения квадратных корней.** При извлечении корня из данного числа последний остаток может оказаться отличным от нуля, т. е. корень квадратный из этого числа точно не извлекается. Тогда значение корня находят приближенно с требуемой точностью.

Чтобы извлечь корень квадратный из данного числа с точностью до $k$-го десятичного знака $\left(\frac{1}{10^k}\right)$, достаточно подкоренное число взять с $2(k+1)$ десятичными знаками; если их нет в записи числа, то следует дописать после запятой соответствующее число нулей, извлечь корень из полученного числа и округлить результат с точностью до $\frac{1}{10^k}$.

Пример 3. Извлечь $\sqrt{0,1}$ с точностью до 0,001.

Решение.

$$\sqrt{0{,}10'\ 00'\ 00'\ 00} = 0{,}3162$$

| | |
|---|---|
| 9 | |
| 61 \| 100 | |
| 1 \| 61 | |
| 626 \| 3900 | |
| 6 \| 3756 | |
| 6322 \| 14400 | |
| 2 \| 12644 | |
| \| 1756 | |

Итак, $\sqrt{0{,}1} \approx 0{,}316$ (с недостатком).

При извлечении квадратного корня из приближенных чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их содержит подкоренное число.

Пример 4. Извлечь квадратный корень из приближенного числа 11,365 с точностью до 0,0001.

Решение.

$$\sqrt{11',36'\ 50'\ 00'\ 00} = 3{,}3712$$

| | |
|---|---|
| 9 | |
| 63 \| 236 | |
| 3 \| 189 | |
| 667 \| 4750 | |
| 7 \| 4669 | |
| 6741 \| 8100 | |
| 1 \| 6741 | |
| 67422 \| 135900 | |
| 2 \| 134844 | |
| \| 1056 | |

Итак, $\sqrt{11{,}365} \approx 3{,}3712$ (с недостатком).

**Основное свойство арифметического корня.** Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить на одно и то же натуральное число, то значение арифметического корня не изменится, т. е.

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[nm]{a^{km}} \quad (a \geqslant 0); \tag{3.1}$$

и, наоборот, показатель корня и показатель степени подкоренного выражения арифметического корня можно делить на одно и то же натуральное число, т. е.

$$\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k} \quad (a \geqslant 0). \tag{3.2}$$

На основании указанного свойства корни с разными показателями всегда можно привести к общему показателю.

Пример 1. Привести к общему показателю $\sqrt{5}$, $\sqrt[6]{4}$, $\sqrt[4]{36}$.

Решение. Сначала упростим (если это возможно) данные корни: $\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt{6}$. Далее $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{6}$ приведем к общему показателю. Наименьшее общее кратное показателей

этих корней равно 6, поэтому корни можно привести к наименьшему общему показателю, равному 6:

$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125},$$
$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4},$$
$$\sqrt{6} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{216},$$

т. е. $\sqrt{5}$, $\sqrt[6]{4}$ и $\sqrt[4]{36}$ можно заменить соответственно равными им $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[6]{4}$ и $\sqrt[6]{216}$ с общим показателем.

Пример 2. Привести к общему показателю $\sqrt{a}$, $\sqrt[5]{b}$ и $\sqrt[3]{c}$.

**Решение.** Наименьшее общее кратное показателей данных корней равно 30, поэтому

$$\sqrt{a} = \sqrt[30]{a^{15}},$$
$$\sqrt[5]{b} = \sqrt[30]{b^6},$$
$$\sqrt[3]{c} = \sqrt[30]{c^{10}},$$

т. е. $\sqrt{a}$, $\sqrt[5]{b}$ и $\sqrt[3]{c}$ можно заменить равными им $\sqrt[30]{a^{15}}$, $\sqrt[30]{b^6}$ и $\sqrt[30]{c^{10}}$.

## § 3. Основные правила действий над арифметическими корнями

**Сложение и вычитание.** Множитель, стоящий перед знаком корня, называется коэффициентом данного корня. Например, в выражениях $2\sqrt{3}$, $a\sqrt[5]{b}$ коэффициентами являются 2 и $a$.

Два корня называются подобными, если они отличаются только коэффициентами. Например, подобны $2\sqrt{a}$, $0{,}3\sqrt{a}$, $a\sqrt{a}$ и $x\sqrt{a}$, а также $a\sqrt[5]{a^3b}$, $3\sqrt[5]{a^3b}$ и $-\frac{1}{2}\sqrt[5]{a^3b}$.

Правило. Алгебраическая сумма нескольких подобных корней равна корню, подобному данным, с коэффициентом, равным алгебраической сумме коэффициентов данных корней.

Пример 1. Найти сумму $5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2}$.

Решение. $5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} = (5 + 3 - 6)\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$.

Пример 2. Найти сумму $a\sqrt[5]{ab} + b\sqrt[5]{ab} - c\sqrt[5]{ab}$.

Решение. $a\sqrt[5]{ab} + b\sqrt[5]{ab} - c\sqrt[5]{ab} = (a + b - c)\sqrt[5]{ab}$.

Правило сложения подобных корней основано на применении распределительного закона умножения относительно сложения.

**Умножение.** Произведение корней с одинаковыми показателями из неотрицательных чисел равно корню с таким же показателем из произведения этих чисел:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0); \tag{3.3}$$

наоборот, корень из произведения нескольких неотрицательных чисел равен произведению корней той же степени из каждого числа:

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0). \tag{3.4}$$

Докажем эти правила. Так как множество неотрицательных действительных чисел замкнуто относительно извлечения арифметического корня, а результат этого действия однозначен, то найдутся такие числа $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$, и притом единственные, что $\sqrt[n]{a} = \alpha$, $\sqrt[n]{b} = \beta$, $\sqrt[n]{c} = \gamma$. Тогда по определению корня $\alpha^n = a$, $\beta^n = b$, $\gamma^n = c$. Перемножив почленно эти равенства, получим $\alpha^n\beta^n\gamma^n = abc$, или $(\alpha\beta\gamma)^n = abc$, откуда, по определению, $\alpha\beta\gamma = \sqrt[n]{abc}$, или $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \times \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$ и, наоборот, $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$. Аналогично доказываются все последующие правила действий над арифметическими корнями.

**Деление.** Частное двух корней с одинаковыми показателями из неотрицательных чисел (делитель отличен от нуля) равно корню с тем же показателем из частного этих чисел:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \ (a \geqslant 0,\ b > 0); \tag{3.5}$$

наоборот, корень из частного двух неотрицательных чисел (делитель отличен от нуля) равен частному корней той же степени из этих чисел:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (a \geqslant 0,\ b > 0). \tag{3.6}$$

**Возведение в степень.** Чтобы возвести в натуральную степень корень из неотрицательного числа, достаточно возвести в нее подкоренное число и извлечь корень той же степени:

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k} \ (a \geqslant 0); \tag{3.7}$$

наоборот, чтобы извлечь корень из степени, достаточно найти данную степень того же корня из ее основания:

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k \ (a \geqslant 0). \tag{3.8}$$

**Извлечение корня.** Чтобы извлечь арифметический корень из арифметического корня, достаточно из подкоренного выражения извлечь корень степени, равной произведению показателей степеней данных корней:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a} \ (a \geqslant 0); \tag{3.9}$$

наоборот,

$$\sqrt[kn]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} \ (a \geqslant 0). \tag{3.10}$$

Вообще, чтобы извлечь корень из неотрицательного числа, показатель степени которого разлагается на натуральные множители, достаточно извлечь из этого числа корень степени, равной одному из сомножителей, а затем из полученного результата извлечь корень степени, равной второму сомножителю, и т. д. Правила действий над арифметическими корнями сформулированы в множестве неотрицательных действительных чисел.

## § 4. Действия над корнями в множестве действительных чисел

**Приведение корня нечетной степени из отрицательного числа к арифметическому.** Чтобы извлечь корень нечетной степени из отрицательного числа, достаточно извлечь арифметический корень из числа, противоположного данному, и полученный результат взять со знаком минус:

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}, \tag{3.11}$$

где $a \geqslant 0$, а $n$ — натуральное число.

Доказательство. Так как множество действительных чисел замкнуто относительно действия извлечения корня нечетной степени, а результат этого действия однозначен, то найдется, и притом только одно, такое число $\alpha < 0$, что $\sqrt[2n+1]{-a} = \alpha$.

По определению корня, $\alpha^{2n+1} = -a$, или $-\alpha^{2n+1} = a$, откуда следует $-\alpha = \sqrt[2n+1]{a}$ и $\alpha = -\sqrt[2n+1]{a}$, где $\sqrt[2n+1]{a}$ — арифметический корень ($a \geqslant 0$).

Правила действий над арифметическими корнями имеют место для действий над корнями любой нечетной степени из любого действительного числа.

**Распространение правил действий над арифметическими корнями четной степени на множество всех действительных чисел** имеет определенные ограничения. Так как корень четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует, то формулы (3.1), (3.3), (3.5), (3.7), (3.9) нельзя применить к отрицательным числам.

Формулы (3.2), (3.4), (3.6), (3.8) и (3.10) можно обобщить. Рассмотрим, к примеру, формулу $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$, доказанную в § 3, при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Если $n = 2k$ — четное число, то левая часть формулы существует при $abc \geqslant 0$, т. е. если $a$, $b$ и $c$ удовлетворяют совокупности следующих систем неравенств:

1) $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0, \\ c \geqslant 0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \leqslant 0, \\ c \leqslant 0, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a \leqslant 0, \\ b \geqslant 0, \\ c \leqslant 0, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a \leqslant 0, \\ b \leqslant 0, \\ c \geqslant 0. \end{cases}$

Так как $abc \geqslant 0$, то, пользуясь свойствами (1.27) и (1.33) абсолютных величин действительных чисел, получим тождество

$$abc = |abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c|,$$

где $|a| \geqslant 0$, $|b| \geqslant 0$, $|c| \geqslant 0$.

По правилу (3.2) получаем

$$\sqrt[2k]{abc} = \sqrt[2k]{|a| \cdot |b| \cdot |c|} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|} \cdot \sqrt[2k]{|c|}.$$

Аналогичным образом можно обобщить и некоторые другие правила действий над арифметическими корнями в множестве отрицательных действительных чисел.

### Правила действий над корнями в множестве всех действительных чисел

Для любых действительных чисел $a$, $b$ и $c$ и натуральных $n$ и $k$ имеют место следующие правила действий над корнями:

$$\sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} \cdot \sqrt[2n+1]{c} = \sqrt[2n+1]{abc}, \tag{3.12}$$

$$\sqrt[2n+1]{abc} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} \cdot \sqrt[2n+1]{c}, \tag{3.13}$$

$$\frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}} = \sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0), \tag{3.14}$$

$$\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}} \quad (b \neq 0), \tag{3.15}$$

$$\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^k = \sqrt[2n+1]{a^k}, \tag{3.16}$$

$$\sqrt[2n+1]{a^k} = \left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^k, \tag{3.17}$$

$$\sqrt[2m+1]{\sqrt[2n+1]{a}} = \sqrt[(2m+1)(2n+1)]{a}, \tag{3.18}$$

$$\sqrt[(2m+1)(2n+1)]{a} = \sqrt[2m+1]{\sqrt[2n+1]{a}}. \tag{3.19}$$

Правила (3.20)—(3.27) верны при указанных в скобках значениях $a$, $b$ и $c$:

$$\sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{b} \cdot \sqrt[2n]{c} = \sqrt[2n]{abc} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0), \tag{3.20}$$

$$\sqrt[2n]{abc} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|} \cdot \sqrt[2n]{|c|} \quad (abc \geqslant 0), \tag{3.21}$$

$$\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}} = \sqrt[2n]{\frac{a}{b}} \quad (a \geqslant 0,\ b > 0), \tag{3.22}$$

$$\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}} \quad \left(\frac{a}{b} \geqslant 0,\ b \neq 0\right). \tag{3.23}$$

$$\sqrt[2n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[2nk]{a} \quad (a \geqslant 0), \tag{3.24}$$

$$\sqrt[2nk]{a} = \sqrt[2n]{\sqrt[k]{a}} \quad (a \geqslant 0), \tag{3.25}$$

$$\left(\sqrt[2n]{a}\right)^k = \sqrt[2n]{a^k} \quad (a \geqslant 0), \tag{3.26}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2k}} = \left(\sqrt[2n]{|a|}\right)^{2k} \quad (a \text{ — любое действительное число}). \tag{3.27}$$

В множестве действительных чисел рассматриваются корни нечетной степени из любых действительных чисел и корни четной степени из неотрицательных чисел, причем берутся арифметические значения корней.

## § 5. Вынесение множителя из-под знака корня и введение его под знак корня

**Вынесение множителя из-под знака корня.** Если подкоренное выражение можно представить в виде двух сомножителей, один из которых есть степень с показателем, равным показателю корня, то основание степени можно вынести за знак корня.

Например, $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a} = a\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[5]{32a^6b} = \sqrt[5]{(2a)^5 \cdot ab} = 2a\sqrt[5]{ab}$, $\sqrt[3]{81a^{17}b^7c} = \sqrt[3]{(3a^5b^2)^3\, 3a^2bc} = 3a^5b^2\sqrt[3]{3a^2bc}$.

Вынесение множителя за знак корня основано на применении правила извлечения корня из произведения. Поэтому из формул (3.13) и (3.21) получаем следующие формулы для вынесения множителя за знак корня:

$$\sqrt[2k]{a^{2k}b} = |a|\sqrt[2k]{b}, \tag{3.28}$$

где $a$ — любое действительное число, $b \geqslant 0$;

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b} = a\sqrt[2k+1]{b}, \tag{3.29}$$

где $a$ и $b$ — любые действительные числа.

В частности, при $b = 1$ и $a$ — любом действительном числе из формул (3.28) и (3.29) получаем

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0; \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a. \tag{3.31}$$

Например, вынести множители из-под знака радикала:

а) $\sqrt{(a-5)^3}$ при $a \geqslant 5$.

По формуле (3.15) получаем

$$\sqrt{(a-5)^3} = \sqrt{(a-5)^2 \cdot (a-5)} = |a-5|\sqrt{a-5} = (a-5)\sqrt{a-5};$$

б) $\sqrt[4]{x^5(x-1)^4}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

По формуле (3.28) получаем

$$\sqrt[4]{x^5(x-1)^4} = \sqrt[4]{[x(x-1)]^4 \cdot x} = |x(x-1)|\sqrt[4]{x} =$$
$$= |x||x-1|\sqrt[4]{x} = x(1-x)\sqrt[4]{x} \text{ (так как } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\text{то } |x| = x, \quad |x-1| = 1-x).$$

С помощью вынесения множителя из-под знака корня дробное подкоренное выражение всегда можно освободить от знаменателя; для этого достаточно домножить числитель и знаменатель подкоренной дроби на знаменатель в степени с показателем, меньшим на единицу показателя корня.

Например, освободиться от дроби в подкоренном выражении:

а) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{2}{2^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

б) $\sqrt[3]{\frac{5}{9}} = \sqrt[3]{\frac{15}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{15}$;

в) $\sqrt[4]{\frac{a}{b^3}} = \sqrt[4]{\frac{ab}{b^4}} = \frac{1}{|b|}\sqrt[4]{ab}$ при $ab \geqslant 0$, $b \neq 0$.

**Введение множителя под знак корня** есть преобразование, обратное вынесению множителя из-под знака корня. Для введения множителя под знак корня четной степени имеет место формула

$$a\sqrt[2k]{b} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a^{2k}b}, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -\sqrt[2k]{a^{2k}b}, & \text{если } a < 0, \end{cases} \tag{3.32}$$

где $b \geqslant 0$, $a$ — любое действительное число.

Для введения множителя под знак корня нечетной степени имеет место формула

$$a\sqrt[2k+1]{b} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b}, \tag{3.33}$$

где $a$ и $b$ — любые действительные числа.

Например, ввести множители под знак корня:

а) $(4-x)\sqrt{\frac{x}{x-4}}$, если $x > 4$.

По формуле (3.32) получаем

$$(4-x)\sqrt{\frac{x}{x-4}} = -(x-4)\sqrt{\frac{x}{x-4}} = -\sqrt{\frac{(x-4)^2 x}{x-4}} = -\sqrt{x^2-4x}.$$

б) $(5-a)\sqrt{\frac{1}{25-a^2}}$, если $0 < a < 5$.

По формуле (3.32) получаем

$$(5-a)\sqrt{\frac{1}{25-a^2}} = \sqrt{\frac{(5-a)^2}{(5-a)(5+a)}} = \sqrt{\frac{5-a}{5+a}}.$$

**Приведение корней к нормальному виду.** Нормальным называется такой вид корня, при котором подкоренное выражение приведено к целому и не содержит множителей с показателями, не меньшими показателя корня.

Для приведения корня к нормальному виду следует:

а) упростить подкоренное выражение;

б) сократить показатели корня и подкоренного выражения;

в) вынести из-под корня рациональные множители;

г) если подкоренное выражение дробное, освободить его от дроби.

Например, привести корни к нормальному виду:

а) $3x^2y\sqrt{\frac{12}{xy}}$ $(xy>0)$,

$$3x^2y\sqrt{\frac{12}{xy}}=3x^2y\sqrt{\frac{4\cdot 3xy}{(xy)^2}}=\frac{3\cdot 2x^2y}{xy}\sqrt{3xy}=6x\sqrt{3xy};$$

б) $\frac{a+1}{a}\sqrt[3]{\frac{a^4-a^3}{a^2+2a+1}}$ при $a\neq 0$, $a\neq -1$,

$$\frac{a+1}{a}\sqrt[3]{\frac{a^4-a^3}{a^2+2a+1}}=\frac{a+1}{a}\sqrt[3]{\frac{a^3(a-1)(a+1)}{(a+1)^2(a+1)}}=$$

$$=\frac{(a+1)a}{a(a+1)}\sqrt[3]{(a-1)(a+1)}=\sqrt[3]{a^2-1}.$$

## § 6. Освобождение от иррациональности числителя или знаменателя дробного выражения

Замена дробного выражения, у которого числитель или знаменатель (или оба) иррациональный, тождественно равным ему выражением с рациональным числителем (знаменателем) называется освобождением от иррациональности числителя (знаменателя) дробного выражения.

При освобождении числителя (знаменателя) дробного выражения от иррациональности числитель и знаменатель этого выражения умножают на множитель, сопряженный с числителем (знаменателем).

Сопряженным множителем относительно иррационального выражения $A$ называют всякое не равное тождественно нулю выражение $B$, которое в произведении с $A$ не содержит знака корня, т. е. $AB$ рационально.

Например:

а) для выражения $\sqrt[3]{2}$ сопряженным является $\sqrt[3]{4}$, так как $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$;

б) для выражения $\sqrt{\frac{a+b}{c}}$ сопряженным является $\sqrt{\frac{c}{a+b}}$, так как $\sqrt{\frac{a+b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a+b}}=1$;

в) для выражения $a+\sqrt{b}$ сопряженным является $a-\sqrt{b}$, так как $(a+\sqrt{b})\cdot(a-\sqrt{b})=a^2-b$.

Рассмотрим основные случаи освобождения от иррациональности знаменателей дробных выражений (аналогично выполняется освобождение от иррациональности числителей):

1. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt[n]{a^k}}$, где $n>k$, $a>0$, $A$ — некоторое выражение. В качестве множителя, сопряженного со знаменателем, можно

взять $\sqrt[n]{a^{n-k}}$, так как $\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} = a$. Умножив числитель и знаменатель этой дроби на $\sqrt[n]{a^{n-k}}$, получим

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a^k}} = \frac{A\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}}} = \frac{A\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a} \quad (a > 0).$$

Например, освободиться от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{5}} = \dfrac{5\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5^3}} = \dfrac{5\sqrt[4]{125}}{5} = \sqrt[4]{125}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^2b}} = \dfrac{\sqrt[6]{a^4b^5}}{\sqrt[6]{a^6b^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{a^4b^5}}{|a| \cdot b}$ при $a \neq 0$, $b > 0$.

2. Дроби вида $\dfrac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$.

Выражения $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ взаимно сопряженные, так как $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$, поэтому

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a \neq b$;

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A\sqrt{a}}{2a} = \frac{A\sqrt{b}}{2b}, \text{ если } a > 0, \ a = b;$$

$$\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a \neq b$.

Например, освободиться от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$;

б) $\dfrac{5}{4 - \sqrt{11}} = \dfrac{5(4 + \sqrt{11})}{(4 - \sqrt{11})(4 + \sqrt{11})} = \dfrac{5(4 + \sqrt{11})}{16 - 11} = 4 + \sqrt{11}$.

3. Дроби вида $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$ и $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$.

Выражения $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$, а также $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ взаимно сопряжены, так как их произведения $(a + b)$ и $(a - b)$ рациональны. Поэтому освобождение от иррациональности в знаменателях указанных дробей выполняется следующим образом:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a + b},$$

где $a$ и $b$ — любые действительные числа, причем $a + b \neq 0$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b},$$

где $a$ и $b$ — любые действительные числа, причем $a \neq b$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}=$$

$$=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{a+b},$$

где $a$ и $b$ — любые действительные числа, причем $a+b \neq 0$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}=$$

$$=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{a-b},$$

где $a$ и $b$ — любые действительные числа, причем $a \neq b$.

Например, освободиться от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$;

б) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{9}}=\dfrac{12\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)}{\left(\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{9}\right)\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)}=$

$=\dfrac{12\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)}{6-3}=4\sqrt[3]{6}-4\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$;

в) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\dfrac{5\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}=$

$=\dfrac{5\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{3+2}=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$;

г) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}=\dfrac{3\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}\right)}=$

$=\dfrac{3\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}\right)}{5-3}=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}\right)$.

4. Дроби вида $\dfrac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$ и $\dfrac{A}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$.

Для выражения $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ сопряженный множитель можно определить из тождества

$$(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})=x^n-y^n.$$

Если принять $x=\sqrt[n]{a}$, $y=\sqrt[n]{b}$, то получим

$$(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\cdots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}=\frac{A(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\cdots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}})}{a-b},$$

где $a\neq b$ ($a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, если $n$ — четное; $a$, $b$ — любые действительные числа, если $n$ — нечетное).

Для выражения $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ сопряженный множитель можно определить из тождества

$$(x+y)[x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+x(-y)^{n-2}+(-y)^{n-1}]=x^n+(-1)^n y^n.$$

Если принять $x=\sqrt[n]{a}$ и $y=\sqrt[n]{b}$, то

$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})[\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\cdots+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{ab^{n-2}}+$$
$$+(-1)^{n-1}\sqrt[n]{b^{n-1}}]=a+(-1)^{n-1}b.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[2k]{a}+\sqrt[2k]{b}}=\frac{A(\sqrt[2k]{a^{2k-1}}-\sqrt[2k]{a^{2k-2}}b+\cdots+\sqrt[2k]{ab^{2k-2}}-\sqrt[2k]{b^{2k-1}})}{a-b}$$

при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $a\neq b$;

$$\frac{A}{\sqrt[2k+1]{a}+\sqrt[2k+1]{b}}=$$
$$=\frac{A(\sqrt[2k+1]{a^{2k}}-\sqrt[2k+1]{a^{2k-1}b}+\cdots-\sqrt[2k+1]{ab^{2k-1}}+\sqrt[2k+1]{b^{2k}})}{a+b},$$

где $a$ и $b$ — любые действительные числа и $a+b\neq 0$. Например:

а) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{5}-\sqrt[5]{3}}=\dfrac{4(\sqrt[5]{5^4}+\sqrt[5]{5^3\cdot 3}+\sqrt[5]{5^2\cdot 3^2}+\sqrt[5]{5\cdot 3^3}+\sqrt[5]{3^4})}{5-3}=$

$=2(\sqrt[5]{625}+\sqrt[5]{375}+\sqrt[5]{225}+\sqrt[5]{135}+\sqrt[5]{81})$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}=\dfrac{\sqrt[4]{3^3}-\sqrt[4]{3^2\cdot 2}+\sqrt[4]{3\cdot 2^2}-\sqrt[4]{2^3}}{3-2}=\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{18}+$

$+\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{8}$.

5. Дроби вида $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

Умножив знаменатель на $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, получим

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})=a+b-c+2\sqrt{ab}.$$

Умножив полученное произведение на $a+b-c-2\sqrt{ab}$, найдем

$$[(a+b-c)+2\sqrt{ab}][(a+b-c)-2\sqrt{ab}]=(a+b-c)^2-4ab.$$

Таким образом, множителем, сопряженным со знаменателем данной дроби, является

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab}).$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab},$$

где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $(a+b-c)^2-4ab\neq 0$.

Аналогично освобождаются от иррациональности в знаменателях дробей

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \text{ и } \frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

Если знаменатель дроби — сумма четырех квадратных корней: $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$, причем $ab=cd$, то освободиться от иррациональности в знаменателе этой дроби можно так:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{A[(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{c}+\sqrt{d})]}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2}=$$
$$=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d})}{a+b-c-d},$$

где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$, $a+b\neq c+d$.

6. Дроби вида

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}.$$

Найдем сопряженный со знаменателем множитель. Для этого воспользуемся тождеством

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=x^3+y^3+z^3-3xyz;$$

если принять $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$, получим

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc})=$$
$$=a+b+c-3\sqrt[3]{abc}.$$

Умножив полученное произведение на $B=(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}$, получим $(a+b+c-3\sqrt[3]{abc})\cdot B=(a+b+c)^3-27abc$. Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=$$

$$=\frac{A(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc})B}{(a+b+c)^3-27abc}$$

при $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\neq 0$, $(a+b+c)^3\neq 27abc$.

## § 7. Преобразование сложного квадратного корня (радикала)

Выражения вида $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ называются сложными квадратными радикалами (корнями). Для их преобразования пользуются формулой

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}, \quad (3.34)$$

где $A>0$, $B>0$ и $A^2-B>0$; знаки берутся либо только верхние, либо только нижние. В правильности этой формулы можно убедиться, если возвести обе части формулы в квадрат. Эта формула упрощает сложный радикал, если $A^2-B$ — точный квадрат.

Пример 1. Упростить $\sqrt{11+\sqrt{40}}$.

Решение. По формуле (3.34) получим

$$\sqrt{11+\sqrt{40}}=\sqrt{\frac{11+\sqrt{121-40}}{2}}+\sqrt{\frac{11-\sqrt{121-40}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{11+9}{2}}+\sqrt{\frac{11-9}{2}}=\sqrt{10}+1.$$

Ответ. $\sqrt{10}+1$.

Пример 2. Упростить $\sqrt{15-\sqrt{29}}$.

Решение. По формуле (3.34) находим

$$\sqrt{15-\sqrt{29}}=\sqrt{\frac{15+\sqrt{225-29}}{2}}-\sqrt{\frac{15-\sqrt{225-29}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{15+14}{2}}-\sqrt{\frac{15-14}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{58}-\sqrt{2}).$$

Ответ. $\frac{1}{2}(\sqrt{58}-\sqrt{2})$.

На практике удобно пользоваться следующими, более простыми, очевидными формулами:

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=|\sqrt{a}+\sqrt{b}|=\sqrt{a}+\sqrt{b}, \qquad (3.35)$$

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=|\sqrt{a}-\sqrt{b}|, \qquad (3.36)$$

где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

Пример 1. Упростить $\sqrt{17+2\sqrt{30}}$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (3.35), представим 17 в виде суммы двух чисел, произведение которых равно 30. Такими числами являются 15 и 2 ($15+2=17$; $15\cdot 2=30$).

Следовательно, $\sqrt{17+2\sqrt{30}}=\sqrt{15+2+2\sqrt{15\cdot 2}}=\sqrt{15}+\sqrt{2}$

Ответ. $\sqrt{15}+\sqrt{2}$.

Пример 2. Упростить $\sqrt{19-2\sqrt{34}}$.

Решение. Применив формулу (3.36), получим

$$\sqrt{19-2\sqrt{34}}=\sqrt{17+2-2\sqrt{17\cdot 2}}=|\sqrt{17}-\sqrt{2}|=$$
$$=\sqrt{17}-\sqrt{2}.$$

Ответ. $\sqrt{17}-\sqrt{2}$.

Пример 3. Упростить $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Решение. Для применения формулы (3.35) представим данный корень в виде $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$; тогда

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3+1+2\sqrt{3\cdot 1}}}{\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

Рассмотрим несколько более сложных примеров.

Пример 1. Упростить $A=(\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}})\times$ $\times\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Решение.

$$A=(\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}})\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$$
$$=(\sqrt[6]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}})\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$$
$$=(\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}})\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$$
$$=2\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=2\sqrt[3]{2-3}=-2.$$

Ответ. $A=-2$.

Пример 2. Упростить $A=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$.

Решение.

$$A=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{9+2+2\cdot 3\sqrt{2}}-\sqrt{3+2+2\sqrt{3\cdot 2}}}{\sqrt{2}+\sqrt{5+1+2\sqrt{5\cdot 1}}-\sqrt{5+2+2\sqrt{5\cdot 2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}-\sqrt{2}}=3.$$

Ответ. $A=3$.

Пример 3. Упростить $A=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

Решение.

$$A=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+2\sqrt{12}}}}=$$

$$=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{12+1+2\sqrt{12\cdot 1}}}}=$$

$$=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{12}-1}}=2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=$$

$$=2\sqrt{3+\sqrt{3+1-2\sqrt{3\cdot 1}}}=2\sqrt{3+\sqrt{3}-1}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6+2+2\sqrt{6\cdot 2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

Ответ. $A=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Пример 4. Упростить $A=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

Решение.

$$A=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+2\sqrt{8}}}}=$$

$$=\sqrt{13+30\sqrt{2+1+2\sqrt{2}}}=$$

$$=\sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{43+30\sqrt{2}}=\sqrt{43+2\sqrt{450}}=$$

$$=\sqrt{25+18+2\sqrt{25\cdot 18}}=5+\sqrt{18}=5+3\sqrt{2}.$$

Ответ. $A=5+3\sqrt{2}$.

Если упростить сложный квадратный корень с помощью формул (3.35) и (3.36) трудно, то следует пользоваться формулой (3.21).

**Сравнение значений иррациональных выражений.** При преобразовании иррациональных выражений предварительно следует выяснить, существует ли это выражение, т. е. все ли величины под корнями четной степени неотрицательные. Поэтому возникает необходимость сравнивать значения иррациональных выражений. Эта необходимость возникает и при решении многих других задач.

Укажем признак сравнения двух положительных иррациональных выражений.

Пусть $A > 0$ и $B > 0$; тогда из неравенства $A^2 \geqslant B^2$ следует, что $A \geqslant B$ и наоборот.

Действительно, $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$; так как $A + B > 0$, то из $A^2 - B^2 \geqslant 0$ следует, что $A - B \geqslant 0$, т. е. из $A^2 \geqslant B^2$ следует, что $A \geqslant B$. Наоборот, из $A - B \geqslant 0$ следует, что $A^2 - B^2 \geqslant 0$, т. е, из $A \geqslant B$ следует, что $A^2 \geqslant B^2$.

Пример. Установить, какое из чисел $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ или $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ больше.

Найдем квадраты этих чисел:

$$(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 = 12 + \sqrt{35} \text{ и } (\sqrt{3} + \sqrt{8})^2 = 11 + \sqrt{24}.$$

Так как $12 + \sqrt{35} > 11 + \sqrt{24}$, то $\sqrt{5} + \sqrt{7} > \sqrt{3} + \sqrt{8}$.

Если оба иррациональных выражения отрицательны, то для их сравнения по указанному признаку можно сначала сравнить их абсолютные величины.

## § 8. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Если в выражении без скобок встречаются действия первой (сложение и вычитание), второй (умножение и деление) и третьей (возведение в степень и извлечение корня) ступеней, то сначала выполняют действия третьей, затем — второй и последними — первой ступени. Раскрытие скобок и взятие в скобки при выполнении действий над иррациональными выражениями выполняют так же, как и над рациональными. Если при преобразовании данного иррационального выражения, в котором числа обозначены буквами, не указано множество числовых значений букв, то предварительно следует найти область существования этого выражения (на множестве действительных чисел).

Рассмотрим несколько примеров на тождественные преобразования иррациональных выражений.

Пример 1. Упростить выражение $A = \left(\frac{8}{\sqrt{5} - 1} + \frac{11}{4 + \sqrt{5}}\right) \times \left(\frac{12}{\sqrt{5} - 1} - \frac{71}{3 + 4\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Освободившись от иррациональности знаменателей в дробных членах данного выражения и выполнив умножение, получим

$$A = \left[\frac{8(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} + \frac{11(4 - \sqrt{5})}{16 - 5}\right]\left[\frac{12(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} - \frac{71(3 - 4\sqrt{5})}{9 - 80}\right] =$$
$$= (2\sqrt{5} + 2 + 4 - \sqrt{5})(3\sqrt{5} + 3 + 3 - 4\sqrt{5}) = (6 + \sqrt{5}) \times$$
$$\times (6 - \sqrt{5}) = 31.$$

Ответ. $A = 31$.

Пример 2. Выполнить действия $A = \left(\sqrt{ab} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\sqrt{ab}$.

Решение.

Выражение $A$ определено при $ab > 0$.

$$A = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{ab} - \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{ab} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{ab} =$$

$$= |ab| + 2\sqrt{b^2} - \sqrt{a^2} + 1 = ab + 2|b| - |a| + 1,$$

причем если $a > 0$ и $b > 0$, то $A = ab + 2b - a + 1$; если $a < 0$ и $b < 0$, то $A = ab - 2b + a + 1$.

Ответ.

$$A = \begin{cases} ab + 2b - a + 1, \text{ если } a > 0, \ b > 0; \\ ab - 2b + a + 1, \text{ если } a < 0, \ b < 0. \end{cases}$$

Пример 3. Упростить выражение $A = x + 1 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 10x + 25}$.

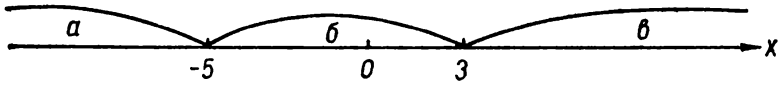



Рис. 5.

Решение. Выражение $A$ определено при всех действительных значениях $x$, так как $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geqslant 0$ и $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 \geqslant 0$.

Преобразуем его:

$$A = x + 1 + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+5)^2} = x + 1 + |x-3| + |x+5|.$$

Чтобы избавиться от знака абсолютной величины, удобно нанести на числовую ось те значения $x$, при которых $x - 3 = 0$ и $x + 5 = 0$, т. е. $x = 3$ и $x = -5$ (рис. 5), и рассмотреть выражение $A$ на каждом из полученных промежутков:

если $x < -5$, то

$$A = x + 1 - x + 3 - x - 5 = -x - 1;$$

если $-5 \leqslant x < 3$, то

$$A = x + 1 - x + 3 + x + 5 = x + 9;$$

если $x \geqslant 3$, то

$$A = x + 1 + x - 3 + x + 5 = 3x + 3.$$

Ответ.

$$A = \begin{cases} -x - 1, \text{ если } x < -5; \\ x + 9, \text{ если } -5 \leqslant x < 3; \\ 3x + 3, \text{ если } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Пример 4. Упростить выражение $A = \sqrt[6]{8x(7 + 4\sqrt{3})} \times \sqrt[3]{2\sqrt{6x} - 4\sqrt{2x}}$.

Р е ш е н и е. Выражение $A$ определено, если $x \geqslant 0$, так как при этом $8x(7+4\sqrt{3}) \geqslant 0$, $6x \geqslant 0$ и $2x \geqslant 0$. Заменим $7+4\sqrt{3} = 7+2\sqrt{12} = (\sqrt{3}+2)^2$, тогда

$$A = \sqrt[6]{8x(\sqrt{3}+2)^2} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6x-4\sqrt{2x}}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2x}(\sqrt{3}+2)} \times$$
$$\times \sqrt[3]{2\sqrt{2x}(\sqrt{3}-2)} = \sqrt[3]{8x(3-4)} = -2\sqrt[3]{x}.$$

О т в е т. $A = -2\sqrt[3]{x}$.

П р и м е р 5. Упростить выражение

$$A = \sqrt{a^2+2\sqrt{2a^2-4}} + \sqrt{a^2-2\sqrt{2a^2-4}}, \text{ если } |a| \geqslant \sqrt{2}.$$

Р е ш е н и е. При $|a| \geqslant \sqrt{2}$ данное выражение положительно. Найдем $A^2$:

$$A^2 = a^2+2\sqrt{2a^2-4} + a^2 - 2\sqrt{2a^2-4} + 2\sqrt{a^4-8a^2+16} =$$
$$= 2a^2 + 2\sqrt{(a^2-4)^2} = 2a^2 + 2|a^2-4|.$$

Учитывая, что $a^2 \geqslant 2$, рассмотрим два случая:

а) если $2 \leqslant a^2 < 4$, то $A^2 = 2a^2+8-2a^2 = 8$; тогда $A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ при $\sqrt{2} \leqslant |a| < 2$;

б) если $a^2 \geqslant 4$, то $A^2 = 2a^2+2a^2-8 = 4a^2-8$; тогда $A = 2\sqrt{a^2-2}$ при $|a| \geqslant 2$.

О т в е т.

$$A = \begin{cases} 2\sqrt{2}, \text{ если } -2 < a \leqslant -\sqrt{2} \text{ и } \sqrt{2} \leqslant a < 2; \\ 2\sqrt{a^2-2}, \text{ если } a \leqslant -2 \text{ и } a \geqslant 2. \end{cases}$$

П р и м е р 6. Упростить выражение $A = \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$ при $x = \dfrac{2ab}{b^2+1}$, если $a > 0$, $b$ — любое действительное число (читателю предлагается убедиться, что при таких условиях выражение $A$ существует).

Р е ш е н и е. Преобразуем данное выражение по частям.

Вычисляем $\sqrt{a+x} = \sqrt{a+\dfrac{2ab}{b^2+1}} = \sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}(b+1)^2} = |b+1|\sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}$ и $\sqrt{a-x} = \sqrt{a-\dfrac{2ab}{b^2+1}} = \sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}(b-1)^2} = |b-1|\sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}$. Тогда

$$A = \frac{\sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}|b+1| - \sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}|b-1|}{\sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}|b+1| + \sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}|b-1|} = \frac{|b+1|-|b-1|}{|b+1|+|b-1|}.$$

На числовую ось нанесем значения $b$, при которых $b+1=0$ и $b-1=0$, т. е. $b=-1$ и $b=1$ (рис. 6). Рассмотрим выражение $A$ на каждом из полученных промежутков:

$$\text{если } b<-1, \text{ то } A=\frac{-b-1+b-1}{-b-1-b+1}=\frac{1}{b};$$

$$\text{если } -1\leqslant b\leqslant 1, \text{ то } A=\frac{b+1+b-1}{b+1-b+1}=b;$$

$$\text{если } b>1, \text{ то } A=\frac{b+1-b+1}{b+1+b-1}=\frac{1}{b}.$$

Ответ.

$$A=\begin{cases} b, & \text{если } |b|\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{b}, & \text{если } |b|>1. \end{cases}$$

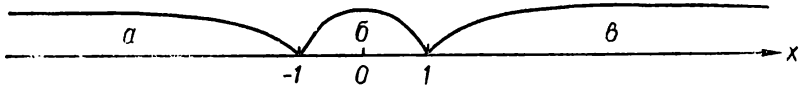



Рис. 6.

Пример 7. Упростить выражение

$$A=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right),$$

если $0<a<1$.

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$A=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{1-a^2}-\sqrt{(1-a)^2}}\right)\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{|a|}-\frac{1}{a}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=$$

$$=\frac{(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a})(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})}{(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})^2}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=$$

$$=\frac{2a}{2-2\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=-1.$$

Ответ. $A=-1$.

Пример 8. Упростить выражение

$$A=\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right).$$

Решение. Выражение $A$ существует в множестве действительных чисел при $a>0$, $x\geqslant 0$, $a\neq x$.

Выполним преобразование

$$A=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{x})}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-$$

$$-\left(\frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{x})(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{ax}+\sqrt[4]{x^2})}{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{x})}-\sqrt[4]{ax}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{x}-$$

$$-(\sqrt[4]{a^2}-2\sqrt[4]{ax}+\sqrt[4]{x^2})=\sqrt{a}+\sqrt{x}-\sqrt{a}+$$

$$+2\sqrt[4]{ax}-\sqrt{x}=2\sqrt[4]{ax}.$$

Ответ. $A=2\sqrt[4]{ax}$, если $a>0$, $x\geqslant 0$, $a\neq x$.

Пример 9. Доказать, что

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^4=4.$$

Доказательство. Преобразуем основание степени левой части равенства, обозначив его буквой $A$:

$$A=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}\right).$$

По формулам (3.35) и (3.36) заменим

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1,\qquad \sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1;$$

тогда $A=\sqrt{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2}$.

Следовательно, $A^4=(\sqrt{2})^4=4$, т. е.

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^4=4.$$

### Упражнения

Упростить выражения:

61. $A=\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\sqrt{ax}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)^2$, если $x\neq a$, $x\geqslant 0$, $a\geqslant 0$.

62. $A=\left[\sqrt{a(1-a)}+\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{1-a}}\right]:\left[\frac{1}{1+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{1-a}\right]$.

63. $A=\dfrac{a^2-a-2+(a-1)\sqrt{a^2-4}}{a^2+a-2+(a+1)\sqrt{a^2-4}}$, если $a\geqslant 2$.

64. $A=\sqrt{\dfrac{a^3+3b}{2a}+\sqrt{3ab}}-\sqrt{\dfrac{a^3+3b}{2a}-\sqrt{3ab}}$, если $a>0$, $b\geqslant 0$.

65. $A=\dfrac{\sqrt{a-2\sqrt{a}+1}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}:\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt[4]{a}-1}+1$, если $a>1$.

Доказать тождества:

66. $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}=\sqrt{\dfrac{2a+4}{\sqrt{a}}}$, если $a\geqslant 2$.

67. $\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{a}{2}}-\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}$, если $0\leqslant a\leqslant 2$.

Вычислить:

68. $A=(\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$.

69. $A=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

70. $A=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times$
$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

Освободиться от иррациональности в знаменателях дробей:

71. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}$.

72. $\dfrac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}}$.

73. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$.

74. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}$.

Упростить выражения:

75. $A=\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}}}+\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}-\dfrac{4}{\sqrt{a^2-x}}$ при $x=4(a-1)$, если $a\geqslant 1$, $a\neq 2$.

76. $A=\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ при $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, если $a>0$, $b>0$.

77. $A=\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$ при $x=\frac{a^2+b^2}{2ab}$, если $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

78. $A=\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$ при $x=\frac{2am}{b(1+m^2)}$, если $|m|<1$.

79. $A=\frac{xy-\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{y^2-1}}$ при $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$.

80. $A=\sqrt[10]{\frac{4}{3}x(a+\sqrt{a^2-4x^4})}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{3a-6x^2}-\sqrt{3a+6x^2}}$, если $a\geqslant 2x^2$ и $x\geqslant 0$.

# Глава 4

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

## § 1. Общие сведения об уравнениях

*Уравнением* называется равенство, содержащее неизвестные величины, которые надо найти. Если обе части уравнения есть алгебраические выражения относительно неизвестных, то уравнение называется *алгебраическим*. Если хотя бы одна часть уравнения — не алгебраическое выражение (выражение, содержащее какую-либо трансцендентную функцию, например показательную, логарифмическую, тригонометрическую и др.), то уравнение называется *трансцендентным*.

Неизвестные (переменные) величины преимущественно обозначают через $x$, $y$, $z$, $t$, ..., а заданные величины (параметры) — через $a$, $b$, $c$, $d$, ....

Если обе части уравнения есть целые рациональные алгебраические выражения (т. е. многочлены) относительно неизвестных, то такие уравнения называются *целыми рациональными* алгебраическими уравнениями. Наивысшая степень членов целого рационального алгебраического уравнения называется степенью уравнения. Если обе части алгебраического уравнения — рациональные выражения и хотя бы одна из них — дробное рациональное выражение относительно неизвестных, то такое уравнение называется *дробным рациональным алгебраическим* уравнением. Если в частях алгебраического уравнения содержатся радикалы относительно неизвестных, то такое уравнение называется *иррациональным* алгебраическим уравнением. Понятие степени уравнения для дробных рациональных и иррациональных алгебраических уравнений не вводится. Если говорится о степени уравнения, то имеется в виду целое рациональное алгебраическое уравнение. Целые и дробные рациональные алгебраические уравнения называются рациональными алгебраическими уравнениями.

Например:

1) $5x + 8 = \sqrt{2}\,x + 6$ — целое рациональное алгебраическое уравнение первой степени с одним неизвестным;

2) $x^4 - 2x^3 + \sqrt{3}\,x - \sqrt{6} = 0$ — целое рациональное алгебраическое уравнение четвертой степени с одним неизвестным;

3) $xyz + 2xy - 3yz = 6 - z^2 + y$ — целое рациональное алгебраическое уравнение третьей степени с тремя неизвестными;

4) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} = 5 + \dfrac{\sqrt{5}}{6x}$ — дробное рациональное алгебраическое уравнение с одним неизвестным;

5) $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{x+z}{y} + \dfrac{y+z}{x} = 6$ — дробное рациональное алгебраическое уравнение с тремя неизвестными;

6) $\sqrt{x-1}+x=x^2+3$ — иррациональное алгебраическое уравнение с одним неизвестным;

7) $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=z+t-4$ — иррациональное алгебраическое уравнение с четырьмя неизвестными.

Решением уравнения с $n$ неизвестными называется совокупность $n$ упорядоченных чисел (значений неизвестных), которая при подстановке в уравнение вместо соответствующих неизвестных обращает уравнение в тождество.

Например:

1) уравнение $x^4-x^3=2x+4$ при $x=2$ обращается в равенство $2^4-2^3=2\cdot 2+4$, или $8=8$, которое верно (представляет собой тождество). Значит, значение $x=2$ является решением (корнем) данного уравнения. Значение $x=3$ обращает данное уравнение в равенство $3^4-3^3=2\cdot 3+4$, или $54=10$, которое неверно. Значит, $x=3$ не является решением данного уравнения;

2) для уравнения $2x-y+z=6$ упорядоченные тройки чисел (4; 2; 0), (2; 1; 3), (1; —2; 2), (—1; +2; 10), где неизвестному $x$ соответствует первое число тройки, $y$ — второе, $z$ — третье число тройки, будут решениями данного уравнения, так как при подстановке их в уравнение получаем тождества

$$2\cdot 4-2+0\equiv 6,$$
$$2\cdot 2-1+3\equiv 6,$$
$$2\cdot 1-(-2)+2\equiv 6,$$
$$2\cdot(-1)-2+10\equiv 6.$$

Однако первая из рассмотренных троек чисел, упорядоченная по-другому — (2; 0; 4), решением данного уравнения не является, так как она обращает его в неверное равенство

$$2\cdot 2-0+4=6, \text{ или } 8=6.$$

Одно и то же уравнение, рассматриваемое над различными числовыми множествами, может иметь различное число решений (корней) или не иметь их. Различные уравнения, рассматриваемые над одним и тем же множеством чисел, могут иметь также различное количество решений.

Например:

1) уравнение $2x^5-3x^4-12x^3+18x^2+16x-24=0$ в множестве действительных чисел имеет пять решений: $x_1=-2$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=\sqrt{2}$, $x_4=\frac{3}{2}$ и $x_5=2$ (как найти эти решения и то, что это уравнение больше решений не имеет, будет показано дальше); в множестве рациональных чисел — три решения: $x_1=-2$, $x_2=\frac{3}{2}$ и $x_3=2$; в множестве иррациональных чисел — два решения: $x_1=-\sqrt{2}$ и $x_2=\sqrt{2}$; в множестве целых чисел — два решения: $x_1=-2$ и $x_2=2$; в множестве натуральных чисел — одно решение: $x=2$; в множестве нечетных целых чисел не имеет решений;

2) в множестве действительных чисел уравнение $(x-2)^2+(y-1)^2=0$ имеет одно решение (2; 1); уравнение $(x^2+2)^2+$

$+ (y^2 - 9)^2 = 4$ — два решения: (0; —3) и (0; 3); уравнение $x + 3y^2 = 5$ — бесчисленное множество решений; уравнение $\sqrt{x} + y^2 = -6$ не имеет решений.

Количество решений (корней) уравнения зависит от вида уравнения и от числового множества, над которым рассматривается уравнение.

Решение уравнения с $n$ неизвестными заключается в том, чтобы из указанного в условии задачи множества чисел найти все такие упорядоченные $n$-ки чисел, при которых данное уравнение обращается в верное равенство (тождество).

### Уравнение с одним неизвестным.

Определение 1. Уравнением с одним неизвестным называется равенство

$$f_1(x) = f_2(x), \tag{4.1}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — аналитически заданные функции переменной (неизвестной) $x$ над числовым множеством $M$. (Понятие функции, ее области определения, способы задания и классификация функций рассмотрены в гл. 7).

Например:

1) $x^3 - 5x = \frac{1}{x} - 2$; здесь $f_1(x) \equiv x^3 - 5x$, а $f_2(x) \equiv \frac{1}{x} - 2$;

2) $x + \sqrt{x^2 - 6x + 3} = 0$; здесь $f_1(x) \equiv x + \sqrt{x^2 - 6x + 3}$, а $f_2(x) \equiv 0$.

Определение 2. Решением (корнем) уравнения (4.1) с одним неизвестным называется такое численное значение неизвестной, взятое из множества чисел, указанных в условии уравнения, которое обращает данное уравнение в тождество.

Например, решением уравнения $2x^2 - 5x + 2 = 0$, если $x \in N$, будет $x = 2$, так как $x = 2 \in N$ и обращает данное уравнение в тождество $0 \equiv 0$, а $x = \frac{1}{2}$, хотя и обращает уравнение в тождество $2 \cdot \frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{1}{2} + 2 \equiv 0$, не принадлежит к множеству натуральных чисел $\left(\frac{1}{2} \overline{\in} N\right)$ и решением данного уравнения не будет.

Определение 3. Решить уравнение значит найти множество всех его решений или показать, что оно решений не имеет.

Определение 4. Областью определения уравнения (4.1) или областью допустимых значений неизвестного (ОДЗН) уравнения (4.1) называется множество всех значений $x$, взятых из числового множества, над которым задано уравнение, при которых существуют обе функции (части уравнения) $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Для сокращения область определения уравнения будем обозначать буквой $D$.

Пример 1. Найти область определения уравнения

$$\frac{x}{x-2} + \sqrt{6 - x} = \sqrt{x + 2} + \frac{1}{x + 1},$$

где $x \in Z$ ($Z$ — множество целых чисел).

Р е ш е н и е. Левая часть уравнения $f_1(x) = \frac{x}{x-2} + \sqrt{6-x}$ определена при

$$\begin{cases} x \neq 2, \\ 6 - x \geqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \neq 2, \\ x \leqslant 6, \end{cases}$$

т. е. на множестве следующих целых чисел:

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6\}.$$

Правая часть уравнения $f_2(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x+1}$ определена при

$$\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ x \neq -1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \neq -1, \end{cases}$$

т. е. на множестве следующих целых чисел:

$$\{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}.$$

Областью определения данного уравнения будет общая часть определения левой и правой частей уравнения (пересечение найденных множеств), т. е.

$$D = \{-2, 0, 1, 3, 4, 5, 6\}.$$

О т в е т. $D = \{-2, 0, 1, 3, 4, 5, 6\}$.

П р и м е р 2. Найти область определения уравнения

$$\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - x} = \frac{\sqrt{5-x}}{3-x},$$

где $x \in R$ ($R$ — множество действительных чисел).

Р е ш е н и е. Левая часть уравнения $f_1(x) \equiv \sqrt{x} + \sqrt{x^2 - x}$ определена при

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - x \geqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x(x-1) \geqslant 0; \end{cases}$$

отсюда находим $x = 0$ или $x \geqslant 1$.

Правая часть уравнения $f_2(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{3-x}$ определена при

$$\begin{cases} 5 - x \geqslant 0, \\ 3 - x \neq 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leqslant 5 \\ x \neq 3, \end{cases}$$

т. е. $x < 3$ или $3 < x \leqslant 5$.

Областью определения данного уравнения будет общая часть областей определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, т. е.

$$x = 0, \ 1 \leqslant x < 3, \ 3 < x \leqslant 5.$$

О т в е т. $x = 0$, $1 \leqslant x < 3$ или $3 < x \leqslant 5$.

П р и м е р 3. Найти область определения уравнения

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} = 2 - x,$$

где $x \in Q$ ($Q$ — множество рациональных чисел).

Р е ш е н и е. Левая часть уравнения $f_1(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x-5}$ существует при

$$\begin{cases} 3-x \geqslant 0, \\ x-5 \geqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant 5. \end{cases}$$

Последняя система неравенств несовместима, т. е. не имеет решений в множестве рациональных чисел.

О т в е т. Уравнение не существует.

Необходимым условием того, что число $x = a$ является решением (корнем) уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ с областью определения $D$, есть принадлежность числа $a$ области $D$, т. е. $x \in D$.

Действительно, если $x = a$ — решение данного уравнения, то $f_1(a) \equiv f_2(a)$, т. е. при $x = a$ обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — определены, а это значит, что $a \in D$.

Если $x = b$ не принадлежит области определения некоторого уравнения с одним неизвестным, то $x = b$ не может быть корнем этого уравнения.

### Равносильные уравнения и основные теоремы о равносильности уравнений.

О п р е д е л е н и е 5. Если все решения уравнения (1) являются решениями уравнения (2), то уравнение (2) называется следствием уравнения (1).

Записывается это сокращенно так:

$$(1) \Rightarrow (2),$$

где «$\Rightarrow$» — знак логического следования.

Запись $(1) \Rightarrow (2)$ — читается: «Из уравнения (1) следует уравнение (2)».

О п р е д е л е н и е 6. Два уравнения (1) и (2) с одним и тем же неизвестным называются равносильными (эквивалентными), если уравнение (1) является следствием уравнения (2) и, наоборот, уравнение (2) является следствием уравнения (1) или если оба уравнения решений не имеют.

Равносильность уравнений сокращенно записывают так:

$$(1) \Leftrightarrow (2),$$

где «$\Leftrightarrow$» — знак логической равносильности (эквивалентности).

Другими словами, два уравнения относительно одного и того же неизвестного равносильны, если множества их решений совпадают.

Равносильность уравнений устанавливается с помощью следующих теорем.

**Теорема 1.** *Если над частями данного уравнения произвести тождественные преобразования, не меняющие области определения этого уравнения, то получим уравнение, равносильное данному,* т. е.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = f_2(x) & (1) \\ \updownarrow & (4.2) \\ F_1(x) = F_2(x), & (2) \end{array}$$

если $f_1(x) \equiv F_1(x)$ и $f_2(x) \equiv F_2(x)$ в области определения $D$ уравнений (1) и (2).

Доказательство. а) Пусть уравнение (1) имеет решения и $x = a$ — любое из них. Тогда (по определению 2) $f_1(a) \equiv f_2(a)$, а по условию теоремы $f_1(a) \equiv F_1(a)$ и $f_2(a) \equiv F_2(a)$. По транзитивному свойству из тождеств

$$F_1(a) \equiv f_1(a),\ f_1(a) \equiv f_2(a) \text{ и } f_2(a) \equiv F_2(a)$$

получаем

$$F_1(a) \equiv F_2(a),$$

а это означает, что любое решение уравнения (1) является решением уравнения (2), т. е. (1) $\Rightarrow$ (2).

б) Пусть уравнение (2) имеет решения и $x = b$ — любое из них. Тогда $F_1(b) \equiv F_2(b)$ и по условию теоремы $f_1(b) \equiv F_1(b)$ и $f_2(b) \equiv F_2(b)$, отсюда $f_1(b) \equiv f_2(b)$, а это значит, что любое решение уравнения (2) является решением уравнения (1), т. е. (2) $\Rightarrow$ (1).

Для завершения доказательства теоремы надо показать, что если уравнение (1) не имеет решений, то и уравнение (2) их не имеет, и наоборот.

Докажем это методом от противного. Предположим, что уравнение (1) не имеет решений, а уравнение (2) имеет их; тогда это противоречит доказанному, что (2) $\Rightarrow$ (1). Аналогично доказывается, что если уравнение (2) не имеет решений, то и уравнение (1) не имеет их.

Таким образом, (1) $\leftrightarrow$ (2). Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Если к обеим частям данного уравнения прибавить одно и то же число или одно и то же выражение, имеющее числовой смысл при всех значениях неизвестного из области определения этого уравнения, то получим уравнение, равносильное данному,* т. е.

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad (1)$$

$$\updownarrow \qquad (4.3)$$

$$f_1(x) + m(x) = f_2(x) + m(x), \qquad (2)$$

если $m(x)$ — число или выражение, имеющее числовой смысл при всех значениях $x$ из области определения уравнения (1).

Доказательство. а) Пусть уравнение (1) имеет решения и $x = a$ — любое из них. Тогда $f_1(a) \equiv f_2(a)$ и по условию теоремы $m(a)$ — некоторое число. По свойству (2.3) тождеств получаем, что

$$f_1(a) + m(a) \equiv f_2(a) + m(a),$$

а это значит, что (1) $\Rightarrow$ (2).

б) Пусть уравнение (2) имеет решения и $x = b$ — любое из них. Тогда $f_1(b) + m(b) \equiv f_2(b) + m(b)$; отсюда по свойству (2.3) для тождеств

$$f_1(b) \equiv f_2(b),$$

а это значит, что (2) $\Rightarrow$ (1).

Если одно из уравнений — (1) или (2) — не имеет решений, то, как было показано в теореме 1, и второе не имеет их.

Таким образом, (1) $\leftrightarrow$ (2), что и требовалось доказать.

Следствие. Члены уравнения можно переносить из одной части уравнения в другую, изменив их знаки на противоположные.

**Теорема 3.** *Если обе части данного уравнения умножить на одно и то же число, не равное нулю, или на одно и то же выражение, имеющее числовой смысл и не равное нулю при всех значениях неизвестного из области определения этого уравнения, то получим уравнение, равносильное данному,* т. е.

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad (1)$$

$$\updownarrow \qquad (4.4)$$

$$f_1(x) \cdot m(x) = f_2(x) \cdot m(x), \qquad (2)$$

если число или выражение $m(x) \neq 0$ при всех значениях $x$ из области определения уравнения (1).

Доказать эту теорему предлагаем читателю.

Следствие 1. Если среди членов уравнения есть дробные, то от них можно избавиться умножением обеих частей уравнения на НОК знаменателей дробных членов, причем полученное уравнение равносильно данному при всех значениях неизвестного, при которых НОК не равно нулю.

Следствие 2. Если все члены уравнения делятся на одно и то же число или выражение, не равное нулю при всех значениях неизвестного из области определения уравнения, то их можно разделить на это число или выражение.

**Теорема 4** (о транзитивном свойстве равносильных уравнений). *Если уравнение (1) равносильно уравнению (2), а уравнение (2) равносильно уравнению (3),* то *уравнение (1) равносильно уравнению (3),* т. е.

если

$$(1) \leftrightarrow (2), \text{ а } (2) \leftrightarrow (3),$$

то

$$(1) \leftrightarrow (3). \qquad (4.5)$$

Доказать эту теорему предлагаем читателю.

При преобразованиях уравнения область его определения (область допустимых значений неизвестного) может изменяться. Полученное уравнение в общем случае не равносильно данному. Если при некоторых преобразованиях область определения уравнения расширяется, то полученное уравнение может иметь корни, посторонние для данного уравнения. В частности, если корнями полученного уравнения окажутся те значения неизвестного, которые не принадлежат области определения данного уравнения, то они для последнего будут посторонними; те корни полученного уравнения, которые принадлежат к области определения данного уравнения, следует проверить подстановкой в него (они также могут оказаться посторонними).

Так, если обе части данного уравнения возвести в одну и ту же степень, то все его корни будут корнями полученного уравнения, т. е. полученное уравнение всегда будет следствием данного; обратное утверждение не всегда имеет место.

Если при некоторых преобразованиях данного уравнения область определения полученного уравнения сузилась по сравнению с областью определения данного уравнения, то полученное уравнение может не содержать всех корней данного. В частности, если данное уравнение имело корни, которые принадлежат к той части его области определения, на которую сузилась область определения полученного уравнения, то они при решении полученного уравнения не будут найдены. Следовательно, при таком решении можно потерять корни

данного уравнения. При таком способе решения необходимо дополнительно исследовать, нет ли среди тех значений неизвестного, на которые сузилась область определения данного уравнения, его решений (корней). Иногда это делается непосредственной проверкой. При решении уравнений желательно избегать тождественных преобразований, ведущих к сужению их области определения.

Если решение данного уравнения проведено исключительно на основании теорем 1, 2, 3 и 4 данного параграфа, то проверка найденных корней не обязательна. Если же приходилось пользоваться какими-либо преобразованиями, не входящими в условия этих теорем, то проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения обязательна, т. е. является составной частью решения уравнения. Последнее относится преимущественно к иррациональным, показательным, логарифмическим и тригонометрическим уравнениям.

## § 2. Целые рациональные алгебраические уравнения с одним неизвестным первой и второй степени

Всякое целое рациональное алгебраическое уравнение $n$-й степени с одним неизвестным может быть записано в виде

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0), \qquad (4.6)$$

где $a_n$, $a_{n-1}$, ... , $a_0$ — заданные числа (коэффициенты уравнения), $x$ — неизвестное, а $n$ — натуральное число.

Коэффициенты $a_n$ и $a_0$ соответственно называются *старшим коэффициентом* и *свободным членом уравнения* (4.6).

*Дробным рациональным алгебраическим уравнением с одним неизвестным* называется уравнение, обе части которого есть рациональные алгебраические выражения относительно неизвестного и хотя бы одна часть которого есть дробное выражение относительно неизвестного, т. е. кроме действий сложения, умножения и возведения в натуральную степень, которые могут и отсутствовать, в уравнении обязательно указано действие деления на целое рациональное алгебраическое выражение относительно неизвестного.

Всякое дробное рациональное алгебраическое уравнение, по следствию 1 из теоремы 3 (§ 1, гл. 4) может быть приведено к целому. Поэтому важнейшими из алгебраических уравнений являются целые рациональные алгебраические уравнения.

### Уравнения первой степени с одним неизвестным

Целое рациональное алгебраическое уравнение первой степени называют просто *уравнением первой степени.*

Всякое уравнение первой степени с одним неизвестным может быть приведено к каноническому виду

$$ax + b = 0 \qquad (a \neq 0). \qquad (4.7)$$

Уравнение (4.7) является частным случаем уравнения (4.6), если в последнем положить $n = 1$, $a_1 = a$ и $a_0 = b$.

**Теорема 5.** *Уравнение*

$$ax + b = 0 \qquad (a \neq 0)$$

*в множестве действительных чисел всегда имеет решение, и притом только одно:*

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Доказательство. Данное уравнение

$$ax + b = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{1}$$

по следствию из теоремы 2 равносильно уравнению

$$ax = -b. \tag{2}$$

Поскольку $a \neq 0$, то по следствию 2 из теоремы 3 (§ 1, гл. 4) обе части уравнения (2) можно разделить на $a$; тогда получим уравнение

$$x = -\frac{b}{a}, \tag{3}$$

равносильное уравнению (2). По теореме 4 уравнение (1) равносильно уравнению (3); но уравнение (3) имеет только одно решение, так как деление действительных чисел однозначно.

Таким образом, уравнение (1) имеет единственное решение

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Если уравнение (4.7) задано на множестве целых чисел, рациональных чисел или на некотором другом подмножестве действительных чисел, то это уравнение решают на множестве действительных чисел, а затем устанавливают, принадлежит ли найденное решение множеству чисел, над которым задано уравнение.

Замечание. Уравнение $ax + b = 0$ рассматривают и при $a = 0$. В этом случае оно называется линейным. Тогда при $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение; если $a = 0$ и $b = 0$, то это уравнение принимает вид

$$0 \cdot x + 0 = 0$$

и имеет бесчисленное множество решений (любое действительное число — решение уравнения). Если же $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение принимает вид

$$0 \cdot x + b = 0,$$

т. е. при любом действительном значении $x$ равенство неверно. В этом случае говорят, что уравнение решений не имеет.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{x+4}{3} + \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{x+4}{4}$$

в множестве действительных чисел ($x \in R$).

Решение. Преобразуем данное уравнение, пользуясь теоремами о равносильности уравнений:

$$\frac{x+4}{3}+\frac{x-1}{2}=1+\frac{x+4}{4}, \mid \cdot 12 \qquad (1)$$

$$\updownarrow \qquad \text{теорема (4.4)}$$

$$4(x+4)+6(x-1)=12+3(x+4), \qquad (2)$$

$$\updownarrow \qquad \text{теорема (4.2)}$$

$$4x+16+6x-6=12+3x+12, \qquad (3)$$

$$\updownarrow \qquad \text{теорема (4.3)}$$

$$4x+6x-3x=12+12-16+6, \qquad (4)$$

$$\updownarrow \qquad \text{теорема (4.2)}$$

$$7x=14, \mid :7 \qquad (5)$$

$$\updownarrow \qquad \text{теорема (4.4)}$$

$$x=2. \qquad (6)$$

По теореме (4.5) уравнение (1) $\leftrightarrow$ (6), поэтому уравнение (1) имеет решение (корень) $x=2$.

Ответ. $x=2$.

Замечание. При решении уравнений обычно записывают только преобразования, однако необходимо знать, на основании каких свойств уравнений они выполняются.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{x-3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{x-1}{4}$$

в множестве натуральных чисел, т. е. $x \in N$.

Решение. Преобразуем уравнение, не указывая ссылок на соответствующие теоремы равносильности:

$$\frac{x-3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{x-1}{4}, \mid \cdot 12$$

$$\updownarrow$$

$$6x-18+4=3x-3,$$

$$\updownarrow$$

$$3x=11,$$

$$\updownarrow$$

$$x=\frac{11}{3}.$$

Поскольку значение $x=\frac{11}{3}$ не является натуральным числом, т. е. $\frac{11}{3} \notin N$, то данное уравнение решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

**Уравнение второй степени с одним неизвестным.** Целое рациональное алгебраическое уравнение второй степени называется *уравнением второй степени* или *квадратным уравнением.*

Всякое квадратное уравнение с одним неизвестным можно привести к каноническому виду

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0). \tag{4.8}$$

Уравнение (4.8) является частным случаем уравнения (4.6), если в последнем положить $n = 2$, $a_2 = a$, $a_1 = b$ и $a_0 = c$.

Квадратное уравнение (4.8), записанное в канонической форме, называется неполным, если хотя бы один из его коэффициентов, кроме старшего ($a$), равен нулю.

Если все коэффициенты квадратного уравнения, записанного в каноническом виде, отличны от нуля, то оно называется *полным*.

Полное квадратное уравнение, старший коэффициент которого равен 1 ($a = 1$), называется *приведенным* квадратным уравнением. Приведенное квадратное уравнение принято записывать в виде

$$x^2 + px + q = 0. \tag{4.9}$$

**Неполные квадратные уравнения и их решения.**

А. Если $b = c = 0$, то уравнение (4.8) принимает вид

$$ax^2 = 0 \qquad (a \neq 0).$$

Решая это уравнение в множестве действительных чисел, получим

$$x^2 = 0;$$

отсюда $x_1 = x_2 = 0$.

Б. Если $b = 0$, то уравнение (4.8) принимает вид

$$ax^2 + c = 0.$$

Решая это уравнение в множестве действительных чисел, получим

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Если $\frac{c}{a} < 0$, то $-\frac{c}{a} > 0$ и данное уравнение равносильно уравнению

$$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}},$$

откуда при $x < 0$ находим $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, а при $x > 0$ находим $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Если $\frac{c}{a} > 0$, то $-\frac{c}{a} < 0$ и данное уравнение решений не имеет.

В. Если $c = 0$, то уравнение (4.8) принимает вид

$$ax^2 + bx = 0.$$

Решая это уравнение в множестве действительных чисел, получим

$$x(ax+b)=0,$$

откуда находим $x_1=0$ или $x_2=-\frac{b}{a}$.

**Формулы корней полного квадратного уравнения.**

**Теорема 6.** *Если* $b^2-4ac\geqslant 0$ (*дискриминант уравнения*), *то уравнение (4.8) в множестве действительных чисел имеет два и только два действительных корня, которые определяются по формулам*

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \textit{или} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{4.10}$$

Доказательство. Умножив обе части уравнения (4.8) на $4a\neq 0$, получим уравнение

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0, \tag{1}$$

по теореме (4.4) равносильное уравнению (4.8).

В левой части уравнения (1) выделим полный квадрат; получим уравнение

$$(2ax+b)^2-b^2+4ac=0, \tag{2}$$

равносильное уравнению (1) по теореме (4.2).

Перенесем члены уравнения (2), не содержащие неизвестного, в правую часть; получим уравнение

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac, \tag{3}$$

равносильное уравнению (2) по следствию теоремы (4.3).

Если $b^2-4ac\geqslant 0$, то, извлекая корень квадратный (арифметический) из обеих частей уравнения (3), получим уравнение

$$|2ax+b|=\sqrt{b^2-4ac}, \tag{4}$$

равносильное уравнению (3) по теореме (4.2).

По теореме (4.2) уравнение (4) равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{aligned} -2ax-b&=\sqrt{b^2-4ac} \text{ при } 2ax+b<0,\\ 2ax+b&=\sqrt{b^2-4ac} \text{ при } 2ax+b\geqslant 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Из совокупности уравнений (5) по теореме 5 находим

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\\ x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку все преобразования уравнения (4.8) выполнены на основании теорем равносильности уравнений, то, по теореме (4.5), (4.8) $\leftrightarrow$ (6).

Таким образом, уравнение (4.8) в множестве действительных чисел, если $b^2 - 4ac \geqslant 0$, имеет два и только два действительных решения, определяемых формулами (4.10), т. е.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если $b^2 - 4ac > 0$, то $x_1 \neq x_2$, а если $b^2 - 4ac = 0$, то $x_1 = x_2$.

*Замечание.* Если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение (4.8) действительных решений не имеет.

В частном случае, если $b=2k$, т. е. для уравнения $ax^2 + 2kx + c=0$, формула принимает вид

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \tag{4.11}$$

Если уравнение приведенное, т. е. имеет вид $x^2 + px + q = 0$, то для определения его корней в формулу (4.10) следует подставить $a = 1$, $b = p$, $c = q$; тогда получим

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{4.12}$$

**Теорема Виета** (свойства корней квадратного уравнения).

1. *Сумма корней квадратного уравнения равна частному от деления второго коэффициента на первый с противоположным знаком*, т. е.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p. \tag{4.13}$$

2. *Произведение корней квадратного уравнения равно частному от деления свободного члена на первый коэффициент*, т. е.

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = q. \tag{4.14}$$

Для доказательства теоремы Виета достаточно воспользоваться формулами (4.10) и (4.12).

**Исследование корней квадратного уравнения** записанного в каноническом виде (4.8), по его коэффициентам $a$, $b$ и $c$ и дискриминанту $D = b^2 - 4ac$.

При исследовании полагаем $a > 0$.

1. Если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных различных корня.

Если $c > 0$, то корни имеют одинаковые знаки, противоположные знаку второго коэффициента $b$. Если $c < 0$, то корни имеют разные знаки, причем по абсолютной величине будет большим тот из них, знак которого противоположен знаку второго коэффициента $b$.

2 Если $D = 0$, то уравнение имеет действительные и равные между собой корни (знак которых противоположен знаку $b$).

3. Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней. Представим исследование уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в форме табл. 2.

Таблица 2

| $D$ | $a$ | $b$ | $c$ | $x_1$ | $x_2$ | Примечание |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | − | − | |
| + | + | − | + | + | + | |
| + | + | + | − | − | + | $\lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$ |
| + | + | − | − | − | + | $\lvert x_1\rvert < \lvert x_2\rvert$ |
| 0 | + | + | + | − | − | $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ |
| 0 | + | − | + | + | + | $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ |
| − | + | + | + | Действительных корней нет (корни комплексные) | | |
| − | + | − | + | | | |

Знак «+» означает, что соответствующая величина положительная, знак «—» — отрицательная.

Предлагаем читателю провести исследование для случая $a < 0$ и для неполных квадратных уравнений, а также доказать для квадратного уравнения следующие утверждения:

1. Если в данном квадратном уравнении поменять местами $a$ и $c$, то получим уравнение, корни которого обратны корням данного.

2. Если в квадратном уравнении поменять знак второго коэффициента, то получим уравнение, корни которого противоположны корням данного.

3. Если в квадратном уравнении $a$ и $c$ имеют разные знаки, то оно имеет действительные корни.

4. Если $a > 0$ и $D \equiv 0$, то левая часть квадратного уравнения (4.8) есть полный квадрат и, наоборот, если левая часть уравнения (4.8) есть полный квадрат, то $a > 0$ и $D \equiv 0$.

5. Если все коэффициенты уравнения рациональны и дискриминант — точный квадрат, то корни уравнения рациональны.

6. Если все коэффициенты уравнения — действительные числа и дискриминант уравнения неотрицателен, то корни уравнения действительны

### Разложение квадратного трехчлена на множители

Выражение $ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ называется квадратным трехчленом.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного трехчлена.

Если $D \geqslant 0$, то квадратный трехчлен разлагается на множители с действительными коэффициентами:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \qquad (4\ 15)$$

где $x_1$ и $x_2$ — корни (нули) квадратного трехчлена, определяемые по формуле (4.10).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}.$$

Решение. Данное уравнение определено при $x \neq -4$ и $x \neq 0{,}5$. Решая это уравнение, получим уравнение

$$6x^2-x-1=0,$$

которое равносильно данному при $x \neq -4$ и $x \neq 0{,}5$.

Из полученного уравнения по формулам (4.10) находим $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$. Значение $x_2=\frac{1}{2}$ не принадлежит к области определения данного уравнения и его корнем быть не может.

Ответ. $x=-\frac{1}{3}$.

Пример 2. Корни уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ таковы, что $x_1^2+x_2^2=112$. Определить величину $a$.

Решение. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=3a, \\ x_1x_2=a^2. \end{cases}$$

Возведем обе части первого равенства в квадрат:

$$x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=9a^2;$$

учитывая, что $x_1^2+x_2^2=112$, а $x_1x_2=a^2$, найдем

$$112+2a^2=9a^2,$$

или

$$7a^2=112; \quad a^2=16; \quad a=\pm 4.$$

Проверка показывает, что $a_1=-4$ и $a_2=4$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $a_1=-4$, $a_2=4$.

Пример 3. В уравнении $(k^2-5k+3)x^2+(3k-1)x+2=0$ определить $k$ так, чтобы один из корней был вдвое больше другого.

Решение. Заметим, что кратное сравнение имеет место только для положительных чисел.

По теореме Виета и условию задачи имеем систему

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1-3k}{k^2-5k+3}, \\ x_1x_2=\dfrac{2}{k^2-5k+3}, \\ 2x_1=x_2 \ (x_1>0,\ x_2>0). \end{cases}$$

Подставляя в первое и второе уравнения $x_2 = 2x_1$, получим

$$\begin{cases} 3x_1 = \dfrac{1-3k}{k^2-5k+3}, \\ 2x_1^2 = \dfrac{2}{k^2-5k+3}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-3k}{3(k^2-5k+3)}, \\ x_1^2 = \dfrac{1}{k^2-5k+3}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{(1-3k)^2}{9(k^2-5k+3)^2} = \frac{1}{k^2-5k+3},$$

или

$$\frac{(1-3k)^2}{9(k^2-5k+3)} = 1,$$

откуда

$$1-6k+9k^2 = 9k^2-45k+27,$$

или

$$39k = 26 \text{ и } k = \frac{2}{3}.$$

Необходимо проверить, будут ли при $k = \frac{2}{3}$ корни данного уравнения положительными. Для этого подставим в него $k = \frac{2}{3}$.

После упрощений получим уравнение $x^2 + 9x + 18 = 0$, корни которого $x_1 = -6$, $x_2 = -3$ отрицательные и кратно не сравниваются.

Ответ. Решений нет.

Пример 4. Определить все значения $a$, при которых уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют хотя бы один общий действительный корень.

Решение. Пусть общим корнем данных уравнений является $x = \alpha$. Тогда имеем тождества

$$\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + 1 \equiv 0, \\ \alpha^2 + \alpha + a \equiv 0, \end{cases}$$

из которых после вычитания получим

$$\alpha(a-1) + 1 - a \equiv 0,$$

откуда следует, что $\alpha = 1$ при $a \neq 1$.

При $\alpha = 1$ получаем из первого (или второго) уравнения

$$1 + a + 1 = 0; \quad a = -2.$$

Непосредственно убеждаемся, что при $a = -2$ уравнения имеют общий действительный корень $x = 1$. Проверим, имеют ли они общий корень при $a = 1$. При $a = 1$ заданные уравнения обращаются в уравнения $x^2 + x + 1 = 0$ и $x^2 + x + 1 = 0$, которые действительных корней не имеют.

Ответ. $a = -2$.

Пример 5. При каком значении $a$ один из корней уравнения $x^2 - 8x + 4a = 0$ будет втрое меньше одного из корней уравнения $x^2 + x - 14a = 0$?

Решение. Пусть первое уравнение имеет корень $x = \alpha$ ($\alpha > 0$), а второе $x = 3\alpha$, тогда имеем тождества

$$\begin{cases} \alpha^2 - 8\alpha + 4a \equiv 0, \\ 9\alpha^2 + 3\alpha - 14a \equiv 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 9\alpha^2 - 72\alpha + 36a \equiv 0, \\ 9\alpha^2 + 3\alpha - 14a \equiv 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого тождества второе, получим $75\alpha - 50a \equiv 0$, или $\alpha \equiv \frac{2}{3} a$.

Подставляя найденное значение $\alpha$ в первое уравнение, получим уравнение относительно $a$

$$\frac{4}{9} a^2 - \frac{16}{3} a + 4a = 0,$$

или

$$a^2 - 12a + 9a = 0,$$

откуда находим $a(a - 3) = 0$ и $a_1 = 0$, $a_2 = 3$. Проверкой по условию задачи убеждаемся, что $a = 3$.

Ответ. $a = 3$.

Пример 6. Определить значение $a$ так, чтобы сумма квадратов корней уравнения $x^2 - (2a - 1)x - 4a - 3 = 0$ была наименьшей.

Решение. По теореме Виета,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a - 1, \\ x_1 x_2 = -4a - 3. \end{cases}$$

Возведем обе части первого уравнения в квадрат:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = (2a - 1)^2.$$

Учитывая второе равенство, получим

$$x_1^2 + x_2^2 = (2a - 1)^2 + 2(4a + 3).$$

Представим это равенство в виде

$$x_1^2 + x_2^2 = 4a^2 + 4a + 7 = (2a + 1)^2 + 6,$$

откуда следует, что сумма квадратов корней будет наименьшей, если $2a + 1 = 0$, или $a = -\frac{1}{2}$.

Ответ. $a = -\frac{1}{2}$.

Пример 7. При каких целых значениях $n$ корни уравнения $nx^2 + (2n - 1)x + n - 2 = 0$, где $n \neq 0$, рациональны?

Решение. Так как все коэффициенты данного квадратного уравнения рациональны, то для решения задачи достаточно определить, при каких целых значениях $n$ дискриминант уравнения будет точным квадратом. Вычислим $D$:

$$D = (2n - 1)^2 - 4n(n - 2) = 4n + 1.$$

Корни будут действительными (в том числе рациональными) если $4n + 1 \geqslant 0$, или $n \geqslant -\frac{1}{4}$. Поскольку $n$ — целое число и $n \neq 0$, то $n = 1, 2, 3, \ldots$ Выясним, при каких значениях $n$ дискриминант $D$ будет точным квадратом.

Пусть $4n + 1 = k^2$, где $k$ — целое число; тогда

$$n = \frac{k^2 - 1}{4} = \frac{(k - 1)(k + 1)}{4};$$

$n$ есть целое число, если $(k - 1)(k + 1)$ делится на 4. Если $k$ — четное, то оба сомножителя нечетны и их произведение не делится на 4. Если $k$ — нечетное, т. е. $k = 2m + 1$, то $(k - 1)(k + 1) = 4m(m + 1)$ делится на 4; следовательно, $n = m(m + 1)$. Учитывая, что $n > 0$, получаем $n = m(m + 1)$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$

Ответ. Уравнение имеет рациональные корни, если $n = m(m + 1)$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$

Пример 8. Доказать, что при любых действительных $a$, $p$ и $q$ уравнение

$$\frac{1}{x - p} + \frac{1}{x - q} = \frac{1}{a^2} \tag{1}$$

имеет действительные корни.

Решение. Приведем уравнение к целому виду, умножив обе его части на $a^2(x - p)(x - q) \neq 0$, при $a \neq 0$, $x \neq p$, $x \neq q$:

$$a^2(x - q) + a^2(x - p) = (x - p)(x - q),$$

или

$$x^2 - (p + q + 2a^2)x + pq + a^2p + a^2q = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) равносильно уравнению (1), если $a \neq 0$, $x \neq p$ и $x \neq q$.

Найдем соотношения между $p$ и $q$, при которых $x = p$ или $x = q$. Для этого подставим $x = p$ в уравнение (2); получим $p^2 - (p + q + 2a^2)p + pq + a^2p + a^2q = 0$ или $a^2(p - q) = 0$ при $a \neq 0$, откуда найдем $q = p$.

Подставив в уравнение (2) $x = q$, получим $q^2 - (p + q + 2a^2)q + pq + a^2p + a^2q = 0$, или $a^2(p - q) = 0$ при $a \neq 0$, откуда найдем $p = q$.

Таким образом, уравнения (1) и (2) равносильны при $a \neq 0$ и $p \neq q$; при $a = 0$ уравнение (1) не имеет смысла.

Уравнение (2) — квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Чтобы решить задачу, достаточно показать, что дискриминант уравнения неотрицателен. Вычислим $D$:

$$D = (p + q + 2a^2)^2 - 4(pq + a^2p + a^2q) =$$
$$= (p + q)^2 + 4a^2(p + q) + 4a^4 - 4pq - 4a^2(p + q) =$$
$$= [(p + q)^2 - 4pq] + 4a^4 = (p - q)^2 + (2a^2)^2.$$

Так как сумма квадратов двух действительных чисел неотрицательна и при этом $a \neq 0$ и $p \neq q$, то $D > 0$. Поэтому корни этого уравнения действительны и различны.

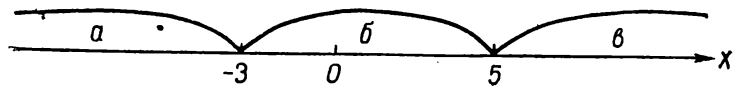



Рис. 7.

Если $p = q$, то уравнение (1) принимает вид

$$\frac{2}{x - p} = \frac{1}{a^2}$$

и при всех действительных значениях $a$ и $p$ ($a \neq 0$) имеет один действительный корень

$$x = 2a^2 + p.$$

Таким образом, при всех действительных значениях $a$, $p$ и $q$, кроме $a = 0$, данное уравнение имеет действительные корни.

Пример 9. Решить уравнение $|x + 3| + |x - 5| = 20$.

Решение. Нанесем на числовую ось те значения $x$, при которых $x + 3 = 0$ и $x - 5 = 0$, т. е. $x = -3$ и $x = 5$, и рассмотрим уравнение на полученных промежутках оси (рис. 7):

а) если $x < -3$, то уравнение принимает вид $-x - 3 - x + 5 = 20$, откуда находим $x_1 = -9$;

б) если $-3 \leqslant x \leqslant 5$, то уравнение принимает вид $x + 3 - x + 5 = 20$, или $8 = 20$; так как $8 \neq 20$, то решений нет;

в) если $x > 5$, то уравнение принимает вид $x + 3 + x - 5 = 20$, откуда находим $x_2 = 11$.

Ответ. $x_1 = -9$, $x_2 = 11$.

Пример 10. Решить уравнение $|x + 3| + |x - 5| = 8$.

Решение. Так как левая часть этого уравнения совпадает с левой частью предшествующего, воспользуемся рис. 7. Рассмотрим уравнение на промежутках числовой оси:

а) если $x < -3$, то $-x - 3 - x + 5 = 8$, откуда следует $x = -3$. Это значение не принадлежит к рассматриваемым числам;

б) если $-3 \leqslant x \leqslant 5$, то $x + 3 - x + 5 = 8$, или $8 = 8$; следовательно, все числа отрезка $-3 \leqslant x \leqslant 5$ есть решения данного уравнения;

в) если $x > 5$, то $x + 3 + x - 5 = 8$, откуда следует $x = 5$. Это значение также не принадлежит к рассматриваемым числам.

Ответ. $-3 \leqslant x \leqslant 5$.

Пример 11. Решить уравнение $|x + 3| + |x - 5| = 4$.

Воспользуемся рис. 7:

а) если $x < -3$, то $-x - 3 - x + 5 = 4$, откуда следует $x = -1$. Это значение не принадлежит к рассматриваемым числам;

б) если $-3 \leqslant x \leqslant 5$, то $x + 3 - x + 5 = 4$, или $8 = 4$; так как $8 \neq 4$, то решений нет;

в) если $x > 5$, то $x + 3 + x - 5 = 4$, откуда следует $x = 3$. Это значение не принадлежит к рассматриваемым числам.

Ответ. Решений нет.

Пример 12. Решить уравнение

$$2x^2 - 5x - 3|x - 2| = 0.$$

Решение. Рассмотрим возможные варианты:

а) если $x < 2$, то уравнение принимает вид $2x^2 - 5x + 3x - 6 = 0$, или $x^2 - x - 3 = 0$, откуда следует $x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. Значение $x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ не принадлежит к рассматриваемым числам;

б) если $x \geqslant 2$, то уравнение принимает вид $2x^2 - 5x - 3x + 6 = 0$, или $x^2 - 4x + 3 = 0$, откуда следует $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Значение $x_1 = 1 < 2$ не принадлежит к рассматриваемым числам.

Ответ. $x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = 3$.

## § 3. Уравнения высших степеней, решение которых приводится к решению квадратных уравнений

Рассмотрим несколько частных случаев, в которых решение уравнений высших степеней приводится к решению квадратных уравнений.

**Биквадратные уравнения.** Биквадратным уравнением называется целое рациональное алгебраическое уравнение четвертой степени, в котором отсутствуют члены нечетной степени (т. е. первой и третьей).

Всякое биквадратное уравнение может быть приведено к каноническому виду

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0). \tag{4.16}$$

Заменив $x^2$ на $t$, получим уравнение $at^2 + bt + c = 0$, из которого находим

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } t_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$ ($a > 0$, $c > 0$, $b^2 - 4ac \geqslant 0$, $b < 0$ или $a < 0$, $c < 0$, $b^2 - 4ac \geqslant 0$, $b > 0$), то биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \tag{4.17}$$

**Уравнения, содержащие взаимно обратные выражения.**

Уравнения, содержащие взаимно обратные выражения и имеющие вид

$$a \cdot \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + b \cdot \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = c, \tag{4.18}$$

решаются с помощью подстановки

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = t. \tag{4.19}$$

Тогда $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{1}{t}$ и относительно $t$ получается уравнение

$$at + b \cdot \frac{1}{t} = c,$$

или

$$at^2 - ct + b = 0. \tag{1}$$

Пусть уравнение (1) имеет корни $t_1$ и $t_2$. Подставив их значения в (4.19), получим совокупность двух уравнений

$$f_1(x) - t_1 f_2(x) = 0,$$

или

$$f_1(x) - t_2 f_2(x) = 0,$$

которая при $f_1(x) \cdot f_2(x) \neq 0$ равносильна уравнению (4.18).

Пример 1. Решить уравнение

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Решение. Областью допустимых значений неизвестного являются $x \neq -1$ и $x \neq 0$. Обозначим $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = t$; тогда $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{1}{t}$. Относительно $t$ уравнение принимает вид

$$t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}, \text{ или } 2t^2 - 3t - 2 = 0,$$

откуда находим $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 2$.

А. $t_1 = -\frac{1}{2}$, или $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = -\frac{1}{2}$; это уравнение действительных решений не имеет.

Б. $t_2 = 2$, или $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 2$, откуда следует $\left|\frac{x}{x+1}\right| = \sqrt{2}$, или $-\frac{x}{x+1} = \sqrt{2}$ и $\frac{x}{x+1} = \sqrt{2}$. Решая эти уравнения, находим $x_1 = -2 - \sqrt{2}$ или $x_2 = -2 + \sqrt{2}$.

Ответ. $x_1 = -2 - \sqrt{2}$, $x_2 = -2 + \sqrt{2}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$3\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2+168\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2-46\frac{x^2-9}{x^2-4}=0.$$

Решение. Уравнение определено при $x\neq\pm 2$. Разделив обе части уравнения на $\frac{x^2-9}{x^2-4}\neq 0$ $(x\neq\pm 3)$, получим

$$3\frac{(x+3)(x+2)}{(x-3)(x-2)}+168\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x+2)}-46=0.$$

Обозначим

$$\frac{(x+3)(x+2)}{(x-3)(x-2)}=t.$$

Тогда относительно $t$ получим уравнение

$$3t+168\cdot\frac{1}{t}-46=0,$$

или

$$3t^2-46t+168=0;$$

отсюда

$$t_1=6,\quad t_2=9\frac{1}{3}.$$

Таким образом, решение данного уравнения приводится к решению совокупности двух уравнений, которые решим последовательно.

а) При $t_1=6$ имеем

$$\frac{(x+3)(x+2)}{(x-3)(x-2)}=6;$$

отсюда получаем уравнение

$$x^2-7x+6=0,$$

из которого находим $x_1=1$, $x_2=6$.

б) При $t_2=9\frac{1}{3}$ имеем

$$\frac{(x+3)(x+2)}{(x-3)(x-2)}=9\frac{1}{3};$$

отсюда получаем уравнение

$$5x^2-31x+30=0,$$

из которого находим $x_3=\frac{6}{5}$, $x_4=5$.

Так как при решении данного уравнения выполнялось деление на выражение $\frac{x^2-9}{x^2-4}$, следует проверить, не являются ли значения $x=\pm 3$ корнями этого уравнения. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x=\pm 3$ не являются корнями данного уравнения.

Ответ. $x_1=1$, $x_2=1{,}2$, $x_3=5$, $x_4=6$.

**Уравнения четвертой степени, решение которых приводится к решению квадратных уравнений путем выделения полного квадрата** рассмотрим на следующих примерах.

Пример 1. Решить уравнение $x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x + 3 = 0$

Решение. В левой части уравнения выделим полный квадрат; получим

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x^2 - 12x + 3 = 0,$$

или

$$(x^2 + 3x)^2 - 4(x^2 + 3x) + 3 = 0.$$

Обозначим $x^2 + 3x$ через $t$; тогда относительно $t$ уравнение примет вид $t^2 - 4t + 3 = 0$, откуда следует $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$.

А. $t_1 = 1$, или $x^2 + 3x = 1$; $x^2 + 3x - 1 = 0$, откуда находим $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Б. $t_2 = 3$, или $x^2 + 3x = 3$, т. е. $x^2 + 3x - 3 = 0$, откуда находим $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Ответ. $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$; $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Решение. Выделим в левой части уравнения полный квадрат; получим

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 + 2x - 1 = 0,$$

или

$$(x^2 + 2x)^2 - (x^2 - 2x + 1) = 0,$$

или

$$(x^2 + 2x)^2 - (x - 1)^2 = 0.$$

Раскладывая левую часть уравнения на множители, как разность квадратов, получаем

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + 3x - 1) = 0.$$

Произведение двух действительных чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них равно нулю.

Из последнего уравнения получаем уравнение

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

которое действительных корней не имеет, и уравнение

$$x^2 + 3x - 1 = 0,$$

из которого находим

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ответ. $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^2+\left(\frac{1}{x+2}\right)^2=\frac{13}{36}.$$

Решение. В левой части уравнения выделим полный квадрат разности. Для этого к обеим частям уравнения прибавим

$$-2\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x+2};$$

тогда получим

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-2\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x+2}+\left(\frac{1}{x+2}\right)^2=\frac{13}{36}-2\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x+2},$$

или

$$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)^2=\frac{13}{36}-2\frac{1}{(x+1)(x+2)},$$

откуда

$$\left[\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right]^2+2\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{13}{36}=0.$$

Обозначим $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=t$; тогда

$$t^2+2t-\frac{13}{36}=0;$$

$$t_1=-\frac{13}{6},\ t_2=\frac{1}{6}.$$

Таким образом, решение данного уравнения приводится к решению совокупности двух уравнений:

а) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=-\frac{13}{6}$; б) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{6}$, первое из которых действительных корней не имеет, а из второго находим

$$x_1=-4,\ x_2=1.$$

Ответ. $x_1=-4,\ x_2=1$.

**Возвратные уравнения.** Целое алгебраическое уравнение

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0 \qquad (4.20)$$

называется возвратным, если

$$a_n=a_0,\ a_{n-1}=a_1,\ a_{n-2}=a_2,\ \ldots$$

Легко показать, что если $x=x_0$ — корень возвратного уравнения, то и $x=\frac{1}{x_0}$ — также корень этого уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$. Разделив обе части уравнения на $x^2\neq 0$, получим

$$2x^2+3x-16+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0,$$

или

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0.$$

Обозначим $x+\frac{1}{x}=t$; тогда $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2$, или $x^2+\frac{1}{x^2}=x^2-2$. Относительно $t$ уравнение принимает вид $2(t^2-2)+3t-16=0$, или $2t^2+3t-20=0$, откуда находим $t_1=-4$ и $t_2=\frac{5}{2}$. Если $t_1=-4$, то $x+\frac{1}{x}=-4$, или $x^2+4x+1=0$; $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$. Если $t_2=\frac{5}{2}$, то $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$, или $2x^2-5x+2=0$; $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=2$.

Ответ. $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=2$.

Пример 2. Найти условие, при котором решение уравнения

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \quad (a\neq 0,\ b\neq 0) \tag{4.21}$$

приводится к решению квадратного уравнения способом деления на $x^2$ (как возвратного).

Разделив обе части уравнения на $x^2$, получим

$$ax^2+bx+c+\frac{d}{x}+\frac{e}{x^2}=0,$$

или

$$a\left(x^2+\frac{e}{ax^2}\right)+b\left(x+\frac{d}{bx}\right)+c=0.$$

Обозначим $x+\frac{d}{bx}=t$; тогда $\left(x+\frac{d}{bx}\right)^2=t^2$, откуда следует $x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}=t^2-\frac{2d}{b}$. Если $\frac{e}{a}=\frac{d^2}{b^2}$, то $x^2+\frac{e}{ax^2}=x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}=t^2-\frac{2d}{b}$. Данное уравнение относительно $t$ принимает вид $a\left(t^2-\frac{2d}{b}\right)+bt+c=0$, или

$$at^2+bt+c-\frac{2ad}{b}=0,$$

т. е. его решение приводится к решению квадратного уравнения.

Вывод. Решение уравнения $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ приводится к решению квадратного уравнения делением на $x^2$ (как возвратного), если

$$\frac{e}{a}=\frac{d^2}{b^2}. \tag{4.22}$$

Поэтому такое уравнение иногда называют также возвратным.

Пример 2. Решить уравнение $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

Решение. Так как условие $\frac{e}{a} = \frac{d^2}{b^2}$ выполняется, т. е. $\frac{50}{2} \equiv \equiv \left(\frac{105}{21}\right)^2$, или $25 \equiv 25$, то обе части уравнения делим на $x^2$; получим

$$2x^2 - 21x + 74 - \frac{105}{x} + \frac{50}{x^2} = 0,$$

или

$$2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0.$$

Обозначим $x + \frac{5}{x} = t$; тогда $x^2 + \frac{25}{x^2} = t^2 - 10$ и относительно $t$ уравнение примет вид $2t^2 - 21t + 54 = 0$, откуда находим $t_1 = \frac{9}{2}$, $t_2 = 6$.

Если $t_1 = \frac{9}{2}$, то $x + \frac{5}{x} = \frac{9}{2}$, откуда $x_1 = 2$; $x_2 = 2{,}5$.

Если $t_2 = 6$, то $x + \frac{5}{x} = 6$, откуда $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2{,}5$, $x_4 = 5$.

Аналогично решаются возвратные уравнения высших степеней. Если степень возвратного уравнения равна $2k$, то заменой $x + \frac{1}{x} = t$ оно приводится к уравнению степени $k$ относительно $t$.

Если возвратное уравнение имеет нечетную степень, то одним из корней этого уравнения будет $x = -1$; разделив обе части этого уравнения на $x + 1$, получим возвратное уравнение четной степени.

**Уравнение вида**

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m \qquad (4.23)$$

приводится к решению квадратного уравнения, если

$$a + b = c + d \text{ (или } a + c = b + d, \text{ или } a + d = b + c). \qquad (4.24)$$

Пример. Решить уравнение $(x + 2)(x - 3)(x + 1)(x + 6) = = -96$.

Решение. Так как $2 + 1 = -3 + 6$, то можно сгруппировать множители левой части уравнения так:

$$[(x + 2)(x + 1)][(x - 3)(x + 6)] = -96,$$

или

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 18) = -96.$$

Обозначим $x^2 + 3x = t$ (можно обозначить $x^2 + 3x + 2 = t$ или $x^2 + + 3x - 18 = t$); тогда относительно $t$ получим $(t + 2)(t - 18) = -96$, или $t^2 - 16t + 60 = 0$, откуда находим $t_1 = 6$ и $t_2 = 10$.

Если $t_1 = 6$, то $x^2 + 3x = 6$, $x^2 + 3x - 6 = 0$; $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$.

Если $t_2 = 10$, то $x^2 + 3x = 10$, $x^2 + 3x - 10 = 0$; $x_3 = -5$, $x_4 = 2$.

Ответ. $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$, $x_3 = -5$, $x_4 = 2$.

Заметим, что уравнения вида (4.21) при условии (4.22) могут быть решены выделением полного квадрата.

**Уравнение вида**

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c \tag{4.25}$$

приводится к биквадратному заменой

$$x = t - \frac{a + b}{2}. \tag{4.26}$$

Заменим

$$\begin{cases} x + a = t + m, \\ x + b = t - m. \end{cases}$$

Вычитая, получим $a - b = 2m$, или $m = \frac{a - b}{2}$; тогда $x + a = t + \frac{a - b}{2}$, или $x = t - \frac{a + b}{2}$. Относительно $t$ уравнение принимает вид

$$\left(t + \frac{a - b}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{a - b}{2}\right)^4 = c,$$

или, после упрощений,

$$t^4 + 6\left(\frac{a - b}{2}\right)^2 t^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^4 = \frac{c}{2}.$$

Пример. Решить уравнение $(x + 6)^4 + (x + 4)^4 = 82$.

Решение. Заменим $x = t - \frac{6 + 4}{2} = t - 5$; тогда относительно $t$ уравнение примет вид $(t + 1)^4 + (t - 1)^4 = 82$, или, после упрощений, $t^4 + 6t^2 - 40 = 0$, откуда находим $t^2 = 4$ и $t^2 = -10$.

При $t^2 = 4$, $t_1 = -2$ и $t_2 = 2$; тогда

$$x_1 = -2 - 5 = -7, \quad x_2 = 2 - 5 = -3.$$

При $t^2 = -10$ уравнение действительных решений не имеет.

Ответ. $x_1 = -7$, $x_2 = -3$.

**Уравнение вида**

$$\frac{ax}{px^2 + nx + q} + \frac{bx}{px^2 + mx + q} = c \tag{4.27}$$

приводится к квадратному заменой

$$px + \frac{q}{x} = t. \tag{4.28}$$

Если $c = 0$, то $x_1 = 0$ и дальнейшее решение приводится к решению квадратного уравнения относительно $x$.

Если $c \neq 0$, то и $x \neq 0$; тогда можно числитель и знаменатель каждой дроби левой части уравнения (4.25) разделить на $x$:

$$\frac{a}{px + n + \frac{q}{x}} + \frac{b}{px + m + \frac{q}{x}} = c.$$

Если в полученном уравнении заменить $px + \frac{q}{x} = t$, то относительно $t$ получим уравнение

$$\frac{a}{t + n} + \frac{b}{t + m} = c,$$

которое при условии $t \neq -n$, $t \neq -m$ приводится к квадратному:

$$ct^2 + (mc + nc - a - b)\,t + mnc - am - bn = 0.$$

Пример. Решить уравнение

$$\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6.$$

Решение. Разделив числитель и знаменатель каждой дроби левой части уравнения на $x$, получим

$$\frac{2}{2x - 5 + \frac{3}{x}} + \frac{13}{2x + 1 + \frac{3}{x}} = 6.$$

Обозначим $2x + \frac{3}{x} = t$; тогда относительно $t$ получим уравнение

$$\frac{2}{t - 5} + \frac{13}{t + 1} = 6 \ (t \neq 5,\ t \neq -1), \text{ или } 2t^2 - 13t + 11 = 0,$$

откуда найдем $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{11}{2}$.

Если $t_1 = 1$, то $2x + \frac{3}{x} = 1$, или $2x^2 - x + 3 = 0$; уравнение действительных корней не имеет.

Если $t_2 = \frac{11}{2}$, то $2x + \frac{3}{x} = \frac{11}{2}$, $4x^2 - 11x + 6 = 0$; $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 2$.

Ответ. $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 2$.

Для приобретения навыков в решении частных случаев уравнений высших степеней, решение которых приводится к решению квадратных уравнений, необходима достаточная тренировка.

## § 4. О делимости многочленов

**Теорема Безу.** *Если многочлен*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

*разделить на двучлен* $x - a$, *то в остатке получим число* $R$, *равное значению данного многочлена при* $x = a$, *т. е.* $R = P_n(a)$.

Доказательство. Пусть при делении $P_n(x)$ на $x - a$ в частном получим многочлен $Q_{n-1}(x)$, а в остатке число $R$ ($R$ не содержит $x$, так как делитель первой степени относительно $x$); тогда, по определению деления многочленов с остатком, имеем тождество $P_n(x) = (x - a)\,Q_{n-1}(x) + R$, из которого при $x = a$ получаем $P_n(a) = R$, или $R = P_n(a)$, что и требовалось доказать.

Следствие. При делении $P_n(x)$ на $ax + b$ получается остаток, который равен значению этого многочлена при $x = -\frac{b}{a}$, т. е. $R = P_n\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Рассмотрим несколько примеров на применение теоремы Безу.

Пример 1. Найти остаток от деления $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$ на $x - 2$.

Решение. По теореме Безу найдем остаток $R = P_3(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 5 = 3$.

Ответ. $R = 3$.

Пример 2. Найти остаток от деления многочлена $P_4(x) = 32x^4 - 64x^3 + 8x^2 + 36x + 4$ на $2x - 1$.

Решение. По следствию из теоремы Безу найдем остаток

$$R = P_4\left(\frac{1}{2}\right) = 32\frac{1}{2^4} - 64\frac{1}{2^3} + 8\frac{1}{2^2} + 36\frac{1}{2} + 4 = 2 - 8 + 2 + 18 + 4 = 18.$$

Ответ. $R = 18$.

Пример 3. Найти, при каком значении $a$ многочлен $P_4(x) = x^4 + ax^3 + 3x^2 - 4x - 4$ делится без остатка на $x - 2$.

Решение. Найдем, при каком значении остаток $R = P_4(2) = 16 + 8a + 12 - 8 - 4 = 8a + 16$ равен нулю. $8a + 16 = 0$, откуда $a = -2$.

Ответ. $a = -2$.

Пример 4. Найти, при каких значениях $a$ и $b$ многочлен $P_3(x) = ax^3 + bx^2 - 73x + 102$ делится без остатка на $x^2 - 5x + 6$.

Решение. Разложим делитель на множители:

$$x^2 - 5x + 6 \equiv (x - 2)(x - 3).$$

Поскольку $x - 2$ и $x - 3$ взаимно простые многочлены, то данный многочлен разделится на $x^2 - 5x + 6$, если он делится на $x - 2$ и на $x - 3$, т. е. если

$$\begin{cases} R_1 = P_3(2) = 8a + 4b - 146 + 102 = 0, \\ R_2 = P_3(3) = 27a + 9b - 219 + 102 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $a = 2$, $b = 7$.

Ответ. $a = 2$; $b = 7$.

Пример 5. Найти, при каких значениях $a$ и $b$ многочлен $P_4(x) = x^4 + ax^3 - 9x^2 + 11x + b$ делится без остатка на $x^2 - 2x + 1$.

Решение. Представим делитель так:

$$x^2 - 2x + 1 \equiv (x-1)^2.$$

Для того чтобы данный многочлен $P_4(x)$ делился на $x^2 - 2x + 1$, достаточно, чтобы он делился на $x - 1$ и частное от деления этого многочлена на $x - 1$ также делилось без остатка на $x - 1$. Многочлен $P_4(x)$ разделится на $x - 1$, если $R_1 = P_4(1) = 1 + a - 9 + 11 + b = 0$, или $b = -a - 3$, т. е. многочлен $P_4(x) = x^4 + ax^3 - 9x^2 + 11x - a - 3$ делится на $x - 1$. Найдем частное от деления этого многочлена на $x - 1$:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + ax^3 - 9x^2 + 11x - a - 3 & x - 1 \\
\underline{-\,x^4 - x^3} & \overline{x^3 + (a+1)x^2 + (a-8)x + (a+3)} \\
(a+1)x^3 - 9x^2 & \\
\underline{-\,(a+1)x^3 - (a+1)x^2} & \\
(a-8)x^2 + 11x & \\
\underline{-\,(a-8)x^2 - (a-8)x} & \\
(a+3)x - a - 3 & \\
\underline{-\,(a+3)x - a - 3} & \\
0 &
\end{array}$$

т. е. $P_4(x) : (x-1) = P_3(x) = x^3 + (a+1)x^2 + (a-8)x + (a+3)$.

Найдем значение $a$, при котором частное $P_3(x)$ делится на $x - 1$:

$$R_2 = P_3(1) = 1 + (a+1) \cdot 1 + (a-8) \cdot 1 + a + 3 = 3a - 3 = 0,$$
$$a = 1;$$

тогда $b = -a - 3 = -4$.

Ответ. $a = 1$, $b = -4$.

**Схема сокращенного деления многочлена на двучлен** (схема Горнера) удобна для деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - a$. Пусть требуется разделить многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ на двучлен $x - a$.

Значение $a$ двучлена, коэффициенты многочлена, коэффициенты частного $(b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0)$ и остаток запишем в следующей форме:

| $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | $\cdots$ | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_{n-1}=a_n$ | $b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1}$ | $b_{n-3}=a_{n-2}+ab_{n-2}$ | $\cdots$ | $b_0=a_1+ab_1$ | $R=a_0+ab_0$ |

Если какая-либо степень $x$ в многочлене отсутствует, то соответствующий коэффициент равен нулю.

Определив коэффициенты по приведенной схеме, записываем частное

$$Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

если $R = 0$,

и результат деления

$$P_n(x) : (x-a) \equiv Q_{n-1}(x) + \frac{R}{x-a},$$

или

$$P_n(x) \equiv (x-a)\,Q_{n-1}(x) + R,$$

если $R \neq 0$.

Пример 1. Разделить $3x^4 - 2x^3 + 4x - 5$ на $x + 3$.

Решение. Согласно схеме Горнера, запишем

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $a_4 = 3$ | $a_3 = -2$ | $a_2 = 0$ | $a_1 = 4$ | $a_0 = -5$ |
| $a = -3$ | | | | | |
| | $b_3 = 3$ | $b_2 = -11$ | $b_1 = 33$ | $b_0 = -95$ | $R = 280$ |

Следовательно, $(3x^4 - 2x^3 + 4x - 5) : (x + 3) = 3x^3 - 11x^2 + 33x - 95 + \frac{280}{x+3}$, или $3x^4 - 2x^3 + 4x - 5 = (x + 3)(3x^3 - 11x^2 + 33x - 95) + 280$.

Пример 2. Разделить $x^4 + ax^3 - 9x^2 + 11x - a - 3$ на $x - 1$.

Решение. Согласно схеме Горнера, запишем

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $a$ | $-9$ | $11$ | $-a-3$ |
| $1$ | | | | | |
| | $1$ | $a+1$ | $a-8$ | $a+3$ | $0$ |

Следовательно, $(x^4 + ax^3 - 9x^2 + 11x - a - 3) : (x - 1) = x^3 + (a + 1)x^2 + (a - 8)x + a + 3$.

Сравните данный способ с делением этого многочлена в упражнении 5 на применение теоремы Безу.

**Признаки делимости суммы или разности одинаковых натуральных степеней на сумму или разность их оснований** формулируются следующим образом:

1. Разность одинаковых натуральных степеней на разность их оснований делится без остатка, т. е.

$$(x^n - a^n) : (x - a) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}. \quad (4.27)$$

Действительно, по теореме Безу, при делении $x^n - a^n$ на $x - a$ остаток $R = P_n(a) = a^n - a^n = 0$.

2. Разность одинаковых четных степеней на сумму их оснований делится без остатка, т. е.

$$(x^{2k} - a^{2k}) : (x + a) = x^{2k-1} - ax^{2k-2} + \cdots + a^{2k-2}x - a^{2k-1}. \quad (4.28)$$

3. Разность одинаковых нечетных натуральных степеней на сумму их оснований не делится.

4. Сумма одинаковых нечетных натуральных степеней на сумму их оснований делится без остатка, т. е.

$$(x^{2k+1}+a^{2k+1}):(x+a)=x^{2k}-ax^{2k-1}+\cdots-a^{2k-1}x+a^{2k}. \quad (4.29)$$

5. Сумма одинаковых четных натуральных степеней на сумму их оснований не делится.

6. Сумма одинаковых натуральных степеней на разность их оснований без остатка не делится.

Утверждения 2—6 доказываются аналогично утверждению 1 (докажите).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Доказать, что $3^{4n+4}-4^{3n+3}$ делится на 17, где $n$ — натуральное число или 0.

Доказательство. Представим данную разность, учитывая (4.27), в виде

$$3^{4n+4}-4^{3n+3}=(3^4)^{n+1}-(4^3)^{n+1}=81^{n+1}-64^{n+1}=$$
$$=(81-64)(81^n+81^{n-1}\cdot 64+\cdots+64^n)=17N,$$

где $N$ — результат вычисления во вторых круглых скобках — целое число. Следовательно, $3^{4n+4}-4^{3n+3}=17N$ делится на 17.

Пример 2. При каком значении $m$ многочлен $x^3+y^3+z^3+mxyz$ разделится без остатка на $x+y+z$, где $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, $y+z\neq 0$, $x+y+z\neq 0$.

Решение. Остаток от деления $x^3+y^3+z^3+mxyz$ на $x+(y+z)$ получим, если вместо $x$ в данный многочлен подставим $-(y+z)$, т. е.

$$R=P_3[-(y+z)]=(-y-z)^3+y^3+z^3-m(y+z)yz.$$

Чтобы деление выполнилось без остатка, $R$ должно равняться нулю, т. е.

$$-(y+z)^3+y^3+z^3-m(y+z)yz=0,$$
$$-3yz(y+z)-m(y+z)yz=0,$$

или

$$yz(y+z)(3+m)=0.$$

Поскольку $yz(y+z)\neq 0$, то $3+m=0$ и $m=-3$.

Ответ. $m=-3$.

Пример 3. Определить, делится ли многочлен $x^{4n}+x^{4(n-1)}+\cdots+x^8+x^4+1$ на многочлен $x^{2n}+x^{2(n-1)}+\cdots+x^4+x^2+1$ без остатка.

Решение. Рассмотрим отношение данных многочленов

$$A=\frac{x^{4n}+x^{4n-4}+\cdots+x^8+x^4+1}{x^{2n}+x^{2n-2}+\cdots+x^4+x^2+1}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби $A$ на $x^4-1$ ($|x|\neq 1$); с учетом формулы (4.27) получим

$$A=\frac{x^{4n+4}-1}{(x^{2n+2}-1)(x^2+1)}=\frac{(x^{2n+2}-1)(x^{2n+2}+1)}{(x^{2n+2}-1)(x^2+1)}=$$
$$=\frac{x^{2n+2}+1}{x^2+1}=\frac{(x^2)^{n+1}+1}{x^2+1}.$$

Так как сумма одинаковых нечетных степеней делится на сумму их оснований, то при $n+1$ нечетном (т. е. при $n$ четном) первый многочлен делится на второй без остатка.

Ответ. Если $n$ четное число — делится; если $n$ нечетное число — не делится.

## § 5. Некоторые свойства целых рациональных алгебраических уравнений

**Теорема 1.** *Если $x=a$ есть решение (корень) целого рационального алгебраического уравнения $P_n(x)=0$, где $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, то $P_n(x)$ делится без остатка на $x-a$.*

Доказательство. По условию $x=a$ — корень данного уравнения; поэтому

$$a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1a+a_0\equiv 0 \text{ — тождество.}$$

По теореме Безу, остаток от деления $P_n(x)$ на $x-a$

$$R=P_n(a)=a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1a+a_0=0.$$

Значит, $P_n(x)$ делится на $x-a$.

**Теорема 2.** *Если $x=k$, где $k$ — целое число, отличное от нуля, есть корень целого рационального алгебраического уравнения $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ с целыми коэффициентами, то свободный член этого уравнения делится без остатка на этот корень.*

Доказательство. По условию $x=k$ — корень уравнения; тогда

$$a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}+\cdots+a_1k+a_0\equiv 0,$$

откуда находим

$$a_0=-k(a_nk^{n-1}+a_{n-1}k^{n-2}+\cdots+a_2k+a_1).$$

Так как все коэффициенты и $k$ — целые числа, то после вычислений в круглых скобках получим целое число, которое обозначим $a_nk^{n-1}+a_{n-1}k^{n-2}+\cdots+a_2k+a_1=-m$. Из предыдущего следует, что $a_0=km$, т. е. $a_0$ делится без остатка на $k$.

Следствие. Целыми корнями целого рационального алгебраического уравнения с целыми коэффициентами могут быть только делители свободного члена уравнения.

Целое рациональное алгебраическое уравнение называется *приведенным*, если оно имеет канонический вид

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0,$$

причем старший коэффициент его равен 1 ($a_n=1$).

**Теорема 3.** *Целое рациональное приведенное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами не может иметь дробных корней.*

Доказательство. Пусть уравнение

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0,$$

все коэффициенты которого — целые числа, имеет дробный корень $x = \frac{p}{q}$, где $p$ и $q$ — взаимно простые целые числа, т. е. дробь $\frac{p}{q}$ — несократима. Тогда должно иметь место тождество

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 \equiv 0.$$

Умножив это тождество на $q^{n-1} \neq 0$, получим

$$\frac{p^n}{q} + (a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = 0.$$

Поскольку $\frac{p^n}{q}$ — несократимая дробь, а выражение в круглых скобках — целое (все коэффициенты, $p$ и $q$ — целые числа, и множество целых чисел замкнуто относительно указанных в скобках действий), то сумма несократимой дроби и целого числа нулю равняться не может.

Значит, допущение неверно, т. е. теорема остается верной.

Из теорем 2 и 3 следует, что если в целом рациональном приведенном алгебраическом уравнении с целыми коэффициентами ни один из делителей свободного члена не является корнем уравнения, то это уравнение не имеет рациональных корней.

**Теорема 4.** *Любое целое рациональное алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами можно преобразовать в целое рациональное приведенное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами.*

Доказательство. Пусть дано уравнение

$$r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_1 x + r_0 = 0 \quad (r_n \neq 0),$$

где $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1, r_0$ — рациональные числа.

Умножив обе части этого уравнения на НОК знаменателей дробных коэффициентов, получим уравнение с целыми коэффициентами $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, где $a_n \neq 0$.

Заменив $x$ на $\frac{t}{a_n}$, получим

$$a_n\frac{t^n}{a_n^n} + a_{n-1}\frac{t^{n-1}}{a_n^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{t}{a_n} + a_0 = 0.$$

Обе части этого уравнения умножим на $a_n^{n-1} \neq 0$:

$$t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 a_n^{n-2}t + a_0 a_n^{n-1} = 0.$$

Полученное уравнение является относительно $t$ целым рациональным приведенным алгебраическим уравнением с целыми коэффициентами. Таким образом, теорема доказана.

Еще раз отметим, что для преобразования целого рационального алгебраического уравнения $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами в приведенное достаточно применить подстановку $x = \frac{t}{a_n}$ и освободиться от дробных коэффициентов.

При нахождении рациональных корней неприведенных целых рациональных алгебраических уравнений с целыми коэффициентами вместо теоремы 4 можно пользоваться следующей теоремой.

**Теорема 5.** *Для того чтобы рациональное число* $x = \frac{p}{q}$, *где* $p$ *и* $q$ — *взаимно простые числа, было корнем уравнения*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

*с целыми коэффициентами, необходимо, чтобы* $p$ *было делителем свободного члена* $a_0$, *а* $q$ — *делителем старшего коэффициента* $a_n$.

Доказательство этой теоремы предлагаем провести читателю. Заметим, что из теоремы 5 следует теорема 2.

Всякое дробно-рациональное алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами может быть сведено к целому рациональному алгебраическому уравнению с рациональными коэффициентами, а последнее — к целому рациональному алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами. Рассмотрим примеры на вычисление рациональных корней целых рациональных алгебраических уравнений с целыми коэффициентами.

Пример 1. Решить уравнение $x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0$.

Решение. По теореме 2 этого параграфа, если данное уравнение имеет целые решения, то ими могут быть только делители числа 6: $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 6$. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = 3$, так как $27 - 9 - 24 + 6 = 0$. По теореме 1, левая часть уравнения разделится на $x - 3$:

$$(x^3 - x^2 - 8x + 6) : (x - 3) = x^2 + 2x - 2,$$

т. е. данное уравнение можно представить в виде

$$(x - 3)(x^2 + 2x - 2) = 0.$$

Корень $x_1 = 3$ данного уравнения найден подбором. Решая уравнение

$$x^2 + 2x - 2 = 0,$$

находим еще два его корня:

$$x_2 = -1 - \sqrt{3};\ x_3 = -1 + \sqrt{3}.$$

Ответ. $x_1 = -1 - \sqrt{3}$, $x_2 = -1 + \sqrt{3}$, $x_3 = 3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$$

Решение. Если это уравнение имеет рациональные корни, то ими могут быть только целые числа, являющиеся делителями свободного члена уравнения 24: $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 4$, $\pm 6$, $\pm 8$, $\pm 12$, $\pm 24$.

Проверим: $x = 1 : 1 - 10 + 35 - 50 + 24 = 0$, т. е. $x_1 = 1$. Делим левую часть уравнения на $x - 1$:

$$(x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24) : (x - 1) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$$

Далее решаем уравнение

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.$$

Проверкой делителей свободного члена находим $x_2 = 2$ и выполняем деление:

$$(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) : (x - 2) = x^2 - 7x + 12.$$

Решаем уравнение $x^2 - 7x + 12 = 0$, из которого находим $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Пример 3. Решить уравнение

$$2x^3 + 7x^2 - 28x + 12 = 0.$$

Решение. Заменив $x$ на $\frac{t}{2}$ (см. теорему 3, § 5), получим

$$2\frac{t^3}{8} + 7\frac{t^2}{4} - 28\frac{t}{2} + 12 = 0,$$

или

$$t^3 + 7t^2 - 56t + 48 = 0.$$

Решая это уравнение по аналогии с двумя предыдущими примерами, находим $t_1 = -12$, $t_2 = 1$ и $t_3 = 4$.

Учитывая, что $x = \frac{t}{2}$, получим

$$x_1 = -6, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 2.$$

Ответ. $x_1 = -6$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$.

Для решения уравнения

$$2x^3 + 7x^2 - 28x + 12 = 0$$

можно воспользоваться теоремой 5. Рациональным корнем этого уравнения может быть дробь $x = \frac{p}{q}$, где $p$ — делитель свободного члена, а $q$ — делитель старшего коэффициента.

Для $p$ возможны значения $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 4$, $\pm 6$, $\pm 12$, а для $q$ — $\pm 1$, $\pm 2$. Корнями уравнения могут быть $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 4$, $\pm 6$, $\pm 12$; $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{3}{2}$.

Далее подбором находим корень уравнения $x_1 = \frac{1}{2}$ (или какой-либо другой) и левую часть уравнения делим на $x - \frac{1}{2}$. Полученное частное приравниваем нулю и находим из последнего уравнения остальные корни: $x_2 = -6$, $x_3 = 2$.

При нахождении целых корней целых рациональных алгебраических уравнений

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

с целыми коэффициентами в случае высокой степени уравнения и большого числа делителей свободного члена проверка делителей по условию уравнения (являются ли они решениями) требует громоздких вычислений. Для уменьшения объема этих вычислений можно пользоваться следующими свойствами.

Если $x = k$ есть целый корень данного уравнения, то имеет место тождество $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1k + a_0 = 0$, которое можно представить в виде

а) $k(k^{n-1} + a_{n-1}k^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0 = 0$;
б) $k^2(k^{n-2} + a_{n-1}k^{n-3} + \cdots + a_2) + a_1k + a_0 = 0$;
в) $k^3(k^{n-3} + a_{n-1}k^{n-4} + \cdots + a_3) + a_2k^2 + a_1k + a_0 = 0$,

откуда следует:

а) если $k$ — целый корень уравнения, то свободный член делится без остатка на этот корень (теорема 2 этого параграфа);

б) если $k$ — целый корень уравнения, то $a_1k + a_0$ (последний линейный двучлен при $x = k$) делится на квадрат этого корня;

в) если $k$ — целый корень уравнения, то $a_2k^2 + a_1k + a_0$ (последний квадратный трехчлен при $x = k$) делится на куб этого корня и т. д.

Пример 4. Найти целые корни уравнения

$$x^5 + 12x^4 + 15x^3 - 3x^2 - x - 24 = 0.$$

Решение. Находим делители свободного члена: $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 4$, $\pm 6$, $\pm 8$, $\pm 12$, $\pm 24$.

Свободный член уравнения с целыми коэффициентами всегда имеет делители $\pm 1$, поэтому в любом уравнении полезно предварительно проверить, не будут ли решениями 1 или $-1$.

Проверяем: $x_1 = 1$: $1 + 12 + 15 - 3 - 1 - 24 = 0$, $0 = 0$, $x_1 = 1$.

Так как по условию задачи требуется найти только целые корни, то делить на $x - 1$ не будем, а найдем корни подбором. Проверяем: $x_2 = -1$: $-1 + 12 - 15 - 3 + 1 - 24 \neq 0$ — не подходит.

Проверяем:

а) $x_3 = 2$. Линейный двучлен этого уравнения $(-x - 24)$ при $x = 2$ равен числу $-26$, которое не делится на $2^2 = 4$, т. е. $x = 2$ не является решением;

б) $x_4 = -2$; тогда $-x_4 - 24 = -22$ не делится на 4, т. е. $x = -2$ не является решением;

в) $x_5 = 3$; тогда $-x_5 - 24 = -27$ делится на $3^2 = 9$; $-3x_5^2 - x_5 - 24 = -27 - 27 = -54$ делится на $x_5^3 = 27$; $15x_5^3 - 3x_5^2 - x_5 - 24 = 15 \cdot 27 - 54 = 13 \cdot 27$ не делится на $x_5^4 = 81$, т. е. $x = 3$ не является решением;

г) $x_6 = -3$; тогда $-x_6 - 24 = -21$ не делится на $x_6^2 = 9$, т. е. $x = -3$ не является решением;

д) $x_7 = 4$; тогда $-x_7 - 24 = -28$ не делится на $x_7^2 = 16$, т. е. $x = 4$ не является решением;

е) $x_8 = -4$; тогда $-x_8 - 24 = -20$ не делится на $x_8^2 = 16$, т. е. $x = -4$ не является решением;

ж) $x_9 = 6$; тогда $-x_9 - 24 = -30$ не делится на $x_9^2 = 36$, т. е. $x = 6$ не является решением;

з) $x_{10} = -6$; тогда $-x_{10} - 24 = -18$ не делится на $x_{10}^2 = 36$, т. е. $x = -6$ не является решением.

Значения $x = \pm 8$, $x = \pm 12$, $x = \pm 24$ не могут быть решениями данного уравнения, так как при этих значениях $x^2 > |-x-24|$. Таким образом, данное уравнение имеет только один целый корень $x = 1$.

Все проверки следует делать устно.

Кроме того, при решении уравнения не обязательно в первую очередь применять метод вычисления рациональных корней, основанный на теоремах 1, 2, 3, 4 и 5 этого параграфа. Можно предварительно посмотреть, нельзя ли левую часть уравнения разложить на множители. Например, при решении уравнения $9x^3 - 13x + 6 = 0$ можно разложить его левую часть на множители методом группировки:

$$9x^3 - 4x - 9x + 6 = 0, \text{ или } x(9x^2 - 4) - 3(3x - 2) = 0,$$

откуда следует $(3x - 2)(3x^2 + 2x - 3) = 0$.

Решая уравнения $3x - 2 = 0$ и $3x^2 + 2x - 3 = 0$, находим

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

С помощью теоремы 1 можно показать, что всякий многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, имеющий корни $x = x_1$, $x = x_2$, $\ldots$, $x = x_n$, можно представить в виде

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n). \qquad (4.30)$$

Обоснование такого разложения многочлена на множители будет дано в гл. 13.

Пример 5. Разложить на множители $P_3(a) = a^3 + 7a^2 + 4a - 12$.

Решение. Найдем корни данного многочлена. Решив уравнение $a^3 + 7a^2 + 4a - 12 = 0$, получим $a_1 = -6$, $a_2 = -3$, $a_3 = 1$.

Тогда по формуле (4.30) получим

$$a^3 + 7a^2 + 4a - 12 = (a + 6)(a + 2)(a - 1).$$

Ответ. $P_3(a) = (a + 6)(a + 2)(a - 1)$.

## § 6. Решение рациональных алгебраических уравнений с буквенными коэффициентами

Решить уравнение с буквенными коэффициентами (параметрами) значит для каждой допустимой системы значений параметров найти все решения данного уравнения или показать, что уравнение не имеет решений. Предполагается, что все параметры — действительные числа и решения находятся в множестве действительных чисел.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{5}{ax - 4} = \frac{1}{9x - a}. \qquad (1)$$

Решение. По следствию 1 из теоремы (4.4), умножив обе части уравнения (1) на $(ax - 4)(9x - a) \neq 0$ (при $ax - 4 = 0$ или $9x - a = 0$ уравнение (1) не имеет числового смысла); получим

$$45x - 5a = ax - 4$$

или, после применения теорем (4.2) и (4.3),

$$(45 - a)\,x = 5a - 4. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) равносильны при $ax - 4 \neq 0$ и $9x - a \neq 0$, т. е. при $x \neq \frac{4}{a}$ $(a \neq 0)$ и $x \neq \frac{a}{9}$.

Найдем, при каких значениях $a$ уравнение (2) имеет корни $x = \frac{4}{a}$ и $x = \frac{a}{9}$.

Для этого подставим в уравнение (2) $x = \frac{4}{a}$; получим $a = \pm 6$. Подставив $x = \frac{a}{9}$, также получим $a = \pm 6$. Заметим, что при $a = 0$ (1) $\leftrightarrow$ (2).

Таким образом, при $a = \pm 6$ уравнение (2) не равносильно уравнению (1). В этом случае уравнение (1) принимает вид

а) $\frac{5}{6x - 4} = \frac{1}{9x - 6}$, или $\frac{5}{2(3x - 2)} = \frac{1}{3(3x - 2)}$ при $a = 6$;

б) $\frac{5}{-6x - 4} = \frac{1}{9x + 6}$, или $\frac{-5}{2(3x + 2)} = \frac{1}{3(3x + 2)}$ при $a = -6$.

В обоих случаях уравнение (1) не имеет решений.

При $a \neq \pm 6$ уравнения (1) и (2) равносильны, поэтому корни уравнения (1) можно найти из уравнения (2). Решаем уравнение (2):

а) если $45 - a \neq 0$, т. е. $a \neq 45$, то, по следствию 2 из теоремы 3, § 1, получаем $x = \frac{5a - 4}{45 - a}$. В этом случае уравнение (1) имеет одно решение;

б) если $45 - a = 0$, т. е. $a = 45$, то уравнение (2) принимает вид $0 \cdot x = 221$ и, следовательно, решений не имеет.

Ответ. $x = \frac{5a - 4}{45 - a}$ при $a \neq 45$ и $a \neq \pm 6$.

Уравнение не имеет решений при $a = 45$ и $a = \pm 6$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{1}{2n + nx} + \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{2(n + 3)}{x^3 - 4x}. \qquad (1)$$

Решение. Не будем указывать, на основании какого признака равносильности уравнений выполнено то или иное преобразование.

Умножим обе части уравнения (1) на $nx(x^2 - 4) \neq 0$, т. е. $n \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$; после преобразований получим

$$x^2 + (n - 2)\,x - (2n^2 + 4n) = 0. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) равносильны, если $n \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$. Значение $n = 0$ недопустимо для параметра $n$ в уравнении (1), так как знаменатель первого дробного члена уравнения обращается в нуль.

Найдем значения параметра $n$, при которых уравнение (2) имеет корни $x = 0$ и $x = \pm 2$. Подставляя эти значения в уравнение (2), найдем $n_1 = -4$, $n_2 = -2$, $n = -1$, $n = 0$ и $n = 1$, из которых $n = 0$ — недопустимое значение параметра.

При $n \neq -4$, $n \neq -2$, $n \neq -1$ и $n \neq 1$ уравнения (1) и (2) равносильны, поэтому из уравнения (2) можно найти корни уравнения (1). Решая уравнение (2), находим $x_1 = -2n$, $x_2 = n + 2$.

При $n = -4$, $n = -2$, $n = -1$ и $n = 1$ уравнения (1) и (2) не равносильны. В каждом из этих случаев рассматриваем уравнение (1) отдельно:

а) при $n = -4$ уравнение (1) принимает вид

$$-\frac{1}{8+4x}+\frac{1}{x^2-2x}=-\frac{2}{x^3-4x}.$$

При $x \neq 0$ и $x \neq \pm 2$ полученное уравнение равносильно уравнению $x^2 - 6x - 16 = 0$, откуда следует, что $x = 8$ — корень уравнения (1), а $x = -2$ — посторонний корень;

б) при $n = -2$ уравнение (1) принимает вид

$$-\frac{1}{4+2x}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{2}{x^3-4x}.$$

При $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$ полученное уравнение равносильно уравнению $x^2 - 4x = 0$, откуда следует, что $x = 4$ — корень уравнения (1), а $x = 0$ — посторонний корень;

в) при $n = -1$ уравнение (1) принимает вид

$$-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4}{x^3-4x}.$$

При $x \neq 0$ и $x \neq \pm 2$ полученное уравнение равносильно уравнению $x^2 - 3x + 2 = 0$, откуда следует, что $x = 1$ — корень уравнения (1), а $x = 2$ — посторонний корень;

г) при $n = 1$ уравнение (1) принимает вид

$$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^3-4x}.$$

При $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$ полученное уравнение равносильно уравнению $x^2 - x - 6 = 0$, откуда следует, что $x = 3$ — корень уравнения (1), а $x = -2$ — посторонний корень.

Следует отметить, что если установлена равносильность при некоторых значениях параметров решаемого уравнения и уравнения, к которому оно приведено, то при этих значениях параметров корни решаемого уравнения находим из уравнения, к которому оно привелось. Чтобы решить уравнение при остальных допустимых значениях параметров, его следует рассматривать дополнительно.

Поскольку при решении рациональных уравнений с параметрами освобождение от дробных членов расширяет область допустимых значений неизвестного, то корни заданного уравнения всегда являются решениями уравнения, полученного после освобождения от знаменателей. Поэтому можно (что более рационально) проверить, какие из найденных решений полученного уравнения являются корнями решаемого, а какие нет. Так, в примере 2 решения уравнения (1) при $n = -4$, $n = -2$, $n = -1$ и $n = 1$ можно было найти (с учетом $x \neq 0$ и $x \neq \pm 2$) из формул корней уравнения (2)

$$x_1 = -2n \text{ и } x_2 = n + 2:$$

а) при $n=-4$, $x_1=8$, $x_2=-2$; $x=-2$ — посторонний корень;
б) при $n=-2$, $x_1=4$, $x_2=0$; $x=0$ — посторонний корень;
в) при $n=-1$, $x_1=2$, $x_2=1$; $x=2$ — посторонний корень;
г) при $n=1$, $x_1=-2$, $x_2=3$; $x=-2$ — посторонний корень.

Ответ. $x_1=-2n$, $x_2=n+2$, если $n\neq 0$, $n\neq\pm 1$, $n\neq -2$, $n\neq -4$;

$x=8$ при $n=-4$;
$x=4$ при $n=-2$;
$x=1$ при $n=-1$;
$x=3$ при $n=1$.

При $n=0$ уравнение не имеет числового смысла.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-b}=1+\frac{1}{b}. \qquad (1)$$

Решение. Умножив обе части уравнения (1) на $b(x-1)\times(x-b)\neq 0$, т. е. $b\neq 0$, $x\neq 1$, $x\neq b$, после упрощений получим

$$(b+1)x^2-(b^2+4b+1)x+(2b^2+2b)=0. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) эквивалентны, если $b\neq 0$, $x\neq 1$ и $x\neq b$. Значение параметра $b=0$ недопустимо для уравнения (1).

Найдем значения $b$, при которых уравнение (2) имеет корни $x=1$ и $x=b$; подставив значения $x$ в уравнение (2), найдем значения $b=0$ и $b=1$, из которых $b=0$ — недопустимое.

При $b\neq 1$ уравнение (1) равносильно уравнению (2). Решаем уравнение (2):

а) при $b+1\neq 0$, т. е. $b\neq -1$, находим $x_1=b+1$, $x_2=\frac{2b}{b+1}$;

б) при $b+1=0$, т. е. $b=-1$, уравнение (2) принимает вид $2x=0$, откуда получаем $x=0$.

Найдем корни уравнения (1) при $b=1$. Для этого воспользуемся формулами $x_1=b+1$ и $x_2=\frac{2b}{b+1}$ для корней уравнения (2); учитывая, что уравнения (1) и (2) равносильны при $x\neq 1$, $x\neq b$; $b\neq 0$;

в) при $b=1$ получаем $x_1=2$, $x_2=1$, причем $x_2=1$ — посторонний корень.

Ответ. $x_1=b+1$, $x_2=\frac{2b}{b+1}$ при $b\neq -1$, $b\neq 0$, $b\neq 1$;

$x=0$ при $b=-1$;
$x=2$ при $b=1$;

при $b=0$ уравнение не имеет числового смысла.

## § 7. Иррациональные уравнения

*Иррациональным уравнением* называется алгебраическое уравнение, хотя бы один из членов которого иррационален относительно неизвестного. Например:

$$\sqrt{x+5}+x=4;\ \sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x+1}=7;\ \sqrt[3]{x}=\sqrt{x}-3;$$
$$\sqrt{x}+5\sqrt[4]{x}-6=0.$$

В элементарной математике иррациональные уравнения рассматриваются в множестве действительных чисел, причем корни четной степени предполагаются арифметическими, а нечетной — алгебраическими (положительными, равными нулю или отрицательными).

Общий метод решения иррациональных уравнений заключается в следующем: сначала изолируется один радикал, затем обе части уравнения возводят в степень, потом снова изолируют радикал и т. д. При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень получается уравнение, в общем случае не равносильное данному; поэтому проверка найденных значений неизвестного по условию данного уравнения обязательна, т. е. является составной частью решения.

**Теорема 1.** *Если обе части уравнения* $f_1(x) = f_2(x)$ *возвести в квадрат, то корнями полученного уравнения* $[f_1(x)]^2 = [f_2(x)]^2$ *будут все корни данного уравнения* $f_1(x) = f_2(x)$ *и уравнения* $f_1(x) = -f_2(x)$, *сопряженного с данным.*

Доказательство. Уравнение $[f_1(x)]^2 = [f_2(x)]^2$ равносильно уравнению $[f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2 = 0$, или $[f_1(x) - f_2(x)][f_1(x) + f_2(x)] = 0$. Но это последнее уравнение удовлетворяется как решениями данного уравнения $f_1(x) = f_2(x)$, так и решениями уравнения $f_1(x) = -f_2(x)$. Теорема доказана.

Таким образом, при переходе от уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ к уравнению $[f_1(x)]^2 = [f_2(x)]^2$ потери корней не произойдет, но могут появиться посторонние корни, а именно: корни сопряженного с данным уравнения $f_1(x) = -f_2(x)$.

**Теорема 2.** *Если обе части уравнения* $f_1(x) = f_2(x)$ *возвести в куб, то получим уравнение* $[f_1(x)]^3 = [f_2(x)]^3$, *равносильное данному в множестве действительных чисел.*

Доказательство. Пусть в множестве действительных чисел даны уравнения

$$f_1(x) = f_2(x) \tag{1}$$

и

$$[f_1(x)]^3 = [f_2(x)]^3. \tag{2}$$

Представим уравнение (2) в виде

$$[f_1(x) - f_2(x)]\{[f_1(x)]^2 + f_1(x) f_2(x) + [f_2(x)]^2\} = 0. \tag{3}$$

Поскольку

$$[f_1(x)]^2 + f_1(x) f_2(x) + [f_2(x)]^2 = \left[f_1(x) + \frac{1}{2} f_2(x)\right]^2 + \frac{3}{4}[f_2(x)]^2 \geqslant 0:$$

а) если $\left[f_1(x) + \frac{1}{2} f_2(x)\right]^2 + \frac{3}{4}[f_2(x)]^2 > 0$, то разделив, согласно теореме 3, § 1, обе части уравнения на множитель, стоящий в фигурных скобках, получим уравнение $f_1(x) - f_2(x) = 0$, или $f_1(x) = f_2(x)$, эквивалентное уравнению (2);

б) если $\left[f_1(x)+\frac{1}{2}f_2(x)\right]^2+\frac{3}{4}[f_2(x)]^2=0$ при некоторых значениях $x$, то при этих значениях $x$

$$\begin{cases} f_1(x)+\frac{1}{2}f_2(x)\equiv 0, \\ \frac{3}{4}f_2(x)\equiv 0, \end{cases} \quad \text{или } f_1(x)\equiv 0 \text{ и } f_2(x)\equiv 0.$$

Следовательно, уравнения (1) и (2) также равносильны, так как эти значения $x$ являются общими корнями уравнений.

Таким образом, при возведении в куб обеих частей уравнения, рассматриваемого в множестве действительных чисел, посторонние корни не появляются. Можно доказать, что в множестве действительных чисел возведение обеих частей уравнения в нечетную степень приводит к равносильному уравнению, а возведение в четную степень нарушает в общем случае равносильность уравнений.

Приступая к решению иррационального уравнения, целесообразно предварительно определить ОДЗН, так как может оказаться, что это уравнение не определено в области действительных чисел.

При решении иррациональных уравнений следует иметь в виду, что не принадлежащие к ОДЗН значения неизвестного всегда посторонние для решаемого уравнения; их можно отбросить без проверки по условию. Найденные значения неизвестного из области допустимых обязательно следует проверить по условию уравнения, так как они также могут оказаться посторонними.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=\frac{x}{2}$.

Решение. Найдем область определения данного уравнения:

$$\begin{cases} 5+x\geqslant 0, \\ 5-x\geqslant 0, \end{cases} \text{ или } -5\leqslant x\leqslant 5.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $5+x+5-x+2\sqrt{25-x^2}=\frac{x^2}{4}$, или $2\sqrt{25-x^2}=\frac{x^2}{4}-10$.

После повторного возведения обеих частей уравнения в квадрат найдем $100-4x^2=\frac{x^4}{16}-5x^2+100$, или $x^4-16x^2=0$. Решая последнее уравнение, получим $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=4$.

Все найденные значения неизвестного принадлежат к ОДЗН. Проверим эти значения по условию уравнения:

а) при $x=-4$ из данного уравнения получим $1+3\neq -2$, т. е. $x=-4$ не является решением уравнения;

б) при $x=0$ из данного уравнения получим $2\sqrt{5}\neq 0$, т. е. $x=0$ не является решением уравнения;

в) при $x=4$ получим $3+1\neq 2$, т. е. $x=4$ не является решением уравнения.

Ответ. Уравнение решений не имеет.

Этот пример показывает, что нахождение ОДЗН для отделения принадлежащих к ней посторонних корней при решении иррациональных уравнений не имеет смысла; их следует проверять по условию данного уравнения. Однако определение ОДЗН может показать, что уравнение не имеет решений.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-10}+\sqrt{1-x}=6$.

Решение. Область определения этого уравнения определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x-10\geqslant 0, \\ 1-x\geqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\geqslant 10, \\ x\leqslant 1, \end{cases}$$

которая решений не имеет. Уравнение не определено в множестве действительных чисел.

Ответ. Уравнение решений не имеет.

Иногда, учитывая, что при решении иррациональных уравнений корни четной степени арифметические, можно установить, что уравнение не имеет решений.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=-2.$$

Решение. Поскольку корни арифметические, то левая часть уравнения неотрицательная, а правая отрицательная; следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

**Решение иррациональных уравнений.** Рассмотрим решения некоторых типов иррациональных уравнений.

А. Уравнения, в которых одно или несколько подкоренных выражений — точные квадраты.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}=10$.

Решение. Приведем уравнение к виду

$$\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2}=10, \text{ или } |x+2|+|x-5|=10.$$

Рассмотрим последнее уравнение:

а) если $x<-2$, то $-x-2-x+5=10$, откуда найдем $x_1=-3{,}5$;

б) если $-2\leqslant x\leqslant 5$, то $x+2-x+5=10$, или $7=10$. Однако $7\neq 10$, следовательно, решений нет;

в) если $x>5$, то $x+2+x-5=10$, откуда найдем $x_2=6{,}5$.

Ответ. $x_1=-3{,}5$ и $x_2=6{,}5$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{x^2-6x+9}$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(x-3)^2}.$$

Найдем ОДЗН: $1-4x\geqslant 0$, или $x\leqslant \frac{1}{4}$. Извлечем корень из точного квадрата; получим $\sqrt{1-4x}+2=|x-3|$. С учетом ОДЗН $x\leqslant \frac{1}{4}$ можно записать $\sqrt{1-4x}+2=3-x$, или $\sqrt{1-4x}=1-x$.

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат; после преобразований получим уравнение $x^2+2x=0$, из которого находим $x_1=-2$, $x_2=0$. Проверкой убеждаемся, что это корни данного уравнения.

Ответ. $x_1=-2$, $x_2=0$.

Б. Уравнения, содержащие несколько квадратных радикалов.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат; получим $4-x+5+x+2\sqrt{(4-x)(5+x)}=9$, или $\sqrt{(4-x)(5+x)}=0$, откуда найдем $(4-x)(5+x)=0$ и $x_1=-5$, $x_2=4$.

Проверка: $x_1=-5$, $\sqrt{9}+\sqrt{0}=3$, $3=3$;

$$x_2=4,\ \sqrt{0}+\sqrt{9}=3,\ 3=3.$$

Ответ. $x_1=-5$, $x_2=4$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+4}$ После возведения обеих частей уравнения в квадрат и упрощений получим $\sqrt{(x-5)(x+3)}=3$, откуда найдем $(x-5)(x+3)=9$, или $x^2-2x-24=0$; $x_1=-4$, $x_2=6$. Проверкой убеждаемся, что $x=-4$ — посторонний корень данного уравнения.

Ответ. $x=6$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-8x+7}+2\sqrt{x^2-18x+17}=2\sqrt{x^2-32x+31}.$$

Решение. Разложим подкоренные выражения членов этого уравнения на множители:

$$\sqrt{(x-1)(x-7)}+2\sqrt{(x-1)(x-17)}=2\sqrt{(x-1)(x-31)}.$$

ОДЗН определяется системой неравенств

$$\begin{cases}(x-1)(x-7)\geqslant 0,\\(x-1)(x-17)\geqslant 0,\\(x-1)(x-31)\geqslant 0,\end{cases}$$

из которой находим $x\leqslant 1$ и $x\geqslant 31$.

По формуле (3.21) получим

$$\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-17|}=2\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-31|},$$

или

$$\sqrt{|x-1|}\left(\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-17|}-2\sqrt{|x-31|}\right)=0,$$

откуда следует:

а) $\sqrt{|x-1|}=0$ и $x_1=1$;

б) $\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-17|}-2\sqrt{|x-31|}=0$.

При $x\leqslant 1$ уравнение «б» принимает вид $\sqrt{7-x}+2\sqrt{17-x}-2\sqrt{31-x}=0$ и после освобождения от радикалов приводится к уравнению $15x^2-482x-497=0$, из которого находим $x_1=-1$ и $x_2=\frac{497}{15}$; $x_2$ не принадлежит к рассматриваемым числам ($x\leqslant 1$).

При $x\geqslant 31$ уравнение «б» принимает вид $\sqrt{x-7}+2\sqrt{x-17}-2\sqrt{x-31}=0$ и после возведения обеих частей в квадрат приводится к уравнению $4\sqrt{(x-7)(x-17)}=-x-49$, которое положи-

тельных корней не имеет. Проверка показывает, что $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ — корни данного уравнения.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x.$$

Решение. Поскольку

$$2x^2 \pm 3x + 5 \equiv 2\left[\left(x \pm \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right] > 0,$$

то уравнение определено при всех действительных значениях $x$; но его решениями могут быть только $x > 0$, так как левая часть уравнения положительна.

Рассмотрим тождество $(2x^2 + 3x + 5) - (2x^2 - 3x + 5) = 6x$, которое представим в виде

$$(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5})(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}) = 6x.$$

Допуская, что данное уравнение имеет решение, получим

$$3x(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}) = 6x.$$

Поскольку $x = 0$ не является решением уравнения, то при $x \neq 0$

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 2.$$

Складывая последнее уравнение с данным, получим уравнение $2\sqrt{2x^2 + 3x + 5} = 3x + 2$, которое после освобождения от радикала приводится к уравнению $x^2 - 16 = 0$, откуда $x_1 = -4$, $x_2 = 4$. Проверкой устанавливаем, что только $x = 4$ есть корень заданного уравнения.

Ответ. $x = 4$.

В. Уравнения, содержащие радикалы третьей степени.

Пример 1. Решить уравнение $x - \sqrt[3]{x^2 - x - 1} = 1$.

Решение. Представим уравнение в виде

$$x - 1 = \sqrt[3]{x^2 - x - 1};$$

после возведения в куб и упрощения получим уравнение $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$, равносильное данному, из которого находим $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = 2$.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 2$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{x + 45} - \sqrt[3]{x - 16} = 1$.

Решение. Воспользуемся формулой куба разности двух чисел

$$(a - b)^3 \equiv a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$

Возведя обе части данного уравнения в куб, получим уравнение

$$x + 45 - x + 16 - 3\sqrt[3]{(x + 45)(x - 16)}(\sqrt[3]{x + 45} - \sqrt[3]{x - 16}) = 1,$$

равносильное данному. Если допустить, что данное уравнение имеет решение и в полученном уравнении $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}$ заменить на 1, получим уравнение $61-3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=1$, которое может оказаться не равносильным данному. Решаем это уравнение:

$$\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=20;\ (x+45)(x-16)=8000;$$
$$x^2+29x-8720=0;\ x_1=-109,\ x_2=80.$$

Проверкой убеждаемся, что это корни уравнения.

Ответ. $x_1=-109,\ x_2=80$.

Примечание. Если изолировать один радикал данного уравнения и обе части возвести в куб, то уравнение можно привести к квадратному относительно одного из радикалов.

Г. Иррациональные уравнения, решаемые способом замены.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=\frac{5}{2}.$$

Решение. Допустимые значения неизвестного $x\neq 1$, $x\neq 0$. Заменим $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}$ на $t$, где $t\neq 0$. Относительно $t$ уравнение принимает вид $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$ $(t\neq 0)$, или $2t^2-5t+2=0$, откуда найдем $t_1=\frac{1}{2}$ и $t_2=2$. Тогда

а) $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}=\frac{1}{2}$; $x_1=-\frac{1}{512}$;

б) $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}=2$; $x_2=2$.

Ответ. $x_1=-\frac{1}{512}$, $x_2=2$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{(x-1)^2}-\sqrt[4]{(x+1)^2}=\frac{3}{2}\sqrt[4]{x^2-1}.$$

Допустимые значения неизвестного: $x\leqslant -1$ и $x\geqslant 1$. При $x\neq\pm 1$ разделим обе части уравнения на $\sqrt[4]{x^2-1}\neq 0$:

$$\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}-\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{3}{2}.$$

Обозначим $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=t$, где $t>0$. Относительно $t$ уравнение принимает вид

$$t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2},\ \text{или}\ 2t^2-3t-2=0,$$

откуда найдем $t_1 = -\frac{1}{2}$; $t_2 = 2$; $t_1 = -\frac{1}{2} < 0$ не пригодно к решению уравнения.

Тогда $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = 2$, или $\frac{x-1}{x+1} = 16$; $x = -\frac{17}{15}$. Подстановкой в уравнение $x = \pm 1$ убеждаемся, что эти значения не являются решениями.

Ответ. $x = -\frac{17}{15}$.

Пример 3. Решить уравнение $x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 18$.

Решение. Данное уравнение определено при $x^2 + 3x - 6 \geqslant 0$, т. е. при

$$x \leqslant \frac{-3 - \sqrt{15}}{2} \text{ и } x \geqslant \frac{-3 + \sqrt{15}}{2}.$$

Обозначим $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = t$ $(t \geqslant 0)$; тогда $x^2 + 3x = t^2 + 6$ и относительно $t$ уравнение принимает вид $t^2 + 6 + 4t = 18$, или $t^2 + 4t - 12 = 0$, откуда найдем $t_1 = -6$ $t_2 = 2$. Так как $t_1 = -6 < 0$, то его отбрасываем.

Из уравнения $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2$, или $x^2 + 3x - 10 = 0$ находим: $x_1 = -5$, $x_2 = 2$. Проверка показывает, что $x_1 = -5$ и $x_2 = 2$ — корни заданного уравнения.

Ответ. $x_1 = -5$, $x_2 = 2$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x + 41} + \sqrt[4]{41 - x} = 4.$$

Решение. Обозначим

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x + 41} = u, \\ \sqrt[4]{41 - x} = v; \end{cases}$$

тогда

$$u + v = 4. \tag{1}$$

После возведения в четвертую степень получим

$$\begin{cases} x + 41 = u^4, \\ 41 - x = v^4, \end{cases}$$

а после сложения —

$$u^4 + v^4 = 82. \tag{2}$$

Из (1) находим $v = 4 - u$; тогда уравнение (2) принимает вид

$$u^4 + (4 - u)^4 = 82.$$

Решая это уравнение (см. § 3 данной главы), находим $u_1 = 1$, $u_2 = 3$.

Тогда

$$x_1 = u_1^4 - 41 = 1 - 41 = -40;$$

$$x_2 = u_2^4 - 41 = 81 - 41 = 40.$$

Ответ. $x_1 = -40$, $x_2 = 40$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=4.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x+2}=t$ ($t\geqslant 0$ при $x\geqslant -2$); тогда $x=t^2-2$.

Уравнение относительно $t$ принимает вид

$$\sqrt{t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-10t+25}=4, \text{ или } |t-1|+|t-5|=4.$$

Решая последнее уравнение, рассмотрим случаи:

а) Если $t<1$, то $-t+1-t+5=4$, откуда $t=1$ (не принадлежит к рассматриваемым числам).

б) Если $1\leqslant t\leqslant 5$, то $t-1-t+5=4$, или $4=4$; все значения $t$ из отрезка $1\leqslant t\leqslant 5$ — решения уравнения.

в) Если $t>5$, то $t-1+t-5=4$, откуда $t=5$ (не принадлежит к рассматриваемым числам).

Поскольку решениями уравнения относительно $t$ являются $1\leqslant t\leqslant 5$, то $1\leqslant\sqrt{x+2}\leqslant 5$, или $1\leqslant x+2\leqslant 25$, откуда $-1\leqslant x\leqslant 23$.

Ответ. Решениями заданного уравнения являются все значения $x$, удовлетворяющие условию $-1\leqslant x\leqslant 23$.

Рассмотрим несколько иррациональных уравнений с параметрами.

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}.$$

Решение. Уравнение определено, если $b\geqslant 0$, $a+x\geqslant 0$, $a-x\geqslant 0$, $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\neq 0$.

Из этих неравенств следует, что $a\geqslant 0$ и $-a\leqslant x\leqslant a$. Так как $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\neq 0$, то $x\neq 0$; тогда $a>0$. Так как числителем левой части уравнения является сумма арифметических корней, то $b\neq 0$. Запишем производную пропорцию из данного уравнения при $b\neq 1$:

$$\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})+(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})-(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}=\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1},$$

или

$$\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1}.$$

После возведения обеих частей последнего уравнения в квадрат получим

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{(\sqrt{b}+1)^2}{(\sqrt{b}-1)^2}.$$

Составим еще раз производную пропорцию:

$$\frac{(a+x)-(a-x)}{(a+x)+(a-x)}=\frac{(\sqrt{b}+1)^2-(\sqrt{b}-1)^2}{(\sqrt{b}+1)^2+(\sqrt{b}-1)^2}, \text{ или } \frac{x}{a}=\frac{2\sqrt{b}}{b+1},$$

откуда найдем $x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$. Поскольку $\frac{2\sqrt{b}}{b+1}\leqslant 1$, то $x\leqslant a$. При $b=1$ данное уравнение принимает вид $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=1$. Решая его, находим $x=a$, что получается также из формулы $x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$ при $b=1$.

Ответ. $x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$ при $a>0$ и $b>0$.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

Решение. Допустимыми значениями неизвестного $x$ и параметра $a$ по условию уравнения являются $a+x\geqslant 0$, $a\geqslant\sqrt{a+x}$ и, с учетом арифметического корня в левой части уравнения, $x\geqslant 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат. После упрощений получим

$$a-x^2=\sqrt{a+x}.$$

Прибавляя к обеим частям уравнения $+x$ и раскладывая левую часть уравнения на множители как разность квадратов, найдем

$$(x+\sqrt{a+x})(-x+\sqrt{a+x})=\sqrt{a+x}+x,$$

или

$$(x+\sqrt{a+x})(-x+\sqrt{a+x}-1)=0. \qquad (1)$$

Поскольку $x\geqslant 0$ и $\sqrt{a+x}\geqslant 0$, то $x+\sqrt{a+x}\geqslant 0$.

Если $x+\sqrt{a+x}=0$, то $x=0$ и $a+x=0$, что возможно при $a=0$. Если $x+\sqrt{a+x}>0$, то обе части уравнения (1) можно разделить на этот множитель; тогда получим

$$\sqrt{a+x}=x+1.$$

После возведения обеих частей этого уравнения в квадрат и простейшего преобразования получим

$$x^2+x+1-a=0. \qquad (2)$$

Если $1-a>0$, то оба корня уравнения (2) отрицательные или комплексные и решениями данного уравнения быть не могут. Если $a=1$, то $x_1=-1$ не может быть решением; $x_2=0$ — решение данного уравнения (можно убедиться проверкой). Если $1-a<0$, то один корень уравнения (2) отрицателен, а второй положителен. Найдем из уравнения (2) положительный корень:

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3+4a}}{2}, \text{ если } a>1.$$

При $a=1$ из последней формулы находим $x=0$.

Ответ. $x=0$ при $a=0$;

$$x=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2} \text{ при } a\geqslant 1.$$

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}=x$.

Решение. Допустимые значения неизвестного и параметра в данном уравнении определяются системой неравенств

$$\begin{cases} 1+ax\geqslant 0, \\ 1-ax\geqslant 0, \end{cases} \text{ или } |ax|\leqslant 1.$$

Кроме того, если $a$ и $x$ имеют одинаковые знаки ($ax>0$), то $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}>0$ и решением уравнения может быть только положительное значение неизвестного, а это значит, что и $a>0$. Если $a$ и $x$ имеют разные знаки ($ax<0$), то $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}<0$ и решением уравнения может быть только отрицательное значение неизвестного, но при этом также $a>0$. Таким образом, уравнение имеет отличные от нуля решения, если $a>0$. При $a=0$ $x=0$.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{1+ax}=x+\sqrt{1-ax}$ и возведем обе его части в квадрат. После преобразований получим $x(x+2\sqrt{1-ax}-2a)=0$, откуда а) $x_1=0$ при произвольных значениях $a$; б) $x+2\sqrt{1-ax}-2a=0$, или $2\sqrt{1-ax}=2a-x$.

Последнее уравнение имеет решения, если $2a-x\geqslant 0$. Возведем обе части этого уравнения в квадрат и после упрощений получим $x^2=4(1-a^2)$, откуда при $|a|\leqslant 1$ находим

$$x_2=-2\sqrt{1-a^2},\ x_3=2\sqrt{1-a^2}.$$

Найденные значения будут корнями данного уравнения, если

$$\begin{cases} |ax|\leqslant 1, \\ 2a\geqslant x, \\ a>0, \\ |a|\leqslant 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0<a\leqslant 1, \\ \pm\sqrt{1-a^2}\leqslant a, \\ |\pm 2a\sqrt{1-a^2}|\leqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда получим

$$\begin{cases} 0<a\leqslant 1, \\ 1-a^2\leqslant a^2, \\ a^2(1-a^2)\leqslant \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему неравенств, находим $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 1$.

Ответ. $x_1=0$ при всех значениях $a$; $x_{2,3}=\pm 2\sqrt{1-a^2}$ при $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 1$.

Заметим, что решение иррациональных уравнений с параметрами очень часто приводит к трудным и громоздким исследованиям.

## § 8. Задачи на составление уравнений

При решении задач с помощью уравнений можно придерживаться следующей схемы:

а) прежде всего необходимо изучить ее условие так, чтобы его можно было повторить устно;

б) искомые величины (величину) обозначить буквами. Очень часто решение задачи и составление уравнения упрощается, если обозначить буквой какую-нибудь вспомогательную неизвестную величину (величины), через которую легко выражаются искомые;

в) выразить искомые неизвестные величины через данные и вспомогательные величины, обозначенные буквами;

г) составить уравнение (систему уравнений), т. е. составить два выражения, представляющие одну и ту же величину, и приравнять их;

д) найти корни (решения) составленного уравнения (или системы уравнений);

е) исследовать по условию задачи, какие из корней уравнения (или системы) пригодны к решению задачи;

ж) записать ответ.

### Решение задач с помощью уравнений с одним неизвестным

Задача 1. Морская вода содержит 5% (по весу) соли. Сколько килограммов пресной воды надо прибавить к 40 кг морской, чтобы содержание соли в смеси составляло 2%?

Решение. Пусть к морской воде надо прибавить $x$ килограммов пресной. Тогда смеси будет $(x+40)$ кг, в которой по условию должно содержаться 2% соли, т. е. $(x+40)\cdot 0{,}02$ (кг).

В морской воде было $40\cdot 0{,}05$ кг соли. Так как количество соли в морской воде и в смеси одно и то же, то можно записать уравнение

$$(40+x)\cdot 0{,}02 = 40\cdot 0{,}05,$$

из которого находим $x=60$. Проверкой убеждаемся, что это решение задачи.

Ответ. 60 кг.

Задача 2. Заработная плата рабочего после двух последовательных повышений на одно и то же число процентов увеличилась со 100 до 121 руб. в месяц. На сколько процентов повышалась заработная плата каждый раз?

Решение. Пусть заработная плата после одного повышения составляла $x\%$ по сравнению с предыдущей. Тогда после первого повышения она составляла в рублях $100\cdot\frac{x}{100}=x$, а после второго $x\times\frac{x}{100}=121$; $x^2=12\,100$; $x_1=-110$; $x_2=110$. По условию задачи $x_1<0$ к решению не пригодно. Значит, $x=x_2=110\%$. Искомое число процентов равно $110-100=10$.

Ответ. 10%.

Задача 3. Скорый поезд был задержан у семафора на 16 мин и нагнал опоздание на перегоне в 192 км, идя со скоростью, превышающей на 10 км/ч положенную по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

Решение. Обозначим скорость поезда по расписанию через $v$ $(v>0)$. Если бы поезд шел на перегоне в 192 км со скоростью $v$, то на этот путь понадобилось время $\frac{192}{v}$ ч. Так как поезд на этом перегоне шел со скоростью $v+10$, то он потратил $\frac{192}{v+10}$ ч на этот

путь и нагнал опоздание на 16 мин $\left(\frac{16}{60}\text{ ч}\right)$. Следовательно, $\frac{192}{v} - \frac{192}{v+10} = \frac{16}{60}$, или $\frac{12}{v} - \frac{12}{v+10} = \frac{1}{60}$ $(v > 0)$, откуда $v^2 + 10v - 7200 = 0$, $v = -5 \pm 85$. Так как по условию $v > 0$, то $v = 80$ (км/ч).

Ответ. 80 км/ч.

Задача 4. Имеется кусок сплава меди с оловом весом 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся сплав имел 40% меди?

Решение. Количество олова, которое надо прибавить к имеющемуся куску сплава, обозначим через $x$. Так как количество меди в имеющемся куске и в получившемся после добавления олова одинаковое, то получаем уравнение $(12 + x) \cdot 0{,}4 = 12 \cdot 0{,}45$, откуда $x = 1{,}5$ (кг).

Ответ. 1,5 кг.

Задача 5. Один сплав металлов $A$ и $B$ содержит эти металлы в отношении 2 : 3; второй сплав содержит эти же металлы в отношении 4 : 3. Сколько килограммов второго сплава нужно взять на один килограмм первого, чтобы после их сплавления содержание металлов $A$ и $B$ в новом сплаве было одинаковым?

Решение. Обозначим количество второго сплава, которое надо добавить к одному килограмму первого, через $x$. По условию в одном килограмме первого сплава находится $\frac{2}{5}$ кг металла $A$ и $\frac{3}{5}$ кг металла $B$, а в одном килограмме второго сплава — $\frac{4}{7}$ кг металла $A$ и $\frac{3}{7}$ кг металла $B$. Тогда в $x$ кг второго сплава находится $\frac{4}{7}x$ кг металла $A$ и $\frac{3}{7}x$ кг металла $B$. В новом сплаве должно быть одинаковое количество металлов $A$ и $B$, т. е.

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{7}x = \frac{3}{5} + \frac{3}{7}x; \quad x = 1{,}4 \text{ (кг)}.$$

Ответ. 1,4 кг.

Задача 6. Бригада забойщиков должна по плану добыть в несколько дней 800 т угля. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день добывала 12 т сверх плана; поэтому уже за день до срока было добыто 792 т угля. Сколько тонн угля в день должна была добывать бригада по плану?

Решение. Обозначим количество угля, которое бригада должна добывать по плану в день, через $x$ $(x > 0)$.

Чтобы добыть 800 т угля, бригада должна работать $\frac{800}{x}$ дней. Первые три дня она выполняла установленную планом норму и добыла $3x$ тонн угля.

Следующие $\frac{800}{x} - 4$ дня бригада добывала по $x + 12$ тонн угля в день и за эти дни добыла $\left(\frac{800}{x} - 4\right)(x + 12)$ тонн угля. За день до

срока было добыто 792 т, т. е. $3x+(x+12)\left(\frac{800}{x}-4\right)=792\ (x>0)$, или $x^2+40x-12\cdot 800=0$, откуда $x=-20\pm 100$

Так как $x>0$, то $x=80$ (т).

Ответ. 80 т.

Задача 7. Моторная лодка, имеющая скорость 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами туда и обратно без остановок за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами равно 60 км. Найти скорость течения реки.

Решение. Обозначим скорость течения реки через $v$. По условию задачи $0<v<20$. Скорость движения лодки по течению равна сумме скорости лодки и течения реки, т. е. $(20+v)$ км/ч, а против течения — разности скоростей лодки и течения, т. е. $(20-v)$ км/ч. Тогда время, затраченное на весь путь, равно $\frac{60}{20+v}+\frac{60}{20-v}=$ $=6\frac{1}{4}$, или $v^2=16$, откуда $v=\pm 4$; так как $v>0$, то $v=4$ (км/ч).

Ответ. 4 км/ч.

Задача 8. Лодочник проезжает расстояние 16 км по течению реки на 6 ч быстрее, чем против течения; при этом скорость лодки в стоячей воде на 2 км/ч больше скорости течения. Определить скорость лодки в стоячей воде и скорость течения реки.

Решение. Обозначим скорость течения реки через $v$. Тогда скорость лодки в стоячей воде будет $(v+2)$ км/ч, скорость лодки по течению $(2v+2)$ км/ч и скорость лодки против течения 2 км/ч. Следовательно, получаем уравнение

$$\frac{16}{2}-\frac{16}{2v+2}=6\ (v>0),$$

откуда $v=3$; $v+2=5$ (км/ч).

Ответ. Скорость течения реки 3 км/ч; скорость лодки в стоячей воде 5 км/ч.

Задача 9. Из пункта $A$ к пункту $B$, расстояние между которыми равно 18 км, вышел пешеход. Через 2 ч вслед за ним выехал велосипедист, который проезжал за каждый час на $4\frac{1}{2}$ км больше, чем проходил пешеход. Определить скорость движения велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт $B$ одновременно с пешеходом.

Решение. Обозначим скорость движения велосипедиста через $v$ км/ч ($v>4{,}5$). Тогда скорость пешехода будет $(v-4{,}5)$ км/ч.

Согласно условию задачи, имеем уравнение $\frac{18}{v-4{,}5}-\frac{18}{v}=2$, или $2v^2-9v-81=0$ $(v>4{,}5)$; $v=\frac{9\pm 27}{4}$. Поскольку $v>4{,}5$, то $v=$ $=9$ (км/ч).

Ответ. $v=9$ км/ч.

Задача 10. Из города $A$ в город $B$ выехал мотоциклист, а из $B$ и $A$ навстречу ему выехал велосипедист.

При встрече оказалось, что велосипедист проехал $a$ километров, а мотоциклист на $d$ километров больше. Велосипедист приехал в $A$

через $t$ часов после того, как мотоциклист приехал в $B$. Определить скорости велосипедиста и мотоциклиста, если мотоциклист проезжает в час на $b$ километров больше, чем велосипедист.

Решение. Обозначим скорость велосипедиста через $v$ км/ч. Тогда скорость мотоциклиста будет $(v+b)$ км/ч.

Расстояние между городами $A$ и $B$ равно $(2a+d)$, так как до встречи велосипедист проехал $a$, а мотоциклист $(a+d)$ километров.

Согласно условию задачи, имеем уравнение

$$\frac{2a+d}{v}-\frac{2a+d}{v+b}=t, \text{ или } tv^2+btv-b(2a+d)=0 \ (v>0);$$

$$v=\frac{-bt\pm\sqrt{b^2t^2+4bt(2a+d)}}{2t}.$$

Поскольку $v>0$, то $v=\frac{-bt+\sqrt{b^2t^2+4bt(2a+d)}}{2t}$ и $v+b=$

$$=\frac{bt+\sqrt{b^2t^2+4bt(2a+d)}}{2t}.$$

Ответ. Скорость велосипедиста равна

$$\frac{-bt+\sqrt{b^2t^2+4bt(2a+d)}}{2t} \text{ (км/ч)};$$

скорость мотоциклиста равна $\frac{bt+\sqrt{b^2t^2+4bt(2a+d)}}{2t}$ (км/ч).

### Упражнения

Решить уравнения ($x\in R$; $R$ — множество действительных чисел):

81. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{(x-1)(x+3)}=0.$
82. $\frac{3}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)^2}+\frac{3}{x(x-3)}.$
83. $x^4+4x^3-10x^2-28x-15=0.$
84. $x^4+5x^3-12x^2+5x+1=0.$
85. $x^4-3x^3-8x^2-12x+16=0.$
86. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=9.$
87. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12.$
88. $(x+5)^4+(x+3)^4=2.$
89. $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8.$
90. $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1.$
91. $\frac{24}{x^2-2x}=\frac{12}{x^2-x}+x^2-x.$
92. $x^3-x^2-8x+12=0.$
93. $x^5-x^4-3x^3+5x^2-2x=0.$
94. $2x^4+x^3-49x^2+96x-36=0.$
95. $x^3-9x^2+27x-30=0.$
96. $x^4-8x+63=0.$

97. $(1+x^2)^2 = 4x(1-x^2)$.

98. $14x + 8 = 10x + 5|3x - 5|$.

99. $|x+3| + |x-1| = 3x - 5$.

100. $x^2 - 4x - 3|x-2| + 6 = 0$.

101. При каком значении $k$ корни уравнения $(k-1)x^2 - 2(k+1) \times x + k + 4 = 0$ равны между собой?

102. Определить $k$ так, чтобы один из корней уравнения $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2 = 0$ был вдвое больше другого.

103. Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$. Составить уравнение с корнями $x_1^2 + x_2^2$ и $x_1^3 + x_2^3$, где $x_1$ и $x_2$ — корни данного уравнения.

104. При каком значении $a$ один из корней уравнения $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$ есть квадратом другого?

105. При каком значении $a$ сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - ax + a - 1 = 0$$

равна 17?

106. При каком действительном значении $a$ сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a - 2 = 0$ будет наименьшей?

107. Определить свободный член уравнения $6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0$, если один из его корней равен 2. Найти два остальных корня.

108. Найти целые числа $a$ и $b$, при которых один из корней уравнения $3x^3 + ax^2 + bx + 18 = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$.

109. Доказать, что если $p$, $q$, $r$ — рациональные числа, то корни уравнения $(p+q+r)x^2 - 2(p+q)x + p + q - r = 0$ также рациональны.

110. Доказать, что если $x_1$ и $x_2$ — корни квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

то выражение

$$x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_2^4$$ — рациональное число.

111. Доказать, что уравнение $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1$ при действительных значениях $a \neq 0$ и $b \neq 0$ имеет действительные корни.

Решить уравнения ($x \in R$):

112. $\sqrt{10+x} + \sqrt{10-x} = x$.

113. $\sqrt{1-3x} + 5 = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

114. $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6} + \sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6} - \sqrt{x^2-x-4}} = 5$.

115. $\dfrac{x\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = 12$.

116. $4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(1+x)$.

117. $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\dfrac{5x+2}{x+3}} = \dfrac{13}{6}$.

118. $9 - \sqrt{81 - 7x^3} = \dfrac{1}{2}x^3$.

119. $3x^2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2 - 15x$.

120. $\sqrt[3]{25+x}+\sqrt[3]{3-x}=4$.

121. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x+1}=0$.

122. $\sqrt[4]{80+x}+\sqrt[4]{2-x}=4$.

123. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=1$.

124. $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$.

125. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

126. $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{x^2-x}$.

127. $\sqrt{9x^2-12x+11}+\sqrt{5x^2-8x+10}=2x-1$.

128. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+5}+2\sqrt{(x+1)(x+5)}=-2x$.

Решить уравнения с параметрами (неизвестное и параметры — действительные числа):

129. $\dfrac{a^3-1}{a^3+1}=\dfrac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x}$.

130. $1-\dfrac{2b}{x-a}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+x^2-2ax}$.

131. $\dfrac{n-p+1}{nx+px}=\dfrac{1}{(n+p)^2}+\dfrac{n-p}{x^2}$.

132. $\dfrac{x^2+1}{n^2x-2n}+\dfrac{1}{nx-2}=\dfrac{x}{n}$.

133. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{2x}$.

134. $\sqrt{a+x}=a-\sqrt{x}$.

135. Себестоимость единицы продукции, которая первоначально составляла 25 р., после двух последовательных снижений на одинаковое число процентов составила 20 р. 25 коп. На сколько процентов снижалась себестоимость единицы продукции каждый раз?

136. На один продукт два раза была снижена цена на 10%. На сколько процентов надо снизить цену на второй продукт, бывший до снижения в одной цене с первым, чтобы после этого снижения оба продукта были вновь в одной цене?

137. После смешения двух спиртов получено десять ведер спирта крепостью 79°. Сколько взято того и другого спирта, если первый имеет крепость 85°, а число градусов, выражающее крепость второго, на 66 больше числа ведер второго спирта?

138. В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой. Затем отлили столько же раствора и опять долили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-ный раствор кислоты?

139. Длина Дуная относится к длине Днепра, как 6 : 5, а длина Дона относится к длине Дуная, как 6,5 : 9,5. Найти протяженность каждой из рек, если Днепр длиннее Дона на 300 км.

140. Турист ехал на автомобиле $\frac{5}{8}$ всего пути, а остальную часть — на

катере, причем на автомобиле он ехал на 15 мин дольше, чем на катере. Скорость катера на 20 км/ч меньше скорости автомобиля. Чему равны скорость автомобиля и скорость катера, если все расстояния равны 160 км?

141. Периметр основания прямоугольного здания равен 70 м. Здание огорожено сеткой на одинаковом расстоянии от каждой из его сторон. Площадь земли, обведенной сеткой, на 156 м$^2$ больше площади основания. Найти расстояние между сеткой и зданием.

142. Двузначное число в 6 раз больше суммы его цифр. Произведение этого числа на число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, равно 2 430. Найти заданное число.

143. Двузначное число в два раза больше произведения его цифр. Число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, относится к данному числу, как 7 : 4. Найти заданное число.

144. Учебный самолет летел со скоростью 120 км/ч. Когда ему оставалось пролететь на 385 км меньше, чем он пролетел, самолет увеличил скорость до 330 км/ч. Средняя скорость самолета на всем пути оказалась равной 250 км/ч. Какое расстояние пролетел самолет?

145. Почтальон, идя безостановочно из пункта $A$ через пункт $B$ в пункт $C$, проходил путь от $A$ до $B$ со скоростью 3,5 км/ч и от $B$ до $C$ со скоростью 4 км/ч. Чтобы успеть за такое же время вернуться из $C$ в $A$, идя по той же дороге, он должен был проходить по 3,75 км/ч в течение всего пути. Однако, дойдя на обратном пути с указанной скоростью до $B$, он задержался в этом пункте на 14 мин, и чтобы успеть в назначенное время вернуться в $A$, должен был от $B$ до $A$ проходить уже по 4 км/ч. Найти расстояние между $A$ и $B$, $B$ и $C$.

146. Из пункта $A$ в пункт $B$ вышел пешеход, и одновременно навстречу ему из пункта $B$ выехал велосипедист. Пройдя $3\frac{1}{3}$ км, пешеход сел на попутную машину и встретил велосипедиста посредине между $A$ и $C$. Если бы пешеход не воспользовался машиной, то для встречи с велосипедистом в том же месте он должен был бы выйти из $A$ на 2 ч 40 мин раньше выезда велосипедиста из $B$. Если бы машина выехала из $A$ на 1 ч 4 мин позже велосипедиста из $B$, то их встреча состоялась бы на расстоянии 15 км от $A$. Найти скорости пешехода, велосипедиста и машины, если расстояние между пунктами $A$ и $B$ равно 40 км.

147. Плоты шли из пункта $A$ до устья реки вниз по течению. В устье реки их взял на буксир пароход и через $17\frac{1}{8}$ сут. после выхода плотов из $A$ доставил по озеру в пункт $B$. Сколько времени пароход вел плоты из устья реки до $B$, если известно, что он тратил без буксировки на рейс от $A$ до $B$ 61 ч и от $B$ до $A$ 79 ч и что его скорость во время буксировки уменьшается вдвое?

148. Из пункта $P$ выходят три дороги, ведущие к пункту $A$, $B$ и $C$. От $A$ до $P$ 100 км, от $B$ до $P$ 20 км. Группа туристов направилась из пункта $A$ в пункт $B$ через $P$. От $A$ до $P$ они ехали на машине, а от $P$ до $B$ шли пешком. Машина же, высадив их, направилась в пункт $C$, забрала вторую группу туристов и поехала через $P$ в пункт $B$, куда и прибыла одновременно с первой группой. Затем первая группа прошла из $B$ через $P$ в пункт $C$; при этом время движения оказалось на 6 ч 40 мин больше, чем время

проезда из $A$ в $P$ и перехода из $P$ в $B$ вместе. Из $C$ в $A$ эта группа возвратилась через $P$ на машине, затратив на весь переезд 5 ч. Определить расстояние от $C$ до $P$ (скорости движения машины и пешеходов предполагаются постоянными).

149. Из порта одним и тем же курсом вышли в разное время два корабля, идущие с одной и той же скоростью. Со второго корабля, идущего сзади, отправился быстроходный катер, догнал первый корабль и сразу же возратился на свой корабль. Катер находился в пути 13 ч 20 мин. Если бы перед выходом катера оба корабля одновременно уменьшили скорость на 10 км/ч, то катер находился бы в пути 11 ч 40 мин, а если бы они одновременно увеличили скорость на 10 км/ч, то катер находился бы в пути 17 ч 30 мин. На сколько раньше вышел из порта первый корабль, чем второй?

150. Имеется кусок сплава меди с цинком общей массой 30 кг, содержащий 65% меди. Сколько чистого цинка надо прибавить к этому куску, чтобы получился новый сплав, содержащий 50% меди?

151. Вместимости трех кубических сосудов $A$, $B$ и $C$ относятся, как $1:8:27$, а объемы налитой в них воды,— как $1:2:3$. После переливания из $A$ в $B$ и из $B$ в $C$ получили во всех трех сосудах слой воды одинаковой глубины. Затем перелили из $C$ в $B$ $128\frac{4}{7}$ л, а из $B$ в $A$ столько, чтоб глубина воды в $A$ удвоилась по сравнению с глубиной воды в $B$. При этом оказалось, что в $A$ на 100 л воды меньше, чем было первоначально. Сколько воды было вначале в каждом сосуде?

152. Первый раствор содержит по весу 6% вещества $A$, 16% вещества $B$ и 4% вещества $C$; второй раствор соответственно 15,9 и 10%; третий — 3,5 и 2%. В каком отношении надо смешать эти растворы, чтобы получить раствор, содержащий 12% $A$, 10% $B$ и 8% $C$?

153. В зале кинотеатра имеются две двери. Через обе двери зрители после сеанса выходят из зала в течение 3,75 мин. Если их выпускают через одну большую дверь, то выход займет на 4 мин. меньше, чем если выпускают их через меньшую дверь. Сколько времени требуется для выхода зрителей из зала через каждую дверь в отдельности?

154. Два каменщика сложили вместе стену за 20 дней. За сколько дней выполнил бы работу каждый из них отдельно, если известно, что первый должен работать на 9 дней больше второго?

155. Два автомобиля выезжают одновременно из двух городов навстречу друг другу. После встречи одному приходится еще быть в пути 2 ч, а другому 1,125 ч. Определить скорости автомобилей, если расстояние между городами равно 210 км.

156. Две автомашины выехали одновременно из одного пункта и едут в одном направлении, одна со скоростью 50 км/ч, другая — 40 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта и в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую на 1,5 ч позже, чем вторую. Найти скорость третьей машины.

157. Поезд был задержан на станции на $t$ минут. Чтобы ликвидировать опоздание, он на перегоне в $b$ километров должен был увеличить скорость на $a$ км/ч. Какова скорость поезда до его задержки на станции?

158. Два прокатных стана, работая вместе, прокатывают $a$ тонн стали за $t$ ч. Если бы работал только первый, то на прокатку этой стали потребовалось бы на $p$ ч больше, чем при работе одного второго стана. Сколько времени требуется каждому из станов на прокатку $a$ т стали?

159. Из точки $A$ начало двигаться тело в направлении к точке $B$. Через $t$ мин из той же точки $A$ начало двигаться второе тело, которое, догнав первое, повернуло обратно и прибыло в $A$ в тот момент, когда первое тело прибыло в точку $B$. Определить скорость первого тела, если известно, что скорость второго тела $v$ м/с, а расстояние $AB$ равно $d$ метров.

160. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{n}$-ю часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на $p$ процентов. Определить первоначальное процентное содержание соли.

# Глава 5

# СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## § 1. Системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными

### Понятие о системах уравнений

Системой $n$ уравнений с $m$ неизвестными называется $n$ уравнений, в каждом из которых неизвестные, обозначенные одной и той же буквой, означают одну и ту же неизвестную величину.

Например:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x + 3y = 5, \\ x + 8y = 10 \end{cases}$$

— система двух уравнений с двумя неизвестными ($x$ и $y$ в обоих уравнениях — одни и те же неизвестные величины);

$$\text{б)}\ \begin{cases} 2x^3 + 3y - z^3 = 8, \\ x^2 - y^2 + 3z = 6 \end{cases}$$

— система двух уравнений с тремя неизвестными ($x$, $y$ и $z$ в каждом уравнении обозначают одни и те же неизвестные величины);

$$\text{в)}\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x - xy = 6, \\ x^3 + x - y = 4 \end{cases}$$

— система трех уравнений с двумя неизвестными ($x$ и $y$ в каждом уравнении обозначают одни и те же неизвестные величины);

$$\text{г)}\ \begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 0, \\ 3x - x^2 = 0, \\ x^2 - 2x = 21 \end{cases}$$

— система трех уравнений с одним неизвестным ($x$ — одна и та же неизвестная величина в каждом уравнении).

Решением системы $n$ уравнений с $m$ неизвестными называется всякая упорядоченная $m$-ка таких чисел, которые, будучи подставлены в систему вместо неизвестных, обращают каждое уравнение системы в тождество.

Например:

а) система двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$$

имеет решение — пару чисел (2; 1), так как при $x = 2$, $y = 1$ оба уравнения системы обращаются в тождества

$$\begin{cases} 2^2 + 1 \equiv 5, \\ 2 + 1^2 \equiv 3; \end{cases}$$

б) система четырех уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 3, \\ x + 5y^2 = 4, \\ 2x + 3y = 1, \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

имеет решение — пару чисел $(-1; 1)$, так как при $x = -1$, $y = 1$ все уравнения системы обращаются в тождества

$$\begin{cases} (-1)^2 + 2 \cdot 1 \equiv 3, \\ -1 + 5 \cdot 1^2 \equiv 4, \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \equiv 1, \\ (-1)^2 - 1^2 \equiv 0; \end{cases}$$

в) система двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 17, \\ xy - xz + yz = -7 \end{cases}$$

имеет решение — тройку чисел $(5; 1; 3)$, так как при $x = 5$, $y = 1$, $z = 3$ оба уравнения системы обращаются в тождества

$$\begin{cases} 5^2 + 1^2 - 3^2 \equiv 17, \\ 5 \cdot 1 - 5 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \equiv -7. \end{cases}$$

*Решить систему уравнений* значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет.

Если система не имеет решений, то ее называют *несовместной* или *противоречивой*, в противном случае — *совместной*.

Пример. Решить систему уравнений ($x \in R$)

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x^2 + x - 30 = 0, \\ x^3 - 125 = 0. \end{cases}$$

Решение. Решая отдельно каждое уравнение системы, получаем

1) $x = 1$ или $x = 5$,
2) $x = -6$ или $x = 5$,
3) $x = 5$.

Ответ. $x = 5$.

Пусть даны две системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m), \end{cases} \quad (2)$$

в которых через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ обозначены различные неизвестные величины.

Система уравнений (2) называется следствием системы (1), если все решения системы (1) являются решениями системы (2).

Записывают это сокращенно так:

$$(1) \Rightarrow (2).$$

Две системы уравнений называются *равносильными* (эквивалентными), если каждая из них есть следствие другой или если обе системы решений не имеют.

Сокращенно записывают так:

$$(1) \Leftrightarrow (2).$$

Пример. Доказать, что системы уравнений

$$\begin{cases} a^2x - y = b, \\ x + b^2y = a \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} (a^2b^2 + 1)\, x = b^3 + a, \\ (a^2b^2 + 1)\, y = a^3 - b \end{cases} \tag{2}$$

равносильны в множестве действительных чисел ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

Доказательство. а) Пусть система (1) имеет решения и пара чисел $(\alpha; \beta)$ — любое из ее решений. Тогда

$$\begin{cases} a^2\alpha - \beta \equiv b, \\ \alpha - b^2\beta \equiv a. \end{cases}$$

Умножим обе части первого тождества на $b^2 \neq 0$ и сложим полученное тождество со вторым, а затем обе части второго тождества умножим на $a^2 \neq 0$ и вычтем из полученного первое тождество. В результате получим тождества

$$\begin{cases} (a^2b^2 + 1)\, \alpha \equiv b^3 + a, \\ (a^2b^2 + 1)\, \beta \equiv a^3 - b, \end{cases}$$

которые означают, что пара чисел $(\alpha, \beta)$ — решение системы (2), т. е.

$$(1) \Rightarrow (2).$$

б) Пусть система (2) имеет решения и пара чисел $(\gamma; \delta)$ — любое из них. Тогда

$$\begin{cases} (a^2b^2 + 1)\, \gamma \equiv b^3 + a, \\ (a^2b^2 + 1)\, \delta \equiv a^3 - b. \end{cases}$$

Умножив обе части первого тождества на $\dfrac{a^2}{a^2b^2 + 1}$, а второго — на $-\dfrac{1}{a^2b^2 + 1}$ и сложив их, получим тождество

$$a^2\gamma - \delta \equiv \frac{a^2(b^3 + a)}{a^2b^2 + 1} - \frac{a^3 - b}{a^2b^2 + 1},$$

или

$$a^2\gamma - \delta \equiv \frac{a^2b^3 + a^3 - a^3 + b}{a^2b^2 + 1} \equiv b,$$

т. е.

$$a^2\gamma - \delta \equiv b.$$

Умножив обе части первого тождества на $\frac{1}{a^2b^2+1}$, а второго — на $\frac{b^2}{a^2b^2+1}$ и сложив полученные тождества, получим

$$\gamma + b^2\delta \equiv a.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} a^2\gamma - \delta \equiv b, \\ \gamma + b^2\delta \equiv a, \end{cases}$$

а это означает, что любое решение системы (2) является решением системы (1), т. е. (2) $\Rightarrow$ (1).

От противного легко показать, что если какая-либо одна из данных систем не имеет решений, то другая также не имеет их.

Следовательно, (1) $\Leftrightarrow$ (2).

## Системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными

Система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \tag{5.1}$$

где $x$ и $y$ — неизвестные, а $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ — коэффициенты системы, называется *системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными.*

Если $c_1 = c_2 = 0$, то система (5.1) называется однородной, в остальных случаях — неоднородной.

Основные способы решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными следующие:

1. *Способ подстановки.* Чтобы решить систему (5.1), из первого уравнения системы найдем при $b_1 \neq 0$

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1};$$

подставив найденное значение $y$ во второе уравнение системы (5.1), получим

$$a_2x + b_2\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2,$$

откуда

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Если

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

то

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Тогда

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} x = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1 (c_1 b_2 - c_2 b_1)}{b_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1)} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Итак, решением системы (5.1) при $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ является пара чисел

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \\ y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \end{cases} \tag{5.2}$$

2. *Способ алгебраического сложения.* Чтобы решить систему (5.1)

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

способом алгебраического сложения, умножим обе части первого уравнения на $b_2 \neq 0$ и второго на $-b_1 \neq 0$. Получаем

$$\begin{cases} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2, \\ -a_2 b_1 x - b_1 b_2 y = -c_2 b_1. \end{cases}$$

Полагая, что система имеет решение, складываем левые и правые части уравнений системы; получаем

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1,$$

откуда находим при $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Аналогично поступаем, чтобы найти $y$. Умножим обе части первого уравнения системы (5.1) на $-a_2 \neq 0$, а второго на $a_1 \neq 0$. Получаем

$$\begin{cases} -a_1 a_2 x - a_2 b_1 y = -a_2 c_1, \\ a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2. \end{cases}$$

Складываем левые и правые части уравнений:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = a_1 c_2 - a_2 c_1,$$

откуда при $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \\ y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \end{cases}$$

если $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Поскольку система уравнений решена в предположении, что она имеет решения, то необходимо подстановкой убедиться, что найденная пара чисел — решение этой системы.

Проверкой убеждаемся, что

$$\left(\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1};\ \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ является решением системы.

3. *Способ сравнения.* Чтобы решить систему (5.1)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

способом сравнения, предполагают, что эта система имеет решения и из каждого уравнения системы находят $y$ (или $x$):

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1},\ y = \frac{c_2 - b_2x}{b_2},\ b_1 \cdot b_2 \neq 0.$$

Приравнивая полученные для $y$ выражения

$$\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2x}{b_2},$$

получим уравнение относительно неизвестного $x$. Это уравнение называется выводным из системы уравнений (5.1).

Решая выводное уравнение при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, найдем

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Подставляя найденное значение $x$ в какое-либо выражение для $y$, например в первое, получим

$$y = \frac{c_1 - a_1 \cdot \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}{b_1} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Таким образом, если система (5.1) имеет решения, то ее решением будет

$$\left(\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1};\ \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Рассмотрим решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases} \tag{5.3}$$

где $x$, $y$, $z$ — неизвестные, а $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$, $d_2$, $a_3$, $b_3$, $c_3$, $d_3$ — коэффициенты системы ($d_1$, $d_2$, $d_3$ — свободные члены), называется *системой трех линейных уравнений с тремя неизвестными.* Если

$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \equiv 0$, то система (5.3) называется однородной, в других случаях — неоднородной. Основные способы решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными могут быть применены для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

1. *Способ подстановки.* Из первого уравнения системы (5.3) найдем

$$z = \frac{d_1 - a_1 x - b_1 y}{c_1} \quad (c_1 \neq 0) \tag{5.4}$$

и подставим это значение $z$ во второе и третье уравнения системы:

$$\begin{cases} a_2 x + b_2 y + c_2 \dfrac{d_1 - a_1 x - b_1 y}{c_1} = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 \dfrac{d_1 - a_1 x - b_1 y}{c_1} = d_3. \end{cases}$$

После преобразований получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} (c_1 a_2 - c_2 a_1)\, x + (c_1 b_2 - c_2 b_1)\, y = c_1 d_2 - c_2 d_1, \\ (c_1 a_3 - c_3 a_1)\, x + (c_1 b_3 - c_3 b_1)\, y = c_1 d_3 - c_3 d_1, \end{cases}$$

из которой находим по формулам (5.2)

$$\begin{cases} x = \dfrac{(c_1 d_2 - c_2 d_1)(c_1 b_3 - c_3 b_1) - (c_1 d_3 - c_3 d_1)(c_1 b_2 - c_2 b_1)}{(c_1 a_2 - c_2 a_1)(c_1 b_3 - c_3 b_1) - (c_1 a_3 - c_3 a_1)(c_1 b_2 - c_2 b_1)}, \\ y = \dfrac{(c_1 a_2 - c_2 a_1)(c_1 d_3 - c_3 d_1) - (c_1 a_3 - c_3 a_1)(c_1 d_2 - c_2 d_1)}{(c_1 a_2 - c_2 a_1)(c_1 b_3 - c_3 b_1) - (c_1 a_3 - c_3 a_1)(c_1 b_2 - c_2 b_1)}. \end{cases}$$

Подставляя значения $x$ и $y$ в (5.4), находим

$$z = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 d_3 - a_3 d_1) - (a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_1 d_2 - a_2 d_1)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)(a_1 c_3 - a_3 c_1) - (c_1 b_3 - c_3 b_1)(a_1 c_2 - a_2 c_1)}.$$

После преобразований решение системы (5.3) получаем в виде

$$\begin{cases} x = \dfrac{d_1 b_2 c_3 + d_2 b_3 c_1 + d_3 b_1 c_2 - d_3 b_2 c_1 - d_2 b_1 c_3 - d_1 b_3 c_2}{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2}, \\ y = \dfrac{a_1 d_2 c_3 + a_2 d_3 c_1 + a_3 d_1 c_2 - a_3 d_2 c_1 - a_2 d_1 c_3 - a_1 d_3 c_2}{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2}, \\ z = \dfrac{a_1 b_2 d_3 + a_2 b_3 d_1 + a_3 b_1 d_2 - a_3 b_2 d_1 - a_2 b_1 d_3 - a_1 b_3 d_2}{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2}. \end{cases} \tag{5.5}$$

2. *Способ алгебраического сложения.* Если обе части первого и второго уравнений системы (5.3) умножить соответственно на $c_2$ и $-c_1$, а первого и третьего уравнений — на $c_3$ и $-c_1$ ($c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$) и полученные результаты почленно сложить, то получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} (a_1 c_2 - a_2 c_1)\, x + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\, y = d_1 c_2 - d_2 c_1, \\ (a_1 c_3 - a_3 c_1)\, x + (b_1 c_3 - b_3 c_1)\, y = d_1 c_3 - d_3 c_1. \end{cases}$$

Определив из этой системы по формулам (5.2) $x$ и $y$, подстановкой в одно из уравнений системы (5.3) найдем $z$. В результате получаются формулы (5.5).

3. *Способ сравнения.* Чтобы решить систему уравнений (5.3) способом сравнения, найдем $z$ из каждого уравнения системы:

$$z = \frac{1}{c_1}(d_1 - a_1x - b_1y) \quad (c_1 \neq 0),$$

$$z = \frac{1}{c_2}(d_2 - a_2x - b_2y) \quad (c_2 \neq 0),$$

$$z = \frac{1}{c_3}(d_3 - a_3x - b_3y) \quad (c_3 \neq 0).$$

Приравнивая выражения, полученные для $z$, приходим к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \frac{1}{c_1}(d_1 - a_1x - b_1y) = \frac{1}{c_2}(d_2 - a_2x - b_2y), \\ \frac{1}{c_1}(d_1 - a_1x - b_1y) = \frac{1}{c_3}(d_3 - a_3x - b_3y), \end{cases}$$

из которой найдем $x$ и $y$, а затем, подставив эти значения в одно из выражений для $z$, найдем $z$. Таким образом, для системы (5.3) решение получаем в виде формул (5.5) для определения $x$, $y$, $z$ при условии

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \neq 0.$$

В каждом из приведенных способов решения системы (5.3) предполагается, что эта система имеет решения. Таким образом, значения неизвестных (5.5) будут решением системы (5.3), если она имеет решения.

## § 2. Понятие об определителях второго и третьего порядка

**Определители второго порядка.** При решении системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

формулы для определения неизвестных $x$ и $y$ получились в виде

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \end{cases}$$

где $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Условимся выражение $a_1b_2 - a_2b_1$ обозначать символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Выражение $a_1b_2 - a_2b_1$, обозначенное символом

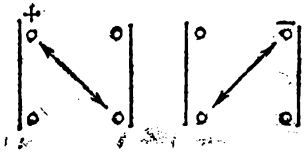
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

называется *определителем второго порядка.*

Следовательно, по определению

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{5.6}$$

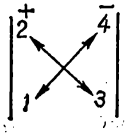
Числа $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ называются *элементами* определителя, $\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$ называют *столбцами*, а $a_1\ b_1$ и $a_2\ b_2$ — *строками* определителя; $a_1 \searrow b_2$ образуют главную диагональ определителя, а $a_2 \swarrow b_1$ — вспомогательную. Чтобы вычислить определитель второго порядка, достаточно найти разность произведений элементов главной и вспомогательной диагоналей



Пример 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Найдем разность произведений элементов главной диагонали определителя и элементов его вспомогательной диагонали



$$= 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 6 - 4 = 2.$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a & a+b \\ a+b & b \end{vmatrix}.$$

Решение. Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a & a+b \\ a+b & b \end{vmatrix} \equiv 2a \cdot b - (a+b) \cdot (a+b) \equiv -a^2 - b^2.$$

Ответ. $\Delta \equiv -a^2 - b^2.$

Пример 3. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = -1.$$

Решение. Вычислим определитель

$$(x-1)(x+3) - (x+1)x \equiv x - 3.$$

Тогда уравнение примет вид

$$x - 3 = -1,$$

из которого находим

$$x = 2.$$

Ответ. $x = 2$.

### Основные свойства определителей второго порядка

1. Величина определителя не изменится, если его строки заменить столбцами, а столбцы — строками.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

т. е. столбцы и строки в определителе второго порядка равноправны. Доказательство следует из определения.

Из этого свойства следует, что все свойства, верные для строк, будут верными и для столбцов.

2. При перестановке строк определитель меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(a_2b_1 - a_1b_2) = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

3. Если все элементы одной из строк определителя умножить на некоторое число $k$, то весь определитель умножится на это число:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_1b_2 - a_2kb_1 = k(a_1b_2 - a_2b_1) = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

4. Если элементы одной строки пропорциональны элементам другой, то определитель равен 0:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{vmatrix} = a_1kb_1 - a_1kb_1 = 0.$$

Следствие. Если строки определителя одинаковы, то он равен 0:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Если к одной из строк прибавить другую, умноженную на любое число, то величина определителя не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + ka_2)\, b_2 - a_2\, (b_1 + kb_2) =$$

$$= a_1b_2 + ka_2b_2 - a_2b_1 - a_2kb_2 = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

**Определители третьего порядка.** При решении системы (5.3) трех линейных уравнений с тремя неизвестными значения неизвестных выражались, согласно формуле (5.5), через алгебраические суммы шести произведений по три сомножителя.

Выражение $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$, обозначенное символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

называется *определителем третьего порядка.*

Согласно определению,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2. \quad (5.7)$$

Числа $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$, $a_3$, $b_3$, $c_3$ называются элементами определителя; $a_1\ b_1\ c_1$; $a_2\ b_2\ c_2$; $a_3\ b_3\ c_3$ называются строками; $a_1\ a_2\ a_3$; $b_1\ b_2\ b_3$; $c_1\ c_2\ c_3$ — столбцами определителя; $a_1\ b_2\ c_3$ образуют главную, а $a_3\ b_2\ c_1$ — вспомогательную диагональ определителя.

Определители третьего порядка вычисляются по формуле (5.7). Для ее запоминания полезно следующее правило, представленное графически на рис. 8.

Произведения элементов главной диагонали и элементов, образующих треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали, беру тся со знаком плюс, а произведения элементов вспомогательной диагонали и элементов, лежащих в вершинах треугольников с основаниями,

параллельными вспомогательной диагонали,— со знаком минус. В каждое из произведений со знаком плюс и со знаком минус входит только по одному элементу каждой строки и каждого столбца определителя.

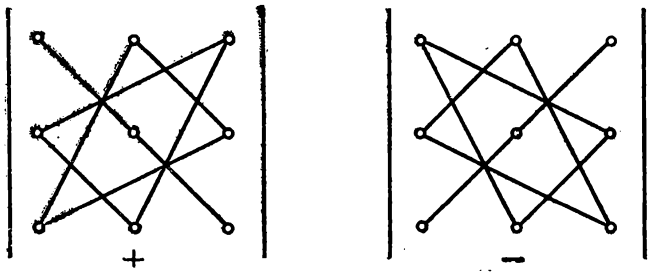



Рис. 8.

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение. По формуле (5.7) находим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 0 -$$
$$- 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 2 = 5 + 12 + 2 - 20 = -1.$$

Ответ. $-1$.

Правило вычисления определителей третьего порядка можно представить в виде следующей схемы, которая легко распространяется и на определители высших порядков.

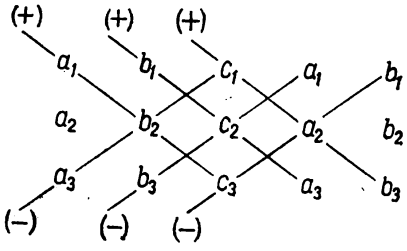



Рис. 9.

Если к таблице определителя дописать справа первый и второй столбцы, то при вычислении определителя произведения элементов, стоящих на главной и параллельных ей диагоналях, надо взять со знаком плюс, а произведения элементов, стоящих на вспомогательной и параллельных ей диагоналях, — со знаком минус (рис. 9).

Все пять свойств, доказанных для определителей второго порядка, легко доказать для определителей третьего порядка, пользуясь формулой (5.7).

Определитель третьего порядка можно представить через определители второго порядка;

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Такое представление определителя третьего порядка называют его разложением по элементам первой строки. В этом разложении элемент $a_1$ множится на определитель второго порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, пересекающихся на элементе $a_1$, а элемент $b_1$ множится на определитель второго порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, пересекающихся на элементе $b_1$; аналогично для $c_1$. Причем если сумма номеров строки и столбца, пересекающихся на данном элементе, равна четному числу, то полученный определитель второго порядка берут со знаком плюс, а если нечетному, то со знаком минус. Так, элемент $a_1$ стоит в первой строке и первом столбце, т. е. $1 + 1 = 2$, и полученный определитель 2-го порядка берут со знаком плюс; $b_1$ стоит в первой строке и втором столбце, т. е. $1 + 2 = 3$, и определитель берут со знаком минус.

Определитель третьего порядка можно разложить по элементам любой строки (столбца). Например, разложим определитель третьего порядка по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Этот определитель удобно разложить по элементам второй строки, так как она содержит нули:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) = 14.$$

Ответ. 14.

## § 3. Решение систем линейных уравнений с помощью определителей

Для системы (5.1) $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ в § 2 были получены формулы (5.2)

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$$

Если обозначить

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ — определитель системы (5.1),}$$

$$\Delta_x = c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

то формулы (5.2) для решения системы (5.1) можно записать в виде

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \text{ и } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{5.8}$$

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$

Решение. Вычислим определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 10, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 3 = 5.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ответ. (2; 1).

Для системы (5.3) $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ в § 2 были получены формулы (5.5).

Если выражение, стоящее в знаменателях этих формул, обозначить

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ — определитель системы (5.3),}$$

а выражения, стоящие в числителях, обозначить

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

то формулы (5.5) можно переписать в виде

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{5.9}$$

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5, \\ x + y - z = 4, \\ x - y + 2z = 3. \end{cases}$

Решение. Вычислим определители системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

Найдем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 15,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Решением системы будет $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$.

Ответ. (3; 2; 1).

**Правило Крамера.** Если определитель системы двух или трех линейных уравнений с двумя или тремя неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение, причем каждое неизвестное равно дроби, знаменателем которой служит определитель системы, а числителем определитель, получаемый из знаменателя заменой столбца коэффициентов при определяемом неизвестном столбцом свободных членов. Формулы (5.8) и (5.9) для определения решений соответственно систем (5.1) и (5.3) называются *формулами Крамера.*

Аналогично формулируется правило Крамера для системы $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{5.10}$$

Формулы Крамера записываются так:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \\ b_2 a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_n a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} b_2 a_{23} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} b_n a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots,$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots b_1 \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_n}{\Delta}. \tag{5.11}$$

## § 4. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Рассмотрим систему уравнений (5.1)

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

1. Если определитель системы не равен нулю, т. е. $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

означает, что строки определителя не пропорциональны (см. свойства определителей, § 2), поэтому условие единственности решения системы (5.1) при $a_2 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$ можно записать так:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2},$$

т. е. если коэффициенты при неизвестных системы не пропорциональны, то система имеет единственное решение.

2. Если определитель системы равен нулю и хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_x$ или $\Delta_y$ отличен от нуля (легко убедиться, что в этом случае оба определителя отличны от нуля, т. е. $\Delta_x \neq 0$ и $\Delta_y \neq 0$), то система решений не имеет, т. е. несовместна (противоречива).

Условие несовместности системы (5.1) при $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$ можно записать в виде

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

т. е. если коэффициенты при неизвестных системы (5.1) пропорциональны между собой, но не пропорциональны свободным членам системы, то она решений не имеет.

3. Если определитель системы равен нулю и хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_x$ или $\Delta_y$ равен нулю (в этом случае $\Delta_x = \Delta_y = 0$), то система имеет бесчисленное множество решений (т. е. она называется неопределенной).

Условие бесчисленности множества решений системы (5.1) при $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$ можно записать в виде

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

т. е. если коэффициенты при неизвестных и соответствующие свободные члены системы пропорциональны, то система неопределенная. Она имеет бесчисленное множество решений, получаемых как решения одного из уравнений системы. Уравнения системы в этом случае одинаковы с точностью до постоянного множителя, т. е. одно из уравнений равносильно другому.

Пример. Определить, при каких значениях $m$ система

$$\begin{cases} (m+5)\,x + (2m+3)\,y = 3m+2, \\ (3m+10)\,x + (5m+6)\,y = 4m+4 \end{cases}$$

имеет единственное решение; бесчисленное множество решений; не имеет решений.

Решение. Найдем, при каких значениях $m$ определитель системы равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+5 & 2m+3 \\ 3m+10 & 5m+6 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } m^2 - 2m = 0,$$

откуда $m_1 = 0$ и $m_2 = 2$.

Если $m \neq 0$ и $m \neq 2$, то определитель системы $\Delta \neq 0$, т. е. система имеет единственное решение.

Проверим равенство $\frac{m+5}{3m+10} = \frac{3m+2}{4m+4}$ при $m_1 = 0$ и $m_2 = 2$. При $m_1 = 0$ получаем $\frac{5}{10} = \frac{2}{4}$, или $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, т. е. при $m_1 = 0$ система имеет бесчисленное множество решений.

При $m = 2$ получаем

$$\frac{2+5}{3\cdot 2+10} \neq \frac{3\cdot 2+2}{4\cdot 2+4}, \text{ или } \frac{7}{16} \neq \frac{2}{3},$$

т. е. система решений не имеет.

Ответ: при $m \neq 0$ и $m \neq 2$ система имеет одно решение;
при $m = 0$ — бесчисленное множество решений;
при $m = 2$ — не имеет решений.

## § 5. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

**Система двух алгебраических рациональных уравнений с двумя неизвестными, из которых одно линейное,** в общем виде записывается

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ ax + by = c, \end{cases} \tag{5.12}$$

где $F(x, y)$ — нелинейное алгебраическое рациональное выражение.

Систему (5.12) удобно решать методом подстановки. Из второго уравнения системы находим одно из неизвестных, например при $b \neq 0$

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

и подставляем в первое уравнение. В результате получаем рациональное алгебраическое уравнение (выводное уравнение системы (5.12)) с одним неизвестным

$$F\left(x, \frac{c - ax}{b}\right) = 0,$$

в результате решения которого найдем его корни

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

а по ним определим соответствующие значения $y$, т. е. найдем пары чисел

$$\left(x_1; \frac{c - ax_1}{b}\right), \left(x_2; \frac{c - ax_2}{b}\right), \ldots, \left(x_n; \frac{c - ax_n}{b}\right).$$

Все решения системы (5.12) всегда находятся среди найденных пар чисел; обратное не всегда верно. Поэтому каждая пара найденных чисел должна быть подвергнута проверке по условию системы (5.12).

Если $b = 0$, то второе уравнение системы принимает вид $ax = c$ и из него находим $x = \frac{c}{a}$; тогда выводное уравнение запишется в виде

$$F\left(\frac{c}{a}; y\right) = 0.$$

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y = 6, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Из второго уравнения системы найдем $y = 2x - 3$. Подставив это значение $y$ в первое уравнение системы, получим $x^2 - 3x(2x-3) + (2x-3)^2 + 2x + 3(2x-3) = 6$, или, после преобразования, $x^2 - 5x + 6 = 0$, откуда найдем $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; тогда $y_1 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$, $y_2 = 2 \cdot 3 - 3 = 3$.

Проверкой убеждаемся, что найденные пары чисел — решения данной системы.

О т в е т. $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 - x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x + 4y = 2, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Из второго уравнения находим

$$x = 1 + 2y.$$

Подставив это значение $x$ в первое уравнение системы, получим

$$(1+2y)^2 y + (1+2y) y^2 - (1+2y)^2 - \\ - 4(1+2y) y - 2y^2 + 3(1+2y) + 4y - 2 = 0,$$

или, после преобразований, $2y^3 - 3y^2 + y = 0$, откуда найдем $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = \frac{1}{2}$ и соответственно $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.

О т в е т. $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Рассмотрим некоторые частные случаи системы (5.12), если ее первое уравнение второй степени относительно неизвестных, т. е.

$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + K,$$

где хотя бы один из коэффициентов $A$, $B$ или $C$ не равен нулю.

В этом случае система (5.12) принимает вид

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + K = 0, \\ ax + by = c. \end{cases} \tag{5.13}$$

При решении системы (5.13) методом исключения (подстановки) ее выводное уравнение будет квадратным относительно одного из неизвестных, т. е. система (5.13) всегда разрешима и не может иметь более двух решений.

Во многих случаях решение более сложных систем уравнений с двумя неизвестными приводится к решению систем, являющихся частными случаями системы (5.13) вида

а) $\begin{cases} x \pm y = a, \\ xy = b \end{cases}$ или б) $\begin{cases} x^2 \pm y^2 = a, \\ x \pm y = b. \end{cases}$

Системы уравнений вида «а» удобнее решать не методом исключения (подстановки), а используя свойства корней квадратного урав-

нения (теорему Виета). Неизвестные этих систем $x$ и $y$ (или $-y$) можно рассматривать как корни вспомогательного квадратного уравнения

$$t^2 - at \pm b = 0.$$

Решая это уравнение, найдем его корни $t_1$ и $t_2$. Тогда решениями данных систем соответственно будут пары чисел $(t_1; t_2)$ и $(t_2; t_1)$ или $(t_1; -t_2)$ и $(t_2; -t_1)$.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = -18. \end{cases}$$

Решение. Составляем вспомогательное уравнение

$$t^2 - 7t - 18 = 0,$$

из которого находим корни $t_1 = -2$, $t_2 = 9$.

Тогда решениями данной системы уравнений будут пары чисел $(-2; 9)$ и $(9; -2)$.

Ответ. $(-2; 9)$, $(9; -2)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 8, \\ xy = -15. \end{cases}$$

Решение. Перепишем данную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x + (-y) = 8, \\ x(-y) = 15. \end{cases}$$

Из вспомогательного уравнения

$$t^2 - 8t + 15 = 0,$$

корнями которого являются $x$ и $-y$, найдем его корни $t_1 = 3$ и $t_2 = 5$.

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ -y_1 = 5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = 5, \\ -y_2 = 3, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = -5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = -3. \end{cases}$$

Ответ. $(3; -5)$, $(5, -3)$.

Системы уравнений вида «б» также, кроме метода исключения (подстановки), решаются другими способами.

Например, систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x \pm y = b \end{cases}$$

можно привести к системам вида «а».

Возведя обе части второго уравнения системы в квадрат и вычтя первое уравнение, получим уравнение

$$\pm 2xy = b^2 - a,$$

или

$$xy = \pm \frac{b^2 - a}{2}.$$

Тогда решение данной системы приводится к решению системы

$$\begin{cases} x \pm y = b, \\ xy = \pm \dfrac{b^2 - a}{2}, \end{cases}$$

которая является следствием данной.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Решение. Возведя обе части второго уравнения системы в квадрат и вычтя первое уравнение системы, получим

$$-2xy = -30,$$

или

$$xy = 15.$$

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 15 \end{cases}$$

будет следствием данной системы. Решая эту систему, находим решения (—3; —5) и (5; 3). Проверкой убеждаемся, что эти решения являются решениями данной системы.

Ответ. (—3; —5), (5; 3).

Системы уравнений вида

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x \pm y = b \end{cases}$$

можно решать так: разложив левую часть первого уравнения на множители, получим

$$(x + y)(x - y) = a.$$

Предполагая, что система имеет решения, заменим в этом уравнении, учитывая второе уравнение,

$$x + y = b \text{ или } x - y = b.$$

Тогда данная система приводится к системам

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{a}{b}, \\ x + y = b \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + y = \dfrac{a}{b}, \\ x - y = b \end{cases} \quad (b \neq 0).$$

Если данные системы имеют решения, то этими решениями будут решения полученных систем.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 20, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

Решение. Разложим левую часть первого уравнения системы на множители:

$$(x + y)(x - y) = 20.$$

Предполагая, что данная система имеет решения и учитывая второе уравнение системы, получим

$$10(x - y) = 20, \text{ или } x - y = 2.$$

Тогда решение данной системы приводится к решению системы

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 10, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} x = 6, \\ y = 4. \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что это решение является решением данной системы.

Ответ. (6; 4).

**Системы двух уравнений с двумя неизвестными, каждое из которых — уравнение второй степени.**

В общем виде их можно записать так:

$$\begin{cases} A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0, \\ A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

Система уравнений (5.14) может иметь не более четырех решений.

Вообще, можно показать, что система двух целых рациональных алгебраических уравнений с двумя неизвестными, первое из которых $n$-й, а второе $m$-й степени относительно неизвестных, не может иметь более чем $nm$ решений.

Рассмотрим простейшие частные случаи системы (5.14), к решению которых приводится решение более сложных систем уравнений.

Это системы вида

$$\begin{cases} x^2 \pm y^2 = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Если обе части второго уравнения систем возвести в квадрат, то получим системы

$$\begin{cases} x^2 \pm y^2 = a, \\ x^2y^2 = b^2, \end{cases}$$

которые являются следствиями данных систем.

Рассматривая $x^2$ и $y^2$ (или $-y^2$) как корни квадратного уравнения

$$t^2 - at \pm b^2 = 0$$

и найдя его корни $t_1$ и $t_2$, получим системы

$$\begin{cases} x^2 = t_1, \\ y^2 = t_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = t_2, \\ y^2 = t_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 = t_1, \\ y^2 = -t_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = t_2, \\ y^2 = -t_1, \end{cases}$$

среди решений которых всегда находятся все решения данных систем.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 40, \\ xy = 21. \end{cases}$$

Решение. Возведя обе части второго уравнения системы в квадрат, получим систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 40, \\ x^2y^2 = 441, \end{cases}$$

которую перепишем в виде

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 40, \\ x^2 \cdot (-y^2) = -441. \end{cases}$$

Считая, что $x^2$ и $(-y^2)$ — корни квадратного уравнения, составляем вспомогательное уравнение

$$t^2 - 40t - 441 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем его корни

$$t_1 = -9 \text{ и } t_2 = 49.$$

Тогда решение данной системы уравнений приводится к решению совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2 = -9, \\ y^2 = -49 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 = 49, \\ y^2 = 9. \end{cases}$$

Первая система совокупности действительных решений не имеет. Решая вторую систему, находим ее решения

$$(-7; -3),\ (-7; +3),\ (7; -3) \text{ и } (7; 3).$$

Проверкой убеждаемся, что из найденных пар чисел решениями данной системы будут пары (—7; —3) и (7; 3).

Ответ. (—7; —3), (7; 3).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Решение. После возведения второго уравнения системы в квадрат получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^2y^2 = 64. \end{cases}$$

Считая $x^2$ и $y^2$ корнями квадратного уравнения, составляем вспомогательное уравнение

$$t^2 - 20t + 64 = 0,$$

из которого находим $t_1 = 4$ и $t_2 = 16$.

Тогда полученная система уравнений равносильна совокупности двух систем —

$$\begin{cases} x^2 = 4, \\ y^2 = 16 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 = 16, \\ y^2 = 4, \end{cases}$$

которая является следствием данной системы.

Решая системы совокупности, находим ее решения: (—2; —4), (—2; 4), (2; —4), (2; 4), (—4; —2), (—4; 2), (4; —2) и (4; 2).

Из найденных решений совокупности решениями данной системы будут (—2; —4), (2; 4), (—4; —2) и (4; 2).

Ответ. (—2; —4), (2; 4), (—4; —2), (4; 2).

Систему уравнений вида

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b \end{cases}$$

лучше решать другим способом. Умножив второе уравнение системы на 2, получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ 2xy = 2b. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения полученной системы, находим

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b, \\ x^2 - 2xy + y^2 = a - 2b, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x + y)^2 = a + 2b, \\ (x - y)^2 = a - 2b. \end{cases}$$

Извлекая квадратный арифметический корень из обеих частей уравнений системы (система рассматривается над множеством действительных чисел, поэтому $a + 2b \geqslant 0$ и $a - 2b \geqslant 0$), получим

$$\begin{cases} |x + y| = \sqrt{a + 2b}, \\ |x - y| = \sqrt{a - 2b}. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности следующих четырех систем:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b}, \\ x-y=-\sqrt{a-2b}, \end{cases} \quad \text{б)}\ \begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b}, \\ x-y=\sqrt{a-2b}, \end{cases}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b}, \\ x-y=-\sqrt{a-2b}, \end{cases} \quad \text{г)}\ \begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b}, \\ x-y=\sqrt{a-2b}. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения каждой системы совокупности и деля полученные уравнения на 2, найдем ее решения:

$$\left(\frac{-\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{2};\ \frac{-\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2};\ \frac{-\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{2};\ \frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2};\ \frac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{2}\right).$$

Заметим, что при этом способе решения полученная совокупность систем уравнений «а», «б», «в» и «г» равносильна данной системе.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=80, \\ xy=32. \end{cases}$$

Решение. Представим данную систему в виде

$$\begin{cases} x^2+y^2=80, \\ 2xy=64. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения этой системы, получаем

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=144, \\ x^2-2xy+y^2=16, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x+y)^2=144, \\ (x-y)^2=16, \end{cases} \quad \begin{cases} |x+y|=12, \\ |x-y|=4. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности четырех систем:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x+y=-12, \\ x-y=-4, \end{cases} \quad \text{б)}\ \begin{cases} x+y=-12, \\ x-y=4, \end{cases}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} x+y=12, \\ x-y=-4, \end{cases} \quad \text{г)}\ \begin{cases} x+y=12, \\ x-y=4, \end{cases}$$

в результате решения которой находим (—8; —4), (—4; —8), (4; 8) и (8; 4).

Ответ. (—8; —4), (—4; —8), (4; 8), (8; 4).

Последний способ решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b \end{cases}$$

предпочтительнее предыдущего, так как при этом данная система приводится к совокупности систем уравнений, равносильной ей, и нет необходимости в проверке найденных пар чисел по условию данной системы.

При решении систем уравнений часто прибегают к приему сложения и вычитания уравнений. Поэтому полезно знать следующую теорему.

**Теорема.** ***Система*** *двух уравнений с двумя неизвестными*

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

*равносильна* ***(эквивалентна)*** *системе уравнений*

$$\begin{aligned} aF_1(x, y) + bF_2(x, y) &= 0, \\ cF_1(x, y) + dF_2(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

***при*** $ad - bc \neq 0$, *где* $a$, $b$, $c$ и $d$ — *любые действительные числа.*

Доказательство. а) Пусть система (1) имеет решения и пара чисел $(\alpha; \beta)$ — любое из ее решений. Тогда

$$\begin{cases} F_1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ F_2(\alpha, \beta) \equiv 0. \end{cases}$$

Умножив первое тождество на $a$, а второе на $b$ и сложив, получим

$$aF_1(\alpha, \beta) + bF_2(\alpha, \beta) \equiv 0.$$

Аналогично, умножив первое тождество на $c$, а второе на $d$ и сложив, получим

$$cF_1(\alpha, \beta) + dF_2(\alpha, \beta) \equiv 0,$$

т. е. пара чисел $(\alpha; \beta)$ обращает каждое уравнение системы (2) в тождество, а это значит, что любое решение системы (1) является решением системы (2), т. е. $(1) \Rightarrow (2)$.

б) Пусть система (2) имеет решения и пара чисел $(\gamma; \delta)$ — любое из них.

Тогда

$$\begin{cases} aF_1(\gamma; \delta) + bF_2(\gamma; \delta) \equiv 0, \\ cF_1(\gamma; \delta) + dF_2(\gamma; \delta) \equiv 0. \end{cases}$$

Умножив первое тождество на $d$, а второе на $-b$ и сложив, получим

$$(ad - bc) F_1(\gamma; \delta) \equiv 0;$$

аналогично, умножив первое тождество на $-c$, а второе на $a$ и сложив, получим

$$(ad - bc) F_2(\gamma; \delta) \equiv 0.$$

Если $ad - bc \neq 0$, то из полученных тождеств следует

$$\begin{cases} F_1(\gamma; \delta) \equiv 0, \\ F_2(\gamma; \delta) \equiv 0, \end{cases}$$

а это значит, что любое решение системы (2) при $ad - bc \neq 0$ является решением системы (1), т. е. (2)$\Rightarrow$(1).

Для завершения доказательства теоремы покажем, что системы (1) и (2) одновременно не имеют решений.

Допустим, что система (1) не имеет решения, а система (2) имеет их. Это противоречит тому, что было доказано в пункте «б», т. е. что (2)$\Rightarrow$(1). Значит, система (2) не имеет решений. Аналогично приходим к противоречию, допустив, что система (2) не имеет решений, а система (1) имеет их.

Теорема доказана полностью.

Замечание. Доказанная теорема остается справедливой, если $a$, $b$, $c$ и $d$ будут выражениями относительно неизвестных $x$ и $y$, если при всех допустимых значениях $x$ и $y$ в системе (1) $ab - cd \neq 0$.

**Системы уравнений, в одном из которых или в обоих левая часть раскладывается на множители, а правая равна нулю.**

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Если левая часть второго уравнения системы (1) раскладывается на два множителя —

$$F_2(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y),$$

т. е. второе уравнение системы можно записать в виде

$$f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) \neq 0,$$

то решение системы (1) приводится к решению совокупности двух систем уравнений, которую принято записывать так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} F_1(x; y) = 0, \\ f_1(x, y) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{2}$$

Решением совокупности систем уравнений (или уравнений) называется всякое решение любой из систем (или уравнения) этой совокупности.

Другими словами, решениями совокупности (2) будут все решения ее первой и второй систем.

Решить совокупность систем уравнений (или уравнений) значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет.

Все решения системы (1) всегда будут решениями совокупности (2), т. е. (1)$\Rightarrow$(2). Обратное не всегда верно. Если при всех решениях совокупности (2) оба уравнения системы (1) имеют числовой смысл, то (1)$\Leftrightarrow$(2).

Если же левые части обоих уравнений системы (1) раскладываются на множители, то ее можно записать в виде

$$\begin{cases} f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) = 0, \\ f_3(x, y) \cdot f_4(x, y) = 0; \end{cases} \tag{3}$$

решение системы (3) приводится к решению совокупности четырех систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_3(x, y) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_4(x, y) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x, y) = 0, \\ f_3(x, y) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x, y) = 0, \\ f_4(x, y) = 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{4}$$

Совокупность систем уравнений (4) является следствием системы (1). Если при всех решениях совокупности (4) система (1) имеет числовой смысл, то (1)$\Leftrightarrow$(4).

Аналогично решение систем уравнений приводится к решению совокупностей более простых систем, если левые части ее уравнений раскладываются на большее число множителей.

Система уравнений (5.14) может быть приведена к совокупности двух систем уравнений вида (5.13), если дискриминант одного из уравнений системы (5.14), рассматриваемого относительно одной из неизвестных, является точным квадратом рационального выражения относительно второго неизвестного. Причем в этом случае система (5.14) всегда равносильна полученной совокупности.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y - 24 = 0, \\ x^2 + xy - 2y^2 - 3x + 3y = 0. \end{cases}$$

Решение. Разложим левую часть второго уравнения системы на множители. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно $x$:

$$x^2 + (y - 3)x - 2y^2 + 3y = 0;$$

решив его, найдем $x_1 = y$ и $x_2 = 3 - 2y$. Тогда второе уравнение системы можно переписать как $(x - y)(x - 3 + 2y) = 0$, равносильное двум уравнениям:

$$x - y = 0 \text{ и } x + 2y - 3 = 0,$$

Следовательно, данная система равносильна совокупности двух систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-15xy+4y^2-12x+45y-24=0,\\ x-y=0;\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2-15xy+4y^2-12x+45y-24=0,\\ x+2y-3=0;\end{cases}\end{array}\right.$$

решив ее, найдем

$$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=\frac{8}{3},\\ y_2=\frac{8}{3};\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=5,\\ y_3=-1;\end{cases}\quad \begin{cases}x_4=1,\\ y_4=1.\end{cases}$$

Ответ. $(5;\ -1)$, $(1;\ 1)$, $\left(\frac{8}{3};\ \frac{8}{3}\right)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0,\\ 2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0.\end{cases}$$

Решение. Складывая уравнения данной системы, получим

$$3x^2-3xy-18y^2-9x+27y=0,$$

или

$$x^2-xy-6y^2-3x+9y=0.$$

Разложим левую часть этого уравнения на множители:

$$(x-3y)(x+2y-3)=0,\ \text{или}\ x-3y=0\ \text{и}\ x+2y-3=0.$$

Тогда данная система равносильна совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0,\\ x-3y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0,\\ x+2y-3=0,\end{cases}\end{array}\right.$$

в результате решения которой найдем

$$\begin{cases}x_1=-3,\\ y_1=-1,\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=3,\\ y_2=1,\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=1,\\ y_3=1,\end{cases}\quad \begin{cases}x_4=-1,\\ y_4=2.\end{cases}$$

Ответ. $(-3;\ -1)$, $(-1;\ 2)$, $(1;\ 1)$, $(3;\ 1)$.

Замечание. Можно было, как и в предыдущем примере, первое уравнение рассмотреть как квадратный трехчлен относительно $x$, найти его корни и разложить на множители.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = x + 5y. \end{cases}$$

Решение. Складывая и вычитая уравнения системы, получим систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6(x + y), \\ x^3 - y^3 = 4(x - y), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) - 6(x + y) = 0, \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 4(x - y) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 6) = 0, \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности четырех систем уравнений, которые решим последовательно:

а) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$ откуда $x_1 = 0,\ y_1 = 0;$

б) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 6 = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_2 = -\sqrt{6}, \\ y_2 = -\sqrt{6}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = \sqrt{6}, \\ y_3 = \sqrt{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 4 = 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_5 = 2, \\ y_5 = -2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 6 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$

Складывая и вычитая левые и правые части уравнений последней системы, получим

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2xy = -2; \end{cases}$$

еще раз складывая и вычитая уравнения, найдем

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 3, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 7, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 3 = 0, \\ (x - y)^2 - 7 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$(x + y - \sqrt{3})(x + y + \sqrt{3}) = 0,$$
$$(x - y - \sqrt{7})(x - y + \sqrt{7}) = 0.$$

Последняя система равносильна совокупности следующих четырех систем:

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} x+y-\sqrt{3}=0, \\ x-y-\sqrt{7}=0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_6=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3}), \\ y_6=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{7}); \end{cases} \\
\begin{cases} x+y-\sqrt{3}=0, \\ x-y+\sqrt{7}=0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_7=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{7}); \\ y_7=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3}); \end{cases} \\
\begin{cases} x+y+\sqrt{3}=0, \\ x-y-\sqrt{7}=0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_8=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3}), \\ y_8=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3}); \end{cases} \\
\begin{cases} x+y+\sqrt{3}=0, \\ x-y+\sqrt{7}=0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_9=-\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3}), \\ y_9=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3}). \end{cases}
\end{array}\right.$$

**Ответ.** $(0; 0)$, $(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$, $(\sqrt{6}; \sqrt{6})$, $(-2; 2)$, $(2; -2)$, $\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)$.

**Системы уравнений, левые части которых однородны относительно $x$ и $y$, а правые не содержат неизвестных.**

Выражение (функция) $F(x, y)$ называется однородным $k$-го измерения относительно $x$ и $y$, если для любого положительного $t$ имеет место тождество

$$F(tx, ty) \equiv t^k F(x, y).$$

Проверить на однородность выражения:

а) $F(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$.

Вычислим

$$F(tx, ty) \equiv (tx)^2 + 3(tx)(ty) - (ty)^2 \equiv t^2(x^2 + 3xy - y^2) \equiv t^2 F(x, y).$$

Данное выражение однородное 2-го измерения

б) $F(x, y) = \frac{x^3 + xy\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$.

Вычислим

$$F(tx, ty) \equiv \frac{t^3x^3 + t^2xy\sqrt{t^2xy}}{t^2x^2 + t^2y^2} \equiv t\,\frac{x^3 + xy\sqrt{xy}}{x^2 + y^2} \equiv tF(x, y).$$

Данное выражение однородное 1-го измерения.

Если выражение $F(x, y)$ — многочлен, то оно будет однородным $k$-го измерения, если все его члены $k$-й степени относительно $x$ и $y$. Например, $x + 3y$ — выражение однородное 1-го измерения; $x^2 + 3xy + 5y^2$ — выражение однородное 2-го измерения; $x^4 + x^3y + y^4$ — выражение однородное 4-го измерения.

Системы уравнений, левые части которых однородны относительно $x$ и $y$, а правые не содержат неизвестных, можно решать, пользуясь заменой $x = ty$.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17. \end{cases}$$

Решение.

Так как левые части уравнений однородны относительно $x$ и $y$, введем замену $x = ty$; система примет вид

$$\begin{cases} y^2(3t^2 + 2t + 1) = 11, \\ y^2(t^2 + 2t + 3) = 17. \end{cases}$$

Разделив левые и правые части уравнений ($y \neq 0$), получим $\frac{3t^2+2t+1}{t^2+2t+3} = \frac{11}{17}$, или, после преобразований, $10t^2 + 3t - 4 = 0$, откуда $t_1 = -\frac{4}{5}$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

А. $t_1 = -\frac{4}{5}$. Тогда из уравнения $y^2(t^2 + 2t + 3) = 17$ находим $y^2\left(\frac{16}{25} - \frac{8}{5} + 3\right) = 17$, или $y^2 = \frac{25}{3}$, откуда

$$y_1 = -\frac{5\sqrt{3}}{3}; \quad y_2 = \frac{5\sqrt{3}}{3};$$

тогда

$$x_1 = -\frac{4}{5}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Б. $t^2 = \frac{1}{2}$. Тогда $y^2\left(\frac{1}{4} + 1 + 3\right) = 17$, или $y^2 = 4$,

откуда $y_3 = -2$; $y_4 = 2$, а $x_3 = \frac{1}{2}(-2) = -1$, $x_4 = 1$.

Ответ. $\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}\sqrt{3}, \\ y_1 = -\frac{5}{3}\sqrt{3}; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{3}, \\ y_2 = \frac{5}{3}\sqrt{3}; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = -2; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 1, \\ y_4 = 2. \end{cases}$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Так как правые части системы однородны, то заменим $x = yt$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} y^3(t^3+1)=1, \\ y^3(t^2+2t+1)=2. \end{cases}$$

Разделив левые и правые части уравнений ($y \neq 0$), найдем $\frac{t^3+1}{t^2+2t+1}=\frac{1}{2}$ ($t \neq -1$), или $\frac{t^2-t+1}{t+1}=\frac{1}{2}$, откуда, после преобразований, получим уравнение

$$2t^2-3t+1=0,$$

из которого находим $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=1$.

А. $t_1=\frac{1}{2}$. Тогда из уравнения $y^3(t^3+1)=1$ находим действительные решения $y_1$ и $x_1$: $y^3=\frac{8}{9}$, $y_1=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$ и $x_1=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}\cdot\frac{1}{2}=$ $=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$.

Б. $t_2=1$. Тогда $y^3=\frac{1}{2}$ и $y_2=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, а $x_2=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

О т в е т. $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3};\ \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\ \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$.

**Системы уравнений, симметричных относительно неизвестных.** Уравнение называется *симметричным относительно неизвестных*, если оно не изменяется при любых перестановках неизвестных.

В частности, уравнения, содержащие только выражения $x+y$, $xy$, $x^2+y^2$, $x^3+y^3$, $x^4+y^4$ и т. п., будут симметричными относительно $x$ и $y$. Такие системы уравнений можно решать заменой

$$\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v. \end{cases}$$

Тогда

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v,$$
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=u(u^2-3v),$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2.$$

П р и м е р 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Введем замену $(x+y)$ на $u$, а $xy$ на $v$; $x+y=u$, $xy=v$. Тогда $x^2+y^2=u^2-2v$. Относительно $u$ и $v$ система примет вид

$$\begin{cases} u^2-2v+u=8, \\ u^2-2v+v=7, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u^2+u-2v=8, \\ u^2-v=7. \end{cases}$$

Из второго уравнения $v = u^2 - 7$. Подстановкой в первое получаем $u^2 + u - 2u^2 + 14 = 8$, или $u^2 - u - 6 = 0$, откуда $u_1 = -2$, $u_2 = 3$. Тогда $v_1 = -3$, $v_2 = 2$. Данная система приводится к решению двух систем:

$$\begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -3, \end{cases}$$ из которой находим $\begin{cases} x_1 = -3, \\ y_1 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -3; \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases}$$ из которой находим $\begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_4 = 2, \\ y_4 = 1. \end{cases}$

Ответ. (—3; 1), (1; —3), (1; 2), (2; 1).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481, \\ x^2 + xy + y^2 = 37. \end{cases}$$

Решение. Введем замену $x + y = u$, $xy = v$; тогда $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, а $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - v^2$. Система относительно $u$ и $v$ принимает вид

$$\begin{cases} u^4 - 4u^2v + 3v^2 = 481, \\ u^2 - v = 37. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $v = u^2 - 37$ и подставляем в первое; получаем $u^4 - 4u^2(u^2 - 37) + 3(u^2 - 37)^2 = 481$, или, после преобразований, $u^2 = 49$, откуда $u_1 = -7$, $u_2 = 7$, $v_1 = 12$ и $v_2 = 12$. Данная система приводится к двум системам:

$$\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12, \end{cases}$$

из которых получаем $\begin{cases} x_1 = -3, \\ y_1 = -4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -4, \\ y_2 = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = 3, \\ y_3 = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = 4, \\ y_4 = 3. \end{cases}$

Ответ. (—3; —4); (—4; —3); (3; —4), (4; 3).

**Системы уравнений, в которые входят иррациональные уравнения,** решаются различными методами. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих эти методы.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{2}{y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Решение. Найдем ОДЗН системы.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} \geqslant 0, \\ y \neq 0, \end{cases}$$ т. е. $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y < 0. \end{cases}$

А. Рассмотрим решение данной системы, если $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y > 0. \end{cases}$ Умножив обе части первого уравнения на $y$, получим $xy + y\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$; так как $y > 0$, то $xy + \sqrt{xy} - 2 = 0$.

Полученное уравнение является квадратным относительно $\sqrt{xy}$; по теореме Виета, $\sqrt{xy} = 1$ и $\sqrt{xy} = -2$. Так как $\sqrt{xy} \geqslant 0$, то $\sqrt{xy} = 1$, или $xy = 1$.

Получаем систему

$$\begin{cases} xy = 1, \\ y - x = 3, \end{cases}$$

после решения которой находим

$$\begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \\ y = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}, \\ y = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Вторая пара чисел не принадлежит к рассматриваемым значениям $x$ и $y$, поэтому

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \\ y_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Б. Если $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y < 0 \end{cases}$, то, умножив обе части первого уравнения системы на $y < 0$, получим $xy + y\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$. Так как $y < 0$, то $xy - \sqrt{xy} - 2 = 0$, откуда $\sqrt{xy} = 2$ и $\sqrt{xy} = -1$. Поскольку корень арифметический, то $\sqrt{xy} = 2$, или $xy = 4$.

Получаем систему

$$\begin{cases} xy = 4, \\ y - x = 3, \end{cases}$$

из которой находим

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4, \\ y = -1. \end{cases}$$

Первая пара значений $x$ и $y$ не принадлежит к рассматриваемым значениям, поэтому

$$\begin{cases} x_2 = -4, \\ y_2 = -1. \end{cases}$$

Ответ. $\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)$, $(-4; -1)$.

Проверьте найденные решения по условию.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\dfrac{5}{2}\sqrt[6]{xy}, \\ x+y=65 \end{cases} \qquad (xy \geqslant 0).$$

Решение. Возведем обе части первого уравнения в куб по формуле $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)$; получим $x+y+3\sqrt[3]{xy}\times$ $\times\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)=\dfrac{125}{8}\sqrt{xy}$. Если система имеет решение, то $x+y=$ $=65$, $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\dfrac{5}{2}\sqrt[6]{xy}$ и последнее уравнение принимает вид $65+3\sqrt[3]{xy}\cdot\dfrac{5}{2}\sqrt[6]{xy}=\dfrac{125}{8}\sqrt{xy}$ или, после преобразований, $\sqrt{xy}=$ $=8$; соответственно $xy=64$. Получаем систему

$$\begin{cases} xy=64, \\ x+y=65, \end{cases}$$

из которой находим

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=64, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=64, \\ y_2=1. \end{cases}$$

Проверка показывает, что найденные значения $x$ и $y$ есть решения данной системы.

Ответ. $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=64; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=64, \\ y_2=1. \end{cases}$

Примечание. Если обе части первого уравнения данной системы разделить на $\sqrt[3]{y}$, то получим квадратное уравнение относительно $\sqrt[6]{\dfrac{x}{y}}$, откуда найдем $\dfrac{x}{y}=64$ или $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{64}$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1, \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78 \end{cases} \qquad (x>0,\ y>0).$$

Решение. Так как по условию $x>0$ и $y>0$, то, умножив обе части первого уравнения системы на $\sqrt{xy}$, получим

$$\begin{cases} |x|+|y|=7+\sqrt{xy}, \\ (x+y)\sqrt{xy}=78, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y=7+\sqrt{xy}, \\ (x+y)\sqrt{xy}=78. \end{cases}$$

Подставляя из первого уравнения $x+y=7+\sqrt{xy}$ во второе, получим $xy+7\sqrt{xy}-78=0$, откуда $\sqrt{xy}=6$, или $xy=36$. Тогда

$$\begin{cases} x+y=13, \\ xy=36; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=4, \\ y_1=9; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=9, \\ y_2=4. \end{cases}$$

Подстановкой в первоначальную систему убеждаемся, что найденные значения $x$ и $y$ есть решения.

Ответ. (4; 9), (9; 4).

**Решение систем, содержащих абсолютные величины,** проиллюстрируем на примерах.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3|x|+5y+9=0, \\ 2x-|y|-7=0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим данную систему при условиях:

а) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$ Система принимает вид $\begin{cases} 3x+5y+9=0, \\ 2x-y-7=0, \end{cases}$ откуда находим $\begin{cases} x=2, \\ y=-3. \end{cases}$

Эти значения $x$ и $y$ не принадлежат к рассматриваемым;

б) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y < 0. \end{cases}$ Система принимает вид $\begin{cases} 3x+5y+9=0, \\ 2x+y-7=0, \end{cases}$ откуда находим $\begin{cases} x=\frac{44}{7}, \\ y=-\frac{39}{7}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$ Система принимает вид $\begin{cases} -3x+5y+9=0, \\ 2x-y-7=0, \end{cases}$ откуда находим $\begin{cases} x=\frac{26}{7}, \\ y=\frac{3}{7}. \end{cases}$ Эти значения не принадлежат к рассматриваемым;

г) $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0. \end{cases}$ Система принимает вид $\begin{cases} -3x+5y+9=0, \\ 2x+y-7=0, \end{cases}$ откуда находим $\begin{cases} x=\frac{44}{13}. \\ y=\frac{3}{13}. \end{cases}$ Эти значения не принадлежат к рассматриваемым.

Ответ. $\begin{cases} x=\frac{44}{7}, \\ y=-\frac{39}{7}. \end{cases}$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-y|+y^2=3, \\ |x-1|+|y-1|=2. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим данную систему отдельно при $x<1$ и при $x \geqslant 1$.

1. Если $x < 1$, то:

а) при $y < x$ система принимает вид

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ -x + 1 - y + 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

откуда находим (1; —1), (—3; 3).

Каждая из найденных пар чисел не удовлетворяет условиям $y < x < 1$, т. е. не принадлежит к рассматриваемым числам;

б) при $x \leqslant y < 1$ система принимает вид

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ -x + 1 - y + 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

откуда находим (3; —3) и (—1; 1).

Из этих пар чисел ни одна не принадлежит к рассматриваемым числам;

в) при $y \geqslant 1$ (тогда $y > x$) система принимает вид

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ -x + 1 + y - 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x - y = -2, \end{cases}$$

откуда находим (—3; —1) и (—1; 1), из которых только вторая пара чисел (—1; 1) принадлежит к рассматриваемым числам, т. е. (—1; 1) — решение данной системы.

2. Если $x \geqslant 1$, то:

а) при $x > y$ и $y < 1$ система принимает вид

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x - 1 + 1 - y = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x - y = 2, \end{cases}$$

откуда находим (1; —1) и (4; 2), из которых только первая пара чисел (1; —1) принадлежит к рассматриваемым числам, т. е. (1; —1) — решение данной системы;

б) при $x > y$ и $y \geqslant 1$ система принимает вид

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x - 1 + y - 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x + y = 4, \end{cases}$$

откуда находим (1; 3). Эта пара чисел не принадлежит к рассматриваемым числам;

в) при $x \leqslant y$ (тогда $y \geqslant 1$) система принимает вид

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x - 1 + y - 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x + y = 4, \end{cases}$$

откуда находим $(5 + \sqrt{8}; -1 - \sqrt{8})$ и $(5 - \sqrt{8}; -1 + \sqrt{8})$, из которых ни одна пара чисел не принадлежит к рассматриваемым числам.

Ответ. (—1; 1), (1; —1).

## § 6. Системы трех уравнений с тремя неизвестными

Рассмотрим несколько примеров решения систем уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 12, \\ xz = 15, \\ yz = 20. \end{cases}$$

Решение. Перемножив левые и правые части уравнений системы, получим $x^2y^2z^2 = 3600$, или $xyz = \pm 60$. Разделив полученное уравнение на каждое из заданных, получим

$$x = \pm 3, \qquad y = \pm 4, \qquad z = \pm 5.$$

Ответ. (3; 4; 5), (—3; —4; —5).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + xz = 7, \\ xy + yz = 15, \\ yz + xz = 16. \end{cases}$$

Решение. Сложив уравнения системы и разделив обе части результата на 2, найдем $xy + xz + yz = 19$. Вычитая последовательно из полученного уравнения каждое из заданных, получим систему

$$\begin{cases} xy = 3, \\ xz = 4, \\ yz = 12, \end{cases}$$

которая аналогична предыдущей. Решая ее, находим

$$x = \pm 1; \qquad y = \pm 3; \qquad z = \pm 4.$$

Ответ. $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 3, \\ z_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -3, \\ z_2 = -4. \end{cases}$

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - xz = 2, \\ y^2 + xy - yz = 3, \\ z^2 - xz - yz = 4. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} x(x + y - z) = 2, & (1) \\ y(x + y - z) = 3, & (2) \\ -z(x + y - z) = 4. & (3) \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, получим $(x + y - z)^2 = 9$, или $x + y - z = \pm 3$. Разделив последовательно уравнения (1), (2) и (3) на полученное, найдем $x = \pm \frac{2}{3}$, $y = \mp 1$, $z = \pm \frac{4}{3}$.

Ответ. $\left(\frac{2}{3}; 1; -\frac{4}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; -1; \frac{4}{3}\right)$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{15}{8}. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{x+z}{xz} = \dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{8}{15}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{3}, & (1) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{6}{5}, & (2) \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{8}{15}. & (3) \end{cases}$$

Сложим левые и правые части уравнений (1), (2) и (3); после упрощений получим

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{23}{15}. \tag{4}$$

Вычитая последовательно из уравнения (4) почленно уравнения (3), (2) и (1), найдем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}=1, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{5}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1, \\ y=3, \\ z=5. \end{cases}$$

Ответ. (1; 3; 5).

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=11, & (1) \\ xy+xz+yz=36, & (2) \\ xyz=36. & (3) \end{cases}$$

Решение. Представим уравнение 2 в виде

$$xy+z(x+y)=36. \tag{2'}$$

Из уравнений (1) и (3) соответственно найдем $x+y=11-z$ и $xy=\dfrac{36}{z}$ и подставим в уравнение (2'); получим $\dfrac{36}{z}+z(11-z)=36$, или $z^3-11z^2+36z-36=0$, откуда находим $z_1=2$, $z_2=3$, $z_3=6$.

Так как данная система симметрична относительно неизвестных, то решениями системы будут различные перестановки найденных значений $z$, т. е.

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3, \\ z_1=6, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=6, \\ z_2=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=3, \\ y_3=2, \\ z_3=6, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=3, \\ y_4=6, \\ z_4=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5=6, \\ y_5=2, \\ z_5=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_6=6, \\ y_6=3, \\ z_6=2. \end{cases}$$

Ответ. (2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 2; 3), (6; 3; 2).

Примечание. Данную систему можно решать, пользуясь свойством корней кубического уравнения. Неизвестные данной системы $x$, $y$, $z$ являются корнями кубического уравнения

$$t^3-11t^2+36t-36=0.$$

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2, & (1) \\ xy+xz+yz=47, & (2) \\ (z-x)(z-y)=2. & (3) \end{cases}$$

Решение. Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ xy + xz + yz = 47, \\ z^2 - xz - yz + xy = 2. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получим $x^2 + 2xy + y^2 = 49$, или $(x + y)^2 = 49$, откуда $x + y = 7$, или $x + y = -7$. Умножим уравнение (2) на 2 и сложим его с уравнением (1); получим

$$(x + y)^2 + 2xz + 2yz = 94 + z^2,$$

или

$$(x + y)^2 + 2z(x + y) = 94 + z^2. \qquad (4)$$

А. При $x + y = 7$ уравнение (4) принимает вид $49 + 14z = 94 + z^2$, или $z^2 - 14z + 45 = 0$, откуда $z = 5$ или $z = 9$. С учетом уравнения (1) получаем две системы:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25, \\ z = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = 81, \\ z = 9, \end{cases}$$

из которых находим

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 3, \\ z_1 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 4, \\ z_2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{7 - \sqrt{113}}{2}, \\ y_3 = \dfrac{7 + \sqrt{113}}{2}, \\ z_3 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{7 + \sqrt{113}}{2}, \\ y_4 = \dfrac{7 - \sqrt{113}}{2}, \\ z_4 = 9. \end{cases}$$

Б. При $x + y = -7$ уравнение (4) принимает вид

$$z^2 + 14z + 45 = 0.$$

Находим $z = -5$ или $z = -9$ и, как в предыдущем случае, получаем две системы:

$$\begin{cases} x + y = -7, \\ x^2 + y^2 = 25, \\ z = -5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -7, \\ x^2 + y^2 = 81, \\ z = -9, \end{cases}$$

из которых находим

$$\begin{cases} x_5 = -4, \\ y_5 = -3, \\ z_5 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = -3, \\ y_6 = -4, \\ z_6 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = \dfrac{-7 - \sqrt{113}}{2}, \\ y_7 = \dfrac{-7 + \sqrt{113}}{2}, \\ z_7 = -9; \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = \dfrac{-7 + \sqrt{113}}{2}, \\ y_8 = \dfrac{-7 - \sqrt{113}}{2}, \\ z_8 = -9. \end{cases}$$

Ответ. $(-4; -3; -5)$, $(-3; -4; -5)$, $(4; 3; 5)$, $(3; 4; 5)$.

$$\left(\frac{7-\sqrt{113}}{2};\ \frac{7+\sqrt{113}}{2};\ 9\right),$$
$$\left(\frac{7+\sqrt{113}}{2};\ \frac{7-\sqrt{113}}{2};\ 9\right),$$
$$\left(\frac{-7-\sqrt{113}}{2};\ \frac{-7+\sqrt{113}}{2};\ -9\right),$$
$$\left(\frac{-7+\sqrt{113}}{2};\ \frac{-7-\sqrt{113}}{2};\ -9\right).$$

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-6xy+6y^2=-2, & (1)\\ x^2-6xz+11z^2=3, & (2)\\ y^2-4yz+3z^2=0. & (3)\end{cases}$$

Решение. Представим уравнение (3) в виде $(y-z)(y-3z)=0$, откуда следует $y-z=0$ или $y-3z=0$. Данная система равносильна двум системам:

а) $\begin{cases} x^2-6xy+6y^2=-2,\\ x^2-6xz+11z^2=3,\\ y-z=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-6xy+6y^2=-2,\\ x^2-6xz+11z^2=3,\\ y-3z=0. \end{cases}$

Решим систему «а». Подставляя в уравнения (1) и (2) $y=z$, получим

$$\begin{cases} x^2-6xz+6z^2=-2,\\ x^2-6xz+11z^2=3; \end{cases}$$

вычитая из второго уравнения первое, найдем $5z^2=5$, откуда следует $z_1=-1$, $z_2=1$. Тогда из первого уравнения получаем

$$x^2+6x+8=0 \quad \text{и} \quad x^2-6x+8=0;$$
$$x_1=-6,\quad x_2=-2,\quad x_3=2,\quad x_4=6$$

и соответственно

$$y_1=z_1=-1,\quad y_2=z_2=-1,\quad y_3=z_3=1,\quad y_4=z_4=1.$$

Решим систему «б». Подставляя в уравнения (1) и (2) $y=3z$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-18xz+54z^2=-2,\\ x^2-6xz+11z^2=3, \end{cases}$$

левые части которых однородны относительно $x$ и $z$. Сделаем замену $x=tz$; тогда система примет вид

$$\begin{cases} z^2(t^2-18t+54)=-2,\\ z^2(t^2-6t+11)=3. \end{cases}$$

Поскольку $z \neq 0$, получаем

$$\frac{t^2-18t+54}{t^2-6t+11}=-\frac{2}{3},$$

или

$$5t^2-66t+184=0,$$

откуда $t_1=4$, $t_2=\frac{46}{5}$. При $t=4$ $z^2=1$, или $z_5=-1$, $z_6=1$; тогда

$$\begin{cases} x_5=-4, \\ y_5=-3, \\ z_5=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6=4, \\ y_6=3, \\ z_6=1. \end{cases}$$

При $t=\frac{46}{5}$ $z^2=\frac{25}{337}$, $z_7=-\frac{5}{\sqrt{337}}$, $z_8=\frac{5}{\sqrt{337}}$; тогда

$$\begin{cases} x_7=-\frac{46}{\sqrt{337}}, & x_8=\frac{46}{\sqrt{337}}, \\ y_7=-\frac{15}{\sqrt{337}}, & y_8=\frac{15}{\sqrt{337}}, \\ z_7=-\frac{5}{\sqrt{337}}; & z_8=\frac{5}{\sqrt{337}}. \end{cases}$$

Ответ. $(-6; -1; -1)$, $(-2; -1; -1)$, $(2; 1; 1)$, $(6; 1; 1)$, $(-4; -3; -1)$, $(+4; 3; 1)$, $\left(-\frac{46}{\sqrt{337}}; -\frac{15}{\sqrt{337}}; -\frac{5}{\sqrt{337}}\right)$, $\left(\frac{46}{\sqrt{337}}; \frac{15}{\sqrt{337}}; \frac{5}{\sqrt{337}}\right)$.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{2}, \\ x+2y-z=12. \end{cases}$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное $t$, обозначив

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{2}=t;$$

тогда

$$x=5t+1, \quad y=3t+2, \quad z=2t+2.$$

Подставив эти значения $x$, $y$, $z$ в третье уравнение системы, получим $5t+1+2(3t+2)-(2t+2)=12$, или $9t=9$; $t=1$; тогда

$$\begin{cases} x=6, \\ y=5, \\ z=4. \end{cases}$$

Ответ. $(6; 5; 4)$.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\frac{y+z-x}{4}=\frac{x+z-y}{16}=\frac{x+y-z}{4}=xyz.$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное

$$\frac{y+z-x}{4}=\frac{x+z-y}{16}=\frac{x+y-z}{4}=xyz=t;$$

тогда

$$\begin{cases} y+z-x=4t, \\ x+z-y=16t, \\ x+y-z=4t, \\ xyz=t. \end{cases}$$

Решим систему

$$\begin{cases} y+z-x=4t, & (1) \\ x+z-y=16t, & (2) \\ x+y-z=4t & (3) \end{cases}$$

относительно $x$, $y$ и $z$. Складывая уравнения (1), (2) и (3), получим

$$x+y+z=24t. \qquad (4)$$

Последовательно вычитая из уравнения (4) уравнения (1), (2) и (3), найдем $x=10t$, $y=4t$, $z=10t$. Найденные значения $x$, $y$, $z$ подставим в уравнение $xyz=t$; получим $10t\cdot 4t\cdot 10t=t$, откуда $t_1=0$, $t_2=-\frac{1}{20}$, $t_3=\frac{1}{20}$. Тогда

$$x_1=0,\quad y_1=0,\quad z_1=0;\quad x_2=-\frac{1}{2},\quad y_2=-\frac{1}{5},\quad z_2=-\frac{1}{2};$$

$$x_3=\frac{1}{2},\quad y_3=\frac{1}{5},\quad z_3=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $(0;\ 0;\ 0),\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{5};\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{2}\right)$.

## § 7. Задачи на составление систем уравнений

Многие задачи, решение которых можно свести к решению уравнений с одним неизвестным, проще решать с помощью систем уравнений. Если две или несколько неизвестных величин задачи обозначить буквами, то значительно легче установить зависимости между данными и неизвестными величинами задачи и составить систему уравнений для определения искомых величин.

Задача 1. Латунь состоит из меди и цинка. Сколько содержится меди и цинка в 124 кг латуни, если 89 кг меди весят в воде на 10 кг меньше, 7 кг цинка — на 1 кг, а 124 кг латуни — на 15 кг меньше (предполагается, что удельный вес воды равен 1 кг/дм$^3$)?

Решение. Пусть в 124 кг латуни содержится $x$ килограммов меди и $y$ килограммов цинка. Из условия задачи следует, что плотность меди равна $\frac{89}{10} = 8{,}9$ кг/дм$^3$, плотность цинка 7 и плотность латуни $\frac{124}{15} = 8\frac{4}{15}$ кг/дм$^3$. Предполагая, что масса латуни равна сумме масс меди и цинка, из которых состоит латунь, а объем латуни равен сумме объемов меди и цинка, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 124, \\ \dfrac{x}{8{,}9} + \dfrac{y}{7} = \dfrac{124}{8\frac{4}{15}}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 124, \\ 7x + 8{,}9y = 8{,}9 \cdot 7 \cdot 15, \end{cases}$$

откуда следует $x = 89$, $y = 35$.

Ответ. В 124 кг латуни содержится 89 кг меди и 35 кг цинка.

Задача 2. Рабочий изготовил в назначенный срок некоторое число деталей. Если бы он ежедневно изготовлял их на 10 больше, то выполнил бы эту работу на 4,5 дня раньше срока, а если бы он изготовлял в день на 5 деталей меньше, то опоздание составляло бы 3 дня. Сколько деталей и в какой срок изготовил рабочий?

Решение. Пусть $x$ — количество деталей, изготовленных рабочим; $t$ — срок изготовления ($x > 0$, $t > 0$). Тогда $\frac{x}{t}$ — количество деталей, изготавливаемых рабочим за день.

Согласно условию задачи, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\frac{x}{t} + 10} = t - 4{,}5, \\ \dfrac{x}{\frac{x}{t} - 5} = t + 3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 10t^2 - 4{,}5x - 45t = 0, \\ -5t^2 + 3x - 15t = 0, \end{cases}$$

$$\text{где } \left(x > 0,\ t > 0,\ \frac{x}{t} > 5\right),$$

откуда следует $t_1 = 0$, $x_1 = 0$ (не подходят); $t_2 = 27$, $x_2 = 1350$.

Проверка показывает, что значения $t_2 = 27$ и $x_2 = 1350$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ. Рабочий изготовил 1350 деталей за 27 дней.

Задача 3. Два самолета (АН-2 и ТУ-104), вылетевших одновременно из двух аэродромов $A$ и $B$, расстояние между которыми равно 2200 км, встретились через 2 ч. ТУ-104 прибыл в пункт $B$ на 4 ч 35 мин раньше, чем АН-2 в пункт $A$. Найти скорости самолетов.

Решение. Пусть скорость самолета АН-2 — $x$ км/ч, а ТУ-104 — $y$ км/ч. Тогда время полета самолета АН-2 из $B$ в $A$ равно $\frac{2200}{x}$, а ТУ-104 из $A$ в $B$ — $\frac{2200}{y}$.

Так как самолеты встретились через 2 ч после вылета, то $2(x+y)=2200$. Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2(x+y)=2200, \\ \dfrac{2200}{x}-\dfrac{2200}{y}=4\dfrac{7}{12}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=1100, \\ 480(y-x)=xy \quad (x>0,\ y>0). \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $x=1100-y$. Подставив значение $x$ во второе уравнение, получим $480(2y-1100)=(1100-y)y$, или $y^2-140y-480\cdot 1100=0$, откуда находим $y=70\pm 730$.

Так как $y>0$, то $y=800$ (км/ч); тогда $x=1100-800=300$ (км/ч).

Ответ. Скорость самолета АН-2 составляет 300 км/ч, а — ТУ-104 — 800 км/ч.

Задача 4. Вкладчик получил через год на сбережения 60 р. процентных денег. Положив на сбережение еще 240 р., он оставил деньги еще на год. Через год его вклад вместе с процентными деньгами составил 2369 р. Определить, сколько денег было положено первоначально и какой годовой процент начисляет сберегательная касса, если известно, что он не превышает 5%.

Решение. Обозначим количество первоначально положенных в кассу денег через $x$, а годовой процент, который начисляет сберегательная касса, через $y$. Тогда, согласно условию задачи, получим систему уравнений

$$\begin{cases} xy=60, \\ x+60+240+(x+60+240)y=2369, \text{ или} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=60, \\ xy+x+300y=2069 \quad (x>0,\ 0<y<0{,}05), \end{cases}$$

откуда следует $x=2000$, $y=0{,}03$.

Ответ. 2000 р.; 3%.

Задача 5. С одного участка собрали $a$ центнеров пшеницы. Урожай на втором участке был выше, и то же количество зерна было собрано с площади на $b$ гектаров меньшей, чем площадь первого участка. Сколько центнеров зерна собрали с 1 га каждого участка, если на втором участке урожай с 1 га был на $c$ центнеров больше, чем на первом участке.

Решение. Обозначим количество зерна, собранного с 1 га первого участка, через $x$, а со второго — через $y$. Тогда площадь первого участка равна $\dfrac{a}{x}$, а второго $\dfrac{a}{x}-b$. Следовательно, получаем систему

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a}{x}-b\right)y=a, \\ y-x=c, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a-bx)\,y=ax, \\ y-x=c \quad (x>0,\ y>0). \end{cases}$$

Из второго уравнения значение $x=y-c$ подставим в первое; получим $(a-by+bc)\,y=ay-ac$, или $by^2-bcy-ac=0$, откуда следует

$$y=\frac{bc\pm\sqrt{b^2c^2+4abc}}{2b}.$$

Поскольку $y > 0$, то $y = \frac{bc + \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2b}$ и $x = \frac{-bc + \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2b}$.

Ответ. Урожай пшеницы с 1 га первого участка составляет $\frac{-bc + \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2b}$ (ц); урожай пшеницы с 1 га второго участка составляет $\frac{bc + \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2b}$ (ц).

Примечание. Эту задачу легко решить, пользуясь уравнением с одним неизвестным, что и предлагается читателю.

### Упражнения

Решить системы уравнений (в множестве действительных чисел):

161. $\begin{cases} |x+1| + |y-1| = 5, \\ |x+1| - 4y + 4 = 0. \end{cases}$

162. $\begin{cases} |x| + 3y = 7, \\ 2x + 2|y-1| = 3. \end{cases}$

163. $\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2, \\ \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$

164. $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x + xy + y = 0. \end{cases}$

165. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 186 - 2xy(x+y), \\ x + y = 6. \end{cases}$

166. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 10y + 6 = 0, \\ 3x^2 + 3y^2 + 4x - 6y - 4 = 0. \end{cases}$

167. $\begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0, \\ xy - y^2 - 2x + 4 = 0. \end{cases}$

168. $\begin{cases} (x+y)^2 - 4(x+y) = 45, \\ (x-y)^2 - 2(x-y) = 3. \end{cases}$

169. $\begin{cases} 2x^2 + 7xy + 3y^2 - 11x - 18y + 15 = 0, \\ x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x - 2 = 0. \end{cases}$

170. $\begin{cases} x^3 = 13x - 6y, \\ y^3 = 13y - 6x. \end{cases}$

171. $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9, \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5. \end{cases}$

172. $\begin{cases} (x-y)(x^2 - y^2) = 16, \\ (x+y)(x^2 + y^2) = 40. \end{cases}$

173. $\begin{cases} (x^2 + y^2)x = 6y, \\ (x^2 - y^2)y = x. \end{cases}$

174. $\begin{cases} (x+y)(x+2y)(x+3y) = 60, \\ (x+y)(2x+y)(3x+y) = 105. \end{cases}$

175. $\begin{cases} x+y+xy+1=0, \\ x^2+y^2-x-y=2. \end{cases}$

176. $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8, \\ x^3+y^3+x^2y+xy^2=15. \end{cases}$

177. $\begin{cases} (x^2+y^2)\,xy=78, \\ x^4+y^4=97. \end{cases}$

178. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

179. $\begin{cases} 2x+3y-5z=4, \\ 3x-4y+2z=21, \\ 7x+8y-6z=1. \end{cases}$

180. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz-yz=7, \\ x^2+y^2+z^2=14. \end{cases}$

181. $\begin{cases} x+y+z=8, \\ xy+xz+yz=17, \\ xyz=10. \end{cases}$

182. $\begin{cases} x+y=3z, \\ x^2+y^2=5z, \\ x^3+y^3=9z. \end{cases}$

183. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{12}{5}, \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{18}{5}, \\ \dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{36}{13}. \end{cases}$

184. $\begin{cases} x^2+xy+xz=70, \\ xy+y^2+yz=28, \\ xz+yz+z^2=98. \end{cases}$

185. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}, \\ xy-x-y=0. \end{cases}$

186. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}}+2\sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}}=3, \\ x+xy+y=7. \end{cases}$

187. $\begin{cases} x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{20}{x+y}, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$

188. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=4. \end{cases}$

189. $\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 189, \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 180. \end{cases}$

190. $\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 70, \\ x\sqrt{xy} + y^2 = 105. \end{cases}$

191. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} (m-1)\,x + 2my = -2, \\ 2mx + (m-1)\,y = m - 1. \end{cases}$$

192. Из $A$ в $B$ и из $B$ в $A$ одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу, когда первый закончит переход?

193. Двое рабочих вместе могут выполнить некоторую работу за 10 дней. После 7 дней совместной работы один из них отказался от нее, и другому пришлось проработать еще 9 дней. Во сколько дней каждый рабочий отдельно может выполнить всю работу?

194. Руда из одного рудника содержит 72% железа, руда из второго — 58%. Смешали некоторое количество первой руды с некоторым количеством второй; получили руду, содержащую 62% железа. Если бы для смеси взяли каждой руды на 15 кг больше, чем в первом случае, то получили бы руду, содержащую 63,25% железа. Сколько было взято руды каждого сорта для составления смеси?

195. Куплено материи двух сортов на сумму 15 р. 20 коп. Если бы цена материи первого сорта была выше, а второго ниже на одно и то же число процентов, то первый сорт стоил бы 15 р., а второй 2 р. 40 коп. Сколько стоила материя первого сорта в действительности?

196. В шахматном турнире двое из участников выбыли, сыграв только по три партии каждый. Поэтому было сыграно всего 84 партии. Сколько участников было первоначально и играли ли выбывшие между собой?

197. Несколько человек взялись вырыть канаву и могли бы окончить работу за 24 часа, если бы делали ее одновременно. Вместо этого они приступили к работе один за другим через равные промежутки времени и затем каждый работал до окончания всей работы. Сколько времени они рыли канаву, если первый приступивший к работе проработал в 5 раз больше, чем последний?

198. Одно число составляет 92% другого. Если бы второе число было на 700 единиц больше, то оно было бы больше первого на 9%. Найти первое число.

199. Число лет отца на 5 больше суммы лет всех трех его сыновей. Через 10 лет отец будет вдвое старше старшего сына; через 20 лет он будет вдвое старше второго сына, а через 30 лет вдвое старше младшего сына. Сколько лет отцу и каждому из его сыновей?

200. Имеется три сплава серебра и меди весом 5, 3 и 2 кг. Вычислить пробу каждого слитка, зная, что, будучи сплавлены попарно, они дают: первый и второй — сплав 750-й пробы, первый и третий — сплав 780-й пробы, а второй и третий — сплав 852-й пробы.

# Глава 6

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

## § 1. Тождественные неравенства

*Два выражения (числа), соединенные между собой одним из знаков* $>$ *(больше),* $\geqslant$ *(больше или равно; не меньше),* $<$ *(меньше),* $\leqslant$ *(меньше или равно; не больше),* $\neq$ *(не равно) образуют неравенство.*

Неравенство называется алгебраическим, если обе его части есть алгебраические выражения.

Неравенство называется трансцендентным, если хотя бы одна из его частей есть трансцендентное выражение. Трансцендентные неравенства будут рассмотрены дальше.

Например: $5>2$, $6>10$, $8\neq 7$, $a^2+b^2>ab$, $x+y\leqslant 5$, $a\geqslant b+c$, $\frac{\sqrt{a}}{a+b}<\frac{b}{a}$; $\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}<\sqrt{7}$, $x+y\neq\sqrt{x}$.

Неравенства бывают верными и неверными. Так, в приведенных примерах первое неравенство верное, а второе — неверное.

Пары неравенств $A>B$ и $C>D$, $A\geqslant B$ и $C\geqslant D$, $A<B$ и $C<D$, $A\leqslant B$ и $C\leqslant D$ называются неравенствами одинакового смысла. Неравенств одинакового смысла может быть любое количество.

Пары неравенств $A>B$ и $C<D$, $A\geqslant B$ и $C\leqslant D$, $A<B$ и $C>D$, $A\leqslant B$ и $C\geqslant D$ называются неравенствами противоположного смысла.

Например, $8>4$ и $9>6$ — неравенства одинакового смысла, $x+1\geqslant y$ и $x-y\leqslant 2$ — неравенства противоположного смысла.

Неравенства со знаками $>$ и $<$ называются строгими, а со знаками $\geqslant$ и $\leqslant$ — нестрогими.

*Областью допустимых значений букв, входящих в данное неравенство, рассматриваемое в заданном множестве чисел,* называется множество тех их значений, при которых обе части неравенства имеют числовой смысл.

Пример. Найти область допустимых значений букв неравенства

$$\frac{2}{a-2}+\frac{b}{a+b}>\frac{1}{a}+2a-b.$$

Решение. Левая часть неравенства имеет смысл, если $\begin{cases} a-2\neq 0, \\ a+b\neq 0, \end{cases}$ т. е. $a\neq 2$ и $a\neq -b$. Правая часть неравенства имеет смысл, если $a\neq 0$.

Ответ. Область допустимых значений букв в данном неравенстве:

$$\begin{cases} a\neq 0, \\ a\neq 2, \\ a\neq -b. \end{cases}$$

Неравенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него букв, называется *тождественным.*

Например: $10 > 1$, $a^2 + 1 > 0$, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

Тождественные неравенства называются еще безусловными.

*Действительное число a называется большим действительного числа b, если разность $a - b$ положительна; число a называется меньшим числа b, если разность $a - b$ отрицательна.*

Из этого следует, что положительное число больше нуля, а отрицательное — меньше нуля. Действительно, если $a$ — положительное число, то разность $a - 0 = a$ положительна и по определению $a > 0$, а если $a$ — отрицательное число, то разность $a - 0 = a$ отрицательна и $a < 0$.

Основные свойства неравенств выражаются следующими теоремами.

**Теорема 1.** *Если $a > b$, то $b < a$ (свойство необратимости).*

**Теорема 2.** *Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности).*

Доказательство. По условию $a - b$ — число положительное и $b - c$ — число положительное; их сумма $(a - b) + (b - c) = a - c$ также число положительное. Следовательно, $a > c$ (по определению).

**Теорема 3.** *Если $a > b$, то $a + m > b + m$.*

Следствие. Члены тождественного неравенства можно переносить из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.

**Теорема 4.** *Если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$.*

Следствие. *Если $a > b$ и $m > 0$, то* $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

**Теорема 5.** *Если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.*

Следствие. *Если $a > b$ и $m < 0$, то* $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.

**Теорема 6.** *Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$,* т. е. при почленном сложении неравенств одинакового смысла получается неравенство того же смысла.

**Теорема 7.** *Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$,* т. е. при почленном вычитании неравенств противоположного смысла получаем неравенство одинакового смысла с неравенством, из которого вычитаем.

**Теорема 8.** *Если $a > b$ и $c > d$, причем $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то $ac > bd$,* т. е. при почленном умножении двух неравенств одинакового смысла с положительными частями получается неравенство того же смысла.

Доказательство. Умножив, по теореме 4, обе части неравенства $a > b$ на $c > 0$, получим

$$ac > bc;$$

умножив обе части неравенства $c > d$ на $b > 0$, получим

$$bc > bd.$$

По свойству транзитивности

$$ac > bd.$$

**Теорема 9.** *Если $a > b$ и $c < d$, причем $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то* $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, т. е. при почленном делении неравенств противо-

положного смысла с положительными частями получается неравенство одинакового смысла с неравенством, которое делим.

**Теорема 10.** *Если* $a > b$, *причем* $a > 0$, $b > 0$ *и* $n$ — *натуральное число, то* $a^n > b^n$, т. е. неравенство с положительными частями не нарушится, если обе его части возвести в одну и ту же натуральную степень.

**Теорема 11.** *Если* $a > b$, *причем* $a > 0$, $b > 0$ *и* $n$ — *натуральное число, то* $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, т. е. неравенство с положительными частями не нарушится, если из обеих его частей извлечь корень одной и той же натуральной степени.

Эту теорему легко доказать методом от противного, использовав теорему 10.

**Доказательство тождественности неравенства** производится различными способами. К основным из них относятся:

1. Способ, основанный на определении неравенства между двумя числами. Если требуется доказать тождественность неравенства $A > B$, то достаточно показать, что разность $A - B$ положительна при всех допустимых значениях букв, входящих в это неравенство.

2. Способ аналитический. При доказательстве этим способом неравенство, которое требуется доказать, на основании теорем 1—11 этого параграфа преобразуют в неравенство, справедливость которого очевидна, а затем, исходя из очевидного неравенства, доказывают данное.

3. Способ синтетический. Если известно, исходя из какого очевидного неравенства доказывают данное, то такой способ доказательства называется синтетическим.

4. При доказательстве неравенства, обе части которого зависят от натурального аргумента $n$, можно пользоваться методом математической индукции. При доказательстве этим методом нужно доказать два предложения: а) неравенство верно при $n = 1$ (или при $n = k_0$, где $k_0$ — наименьшее из допустимых значений $n$ в данном неравенстве) и б) из допущения справедливости неравенства при $n = k$ ($k > 1$ или $k > k_0$) следует справедливость этого неравенства при $n = k + 1$.

5. Способ, основанный на использовании при доказательстве данного неравенства неравенств, справедливость которых уже доказана. Его можно отнести к синтетическому способу.

Рассмотрим различные способы доказательства некоторых важных алгебраических неравенств.

1. Доказать, что при $a > 0$ и $b > 0$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \tag{6.1}$$

А. Первый способ. Найдем разность

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0.$$

Если $a \neq b$, то $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0$ и $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > 0$, следовательно,

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Если $a = b$, то $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$ и $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 0$, следовательно,

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}.$$

Таким образом, при всех $a > 0$ и $b > 0$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Б. Второй способ (аналитический). Преобразуем неравенство (6.1) (допустив, что оно верно), пользуясь основными свойствами неравенств.

Умножив обе части неравенства (6.1) на 2 (теорема 4, § 1, гл. 6), получим

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

Перенеся все члены неравенства в левую часть (следствие из теоремы 3 § 1, гл. 6), получим

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0,$$

или

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0 \text{ — очевидное неравенство.}$$

Таким образом, анализ данного неравенства показывает, что его можно доказать, исходя из очевидного неравенства

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Доказательство. Неравенство $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$ верно при всех действительных $a > 0$ и $b > 0$. Из него получаем

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0,$$

откуда

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab},$$

или $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, что и требовалось доказать.

В. Третий способ (синтетический). Неравенство $(a - b)^2 \geqslant 0$ верно при всех действительных значениях $a$ и $b$, в том числе и при $a > 0$, $b > 0$. Перепишем это неравенство в виде

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0.$$

Прибавив к обеим частям $4ab$ (по теореме 3, § 1), получим

$$a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab,$$

или

$$(a + b)^2 \geqslant 4ab.$$

Извлечем из обеих частей последнего неравенства квадратный (арифметический) корень; получим

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab},$$

откуда после деления обеих частей неравенства на 2 получим

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Таким образом, для положительных $a$ и $b$ имеет место тождественное неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \text{ или } a+b \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

Поскольку равенство достигается при $a=b$, то из (6.1) можно сделать следующие выводы:

если сумма двух положительных чисел постоянна, то их произведение наибольшее, когда эти числа равны между собой;

если произведение двух чисел постоянно, то их сумма наименьшая, если эти числа равны между собой.

2. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $d>0$, то

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}. \tag{6.2}$$

Доказательство. На основании неравенства (6.1)

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4},$$

или

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}.$$

В свою очередь,

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}},$$

или

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt[4]{abcd},$$

поэтому по свойству транзитивности

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$

3. Доказать, что если $a>0$, $b>0$ и $c>0$, то

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}. \tag{6.3}$$

Доказательство. В (6.2) положим $d=\frac{a+b+c}{3}$; получим

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{abc\,\frac{a+b+c}{3}},$$

или

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[4]{abc\,\frac{a+b+c}{3}}.$$

Возведем обе части последнего неравенства в четвертую степень

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geqslant abc\,\frac{a+b+c}{3}.$$

Умножив обе части этого неравенства на $\frac{3}{a+b+c}$, получим

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant abc.$$

И, наконец, извлекая кубический корень из обеих частей полученного неравенства, найдем

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Следует отметить, что (6.3) можно доказать, воспользовавшись тождеством

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\,[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2],$$

правая часть которого при $x>0$, $y>0$, $z>0$ не отрицательна; тогда $x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz$, или

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz.$$

Положив $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$ и $z=\sqrt[3]{c}$, получим

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

В математике часто встречаются следующие средние величины: среднее арифметическое $n$ чисел

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n};$$

среднее геометрическое $n$ чисел

$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n};$$

среднее гармоническое $n$ чисел

$$H_n=\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}};$$

среднее степенное $n$ чисел

$$S_m=\left(\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}}.$$

Если $m = 1$, то среднее степенное равно среднему арифметическому этих чисел.

Если $m = 2$, то среднее степенное называется средним квадратическим

$$S_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для средних величин имеют место следующие неравенства.

4. Неравенство Коши: среднее арифметическое $n$ положительных чисел не меньше их среднего геометрического, т. е.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{6.4}$$

Равенство достигается только при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, поэтому можно сделать следующие выводы:

если сумма положительных чисел постоянна, то их произведение наибольшее, когда числа равны между собой;

если произведение положительных чисел постоянно, то их сумма наименьшая, когда числа равны между собой.

5. Среднее арифметическое $n$ положительных чисел не больше их среднего квадратического, т. е.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}. \tag{6.5}$$

6. Среднее гармоническое $n$ положительных чисел не больше их среднего геометрического, т. е.

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{6.6}$$

Неравенство (6.6) следует из (6.4)

7. Неравенство Коши-Буняковского. Для любых действительных чисел имеет место неравенство

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2). \tag{6.7}$$

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — любые действительные числа. Введем действительную переменную $t$ и составим неравенства

$$(a_1 t - b_1)^2 \geqslant 0,$$
$$(a_2 t - b_2)^2 \geqslant 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_n t - b_n)^2 \geqslant 0,$$

которые справедливы при всех действительных значениях $t$.

Раскрыв скобки и почленно сложив эти неравенства, получим

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\, t^2 - 2\,(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots$$
$$\cdots + a_nb_n)\, t + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant 0.$$

Левая часть последнего неравенства представляет собой квадратный трехчлен относительно переменной $t$, который неотрицателен при всех действительных значениях $t$.

Поэтому дискриминант этого трехчлена неположителен, т. е.

$$4\,(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 -$$
$$- 4\,(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \leqslant 0.$$

Отсюда получаем

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

причем равенство будет, если $b_1 \equiv ka_1$, $b_2 \equiv ka_2$, $\ldots$, $b_n \equiv ka_n$, где $k$ — некоторое действительное число.

8. Неравенство Бернулли: при любом $a > 0$ и при любом рациональном $r > 1$ имеет место неравенство

$$(1 + a)^r > 1 + ra. \tag{6.8}$$

Доказательство. Пусть $r = \frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ — натуральные числа, причем $m > n$. По (6.4),

$$\frac{\overbrace{(1+ra) + (1+ra) + \cdots + (1+ra)}^{n \text{ раз}} + \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{(m-n) \text{ раз}}}{m} >$$
$$> \sqrt[m]{(1+ra)^n \cdot 1^{m-n}},$$

или

$$\frac{(1+ra)\,n + m - n}{m} > \sqrt[m]{(1+ra)^n}$$

(так как $1 + ra \neq 1$, то знака равенства быть не может); из предыдущего следует, что

$$\frac{m + nra}{m} > \sqrt[m]{(1+ra)^n},$$

или

$$1 + \frac{n}{m}\,ra > \sqrt[m]{(1+ra)^n}.$$

Так как $\frac{n}{m} = \frac{1}{r}$, то $1 + a > \sqrt[m]{(1+ra)^n}$.

Возведем обе части последнего неравенства в $m$-ю степень

$$(1 + a)^m > (1 + ra)^n.$$

После извлечения корня $n$-й степени получим

$$\sqrt[n]{(1+a)^m} > 1 + ra,$$

или

$$(1+a)^{\frac{m}{n}} > 1 + ra.$$

Заменяя в последнем неравенстве $\frac{m}{n} = r$, окончательно получим

$$(1+a)^r > 1 + ra.$$

9. Сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше 2, т. е.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 \quad (a > 0,\ b > 0). \tag{6.9}$$

Доказательство. Найдем разность

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{(a-b)^2}{ab} \geqslant 0,$$

следовательно, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ (равенство достигается при $a = b$).

10. Для любых действительных чисел имеет место неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc. \tag{6.10}$$

Доказательство. Найдем разность

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] \geqslant 0,$$

откуда (по определению) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$.

Неравенства (6.1) — (6.10) следует запомнить, так как они часто используются при доказательстве других неравенств.

### Примеры на доказательство неравенств

Пример 1. Доказать

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 3 \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0).$$

Доказательство. Применяя (6.3) к левой части данного неравенства, получим

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}},$$

откуда

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, то $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \geqslant 16abcd$.

Доказательство. Применяя (6.1), получим

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab},$$
$$b+c \geqslant 2\sqrt{bc},$$
$$c+d \geqslant 2\sqrt{cd},$$
$$d+a \geqslant 2\sqrt{ad}.$$

Перемножив почленно последние неравенства, найдем

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \geqslant 16abcd.$$

Пример 3. Доказать

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$$

Доказательство. Применяя (6.3), получим неравенства

$$a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc},$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}},$$

перемножив которые, найдем

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

Пример 4. Доказать, что при положительных $a$, $b$ и $c$

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geqslant 6abc.$$

Доказательство. Разделив левую часть этого неравенства на $abc$, получим

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b},$$

или

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

По (6.9),

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 2,$$
$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 2,$$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2;$$

отсюда $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b} \geqslant 6$, или

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geqslant 6abc.$$

Пример 5. Доказать, что для положительных $a$, $b$ и $c$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}. \tag{I}$$

Доказательство. Обозначим

$$b+c=x, \tag{1}$$
$$a+c=y, \tag{2}$$
$$a+b=z; \tag{3}$$

тогда

$$a+b+c=\frac{x+y+z}{2}. \tag{4}$$

Вычитая последовательно из (4) равенства (1), (2) и (3), получим

$$a=\frac{-x+y+z}{2},\quad b=\frac{x-y+z}{2},\quad c=\frac{x+y-z}{2}$$

Относительно $x$, $y$ и $z$ неравенство (I) принимает вид

$$\frac{-x+y+z}{2x}+\frac{x-y+z}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geqslant\frac{3}{2},$$

или

$$-1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\geqslant 3,$$

т. е.

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\geqslant 6. \tag{II}$$

Поскольку каждое выражение в круглых скобках не меньше 2, то неравенство (II) справедливо, а следовательно, справедливо неравенство (I).

Пример 6. Доказать, что если $a$, $b$ и $c$ — стороны треугольника, то

$$abc\geqslant(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c). \tag{I}$$

Доказательство. Заменим

$$-a+b+c=x, \tag{1}$$
$$a-b+c=y, \tag{2}$$
$$a+b-c=z; \tag{3}$$

сложив (1), (2) и (3), получим

$$a+b+c=x+y+z. \tag{4}$$

Вычитая последовательно из (4) равенства (1), (2) и (3), найдем

$$a=\frac{y+z}{2},$$

$$b=\frac{x+z}{2},$$

$$c=\frac{x+y}{2}.$$

Относительно $x$, $y$ и $z$ неравенство (I) принимает вид

$$\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{8} \geqslant xyz; \qquad \text{(II)}$$

поскольку

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}, \quad \frac{x+z}{2} \geqslant \sqrt{xz}, \quad \frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz},$$

то неравенство (II) верно; следовательно, неравенство (I) тоже верно.

Рассмотрим другое доказательство неравенства (I). Очевидны неравенства

$$a^2 \geqslant a^2 - (b-c)^2,$$
$$b^2 \geqslant b^2 - (a-c)^2,$$
$$c^2 \geqslant c^2 - (a-b)^2.$$

После перемножения, извлечения квадратного корня и упрощений получим

$$abc \geqslant (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Пример 7. Доказать, что куб гипотенузы прямоугольного треугольника больше суммы кубов катетов.

Доказательство. Обозначим через $c$ гипотенузу, а через $a$ и $b$ катеты. Тогда по свойству наклонной и перпендикуляра

$$c > a,$$
$$c > b;$$

умножив эти неравенства соответственно на $a^2$ и $b^2$ и сложив почленно, получим

$$c(a^2+b^2) > a^3+b^3.$$

Поскольку по теореме Пифагора $a^2+b^2=c^2$, то $c^3 > a^3+b^3$.

Пример 8. Доказать, что для сторон треугольника имеет место неравенство

$$a^2+b^2+c^2 < 2(ab+ac+bc).$$

По свойству сторон треугольника,

$$\begin{cases} a > |b-c|, \\ b > |a-c|, \\ c > |a-b|; \end{cases}$$

возводя почленно эти неравенства в квадрат, складывая и упрощая, получим

$$a^2+b^2+c^2 < 2(ab+ac+bc).$$

Пример 9. Доказать, что если $a+b+c=k$, то $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}k^2$.

Доказательство. Обе части равенства

$$a+b+c=k$$

возведем в квадрат, получим

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=k^2,$$

поскольку по (6.10) $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$, то

$$a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2) \geqslant k^2;$$

следовательно,

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}k^2.$$

Пример 10. Доказать, что $(a+b)^n < 2^n(a^n+b^n)$ при $a>0$, $b>0$.

Доказательство. Складывая два очевидных неравенства

$$a < \sqrt[n]{a^n+b^n},$$

$$b < \sqrt[n]{a^n+b^n},$$

получим

$$a+b < 2\sqrt[n]{a^n+b^n}$$

По теореме 10 этого параграфа возведем обе части последнего неравенства в $n$-ю степень; получим

$$(a+b)^n < 2^n(a^n+b^n).$$

Пример 11. Доказать, что если $a+b+c=1$ и $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leqslant 5$.

Доказательство. По (6.8) имеем

$$\sqrt{4a+1} \leqslant 2a+1,$$

$$\sqrt{4b+1} \leqslant 2b+1,$$

$$\sqrt{4c+1} \leqslant 2c+1$$

(при $a \equiv b \equiv c \equiv 0$ получаются равенства). Сложив эти неравенства, получим

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leqslant 2(a+b+c)+3,$$

или

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leqslant 5.$$

В действительности получим строгое неравенство $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$, так как все три равенства $\sqrt{4a+1}=2a+1$, $\sqrt{4b+1}=2b+1$ и $\sqrt{4c+1}=2c+1$ одновременно выполняться не могут при условии $a+b+c=1$.

Пример 12. Доказать, что при $a+b+c=k$ и $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1} \leqslant \sqrt{6k+9}.$$

Доказательство. Обозначим $\sqrt{2a+1}=x$, $\sqrt{2b+1}=y$ и $\sqrt{2c+1}=z$. После возведения этих равенств в квадрат и сложения результатов получим

$$x^2+y^2+z^2=2(a+b+c)+3=2k+3.$$

Поскольку

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) \leqslant 3(x^2+y^2+z^2),$$

то

$$(x+y+z)^2 \leqslant 3(2k+3),$$

откуда

$$x+y+z \leqslant \sqrt{6k+9},$$

или

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1} \leqslant \sqrt{6k+9}.$$

Пример 13. Доказать, что при натуральном $n \geqslant 2$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}.$$

Доказательство. При натуральных значениях $n \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2};\quad \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3};\quad \ldots;\quad \frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n},$$

или

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\,n}.$$

Вычислим сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}.$$

Пример 14. Доказать, что при натуральном $n$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}. \qquad (1)$$

Доказательство. Докажем это неравенство методом математической индукции (о методе математической индукции см. § 2, гл. 8).

При $n = 1$ неравенство (1) принимает вид $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$, т. е. является верным.

Допустим, что неравенство верно при $n = k$, т. е.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}.$$

Докажем, что при этом допущении оно будет верным и для $n = k + 1$, т. е.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}. \qquad (2)$$

Заменим в последнем неравенстве $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k}$ на $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$, не уменьшив при этом левую часть неравенства; если мы докажем неравенство $\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$, то по транзитивному свойству неравенство (2) будет верным. Итак, требуется доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}.$$

Так как обе части этого неравенства положительны, то оно равносильно неравенству

$$\frac{2\sqrt{3k+1} \cdot (k+1)}{2k+1} \geqslant \sqrt{3k+4},$$

или, после возведения обеих частей в квадрат,

$$\frac{4(k+1)^2(3k+1)}{(2k+1)^2} \geqslant 3k+4.$$

Найдем разность

$$\frac{4(k+1)^2(3k+1)}{(2k+1)^2} - (3k+4) = \frac{k}{(2k+1)^2} \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\frac{2(k+1)\sqrt{3k+1}}{2k+1} \geqslant \sqrt{3k+4}$$

(равенство достигается при $k = 0$). По транзитивному свойству неравенство (2) верно. Согласно методу математической индукции, неравенство (1) тоже верно.

Пример 15. Доказать, что для всяких действительных $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и натурального $n$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leqslant \frac{a^n + b^n}{2}. \qquad (1)$$

Доказательство. Докажем это неравенство методом математической индукции.

При $n = 1$ неравенство (1) $\frac{a+b}{2} \leqslant \frac{a+b}{2}$ верно. Допустим, что оно верно при $n = k$, т. е.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leqslant \frac{a^k + b^k}{2}.$$

Докажем, что оно будет верным при $n = k + 1$, т. е.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leqslant \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}. \tag{2}$$

Представим неравенство (2) в виде

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \cdot \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}.$$

Поскольку по допущению $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leqslant \frac{a^k + b^k}{2}$, достаточно доказать неравенство

$$\frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2},$$

или

$$(a^k + b^k)(a + b) \leqslant 2a^{k+1} + 2b^{k+1}.$$

Для доказательства последнего неравенства найдем разность

$$(2a^{k+1} + 2b^{k+1}) - (a^k + b^k)(a + b) = a^{k+1} - a^k b + b^{k+1} - b^k a =$$
$$= a^k(a - b) - b^k(a - b) = (a - b)(a^k - b^k) \geqslant 0,$$

так как при $a > b$ оба множителя положительны, при $a < b$ оба множителя отрицательны, при $a = b$ они равны нулю. Отсюда следует доказательство утверждения, что если неравенство (1) верно при $n = k$, то оно верно и при $n = k + 1$. Так как неравенство (1) верно при $n = 1$, то оно верно при любом натуральном $n$.

## § 2. Неравенства с одним неизвестным

Неравенства вида

$$f_1(x) > f_2(x),\ f_1(x) \geqslant f_2(x),$$
$$f_1(x) < f_2(x),\ f_1(x) \leqslant f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — заданные функции переменной $x$ (одна из них может быть постоянной), называются неравенствами с одним неизвестным.

Переменная величина $x$ называется неизвестной неравенства. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — алгебраические выражения, то неравенство называется алгебраическим.

Например, $3x^2 > 5$, $x^3 - 3x < 6$, $\sqrt{x-1} > x$.

*Решением неравенства с одним неизвестным* называется такое значение неизвестного, при котором данное неравенство обращается в тождественное.

Например, неравенство $x^2 + 3x < 8$ при $x = 1$ обращается в верное неравенство $4 < 8$, а при $x = 3$ обращается в неверное неравенство $15 < 8$; значит $x = 1$ является, а $x = 3$ не является решением данного неравенства.

*Решить неравенство с одним неизвестным* — значит найти множество (совокупность) всех его решений или показать, что оно не имеет решений.

*Областью допустимых значений неизвестного данного неравенства* (ОДЗН) *или областью определения неравенства* называют множество всех значений неизвестного, при которых существуют обе части неравенства.

Пример. Найти ОДЗН неравенства $x^2 + \sqrt{5 - x} < \frac{x}{x - 1}$.

Левая часть неравенства существует при $5 - x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant 5$. Правая часть неравенства существует при $x \neq 1$. Следовательно, ОДЗН есть множество значений $x$, удовлетворяющих неравенствам $x < 1$ и $1 < x \leqslant 5$.

Ответ. $x < 1$, $1 < x \leqslant 5$.

### Равносильные неравенства и основные теоремы о равносильности неравенств

Так как рассматриваемые ниже понятия и свойства неравенств одинаковые для неравенств

$$f_1(x) > f_2(x),\ f_1(x) \geqslant f_2(x),\ f_1(x) < f_2(x),\ f_1(x) \leqslant f_2(x),$$

то будем рассматривать только неравенства вида

$$f_1(x) > f_2(x).$$

Пусть даны два неравенства с одним неизвестным

$$f_1(x) > f_2(x) \tag{1}$$

и

$$\varphi_1(x) > \varphi_2(x). \tag{2}$$

Неравенство (2) называется следствием неравенства (1), если все решения неравенства (1) есть решениями неравенства (2) или неравенство (1) не имеет решений.

Записывается сокращенно так: $(1) \Rightarrow (2)$.

Два неравенства (с одним неизвестным) называются *равносильными* (эквивалентными), если каждое из них есть следствие другого.

Записывается сокращенно так:

$$(1) \Leftrightarrow (2).$$

**Теорема 1.** *Если над частями неравенства с одним неизвестным произвести тождественные преобразования, не меняющие области определения неравенства, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному*, т. е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ с областью определения $D$, и в результате тождественных преобразований получилось неравенство $f_3(x) > f_4(x)$ с той же областью определения $D$, то они равносильны.

**Теорема 2.** *Если к каждой части данного неравенства прибавить одно и то же число или выражение, имеющее числовой смысл при всех значениях неизвестного из области определения неравенства, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному*, т. е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ с областью определения $D$ и $m(x)$ — число или выражение, имеющее числовой смысл при всех значениях $x$ из $D$, то неравенство $f_1(x) + m(x) > f_2(x) + m(x)$ равносильно данному.

Следствие. Члены неравенства можно переносить с противоположным знаком из одной части неравенства в другую.

**Теорема 3.** *Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число или выражение, принимающее положительные значения при всех значениях неизвестного из области допустимых, то полученное неравенство того же смысла будет равносильным данному.*

Доказательство. Пусть дано неравенство

$$f_1(x) > f_2(x) \tag{1}$$

и число или выражение $m(x) > 0$ при всех допустимых значениях $x$ неравенства (1). Покажем, что неравенство

$$f_1(x)\ m(x) > f_2(x) \cdot m(x) \tag{2}$$

равносильно неравенству (1).

Пусть $x = a$ — любое решение неравенства (1). Тогда $f_1(a) > f_2(a)$ — верное числовое неравенство и $m(a)$ — положительное число. По теореме 4, § 1, верным является неравенство

$$f_1(a)\ m(a) > f_2(a)\ m(a),$$

а это значит, что $x = a$ — решение неравенства (2);

пусть $x = \beta$ — любое решение неравенства (2). Тогда $f_1(\beta)\ m(\beta) > f_2(\beta) \cdot m(\beta)$ — тождественное неравенство. Поскольку $m(\beta) > 0$, то, разделив обе части последнего неравенства на $m(\beta)$, по следствию из теоремы 4, § 1, получим верное неравенство

$$f_1(\beta) > f_2(\beta),$$

а это значит, что $x = \beta$ — решение неравенства (1). Таким образом, любое решение неравенства (1) является решением неравенства (2) и наоборот. Если одно из неравенств (1) или (2) не имеет решений, то и другое тоже не имеет решений, так как противное предположение противоречит доказанному выше.

**Теорема 4.** *Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число или выражение, принимающее отрицательные значения при всех значениях неизвестного из области допустимых, то получим равносильное данному неравенство противоположного смысла*, т. е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ и число или выражение $m(x) < 0$ при всех $x$ из ОДЗН неравенства, то неравенство $f_1(x)\ m(x) < f_2(x) \cdot m(x)$ равносильно данному.

**Теорема 5.** а) *Неравенство* $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0$ *равносильно неравенству* $f_1(x) \cdot f_2(x) > 0$ *при* $f_2(x) \neq 0$;

б) *Неравенство* $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} < 0$ *равносильно неравенству* $f_1(x) \cdot f_2(x) < 0$ *при* $f_2(x) \neq 0$.

Доказательство. а) Умножив числитель и знаменатель левой части первого неравенства на знаменатель $f_2(x) \neq 0$, по теореме 1, получим

$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{[f_2(x)]^2} > 0.$$

Поскольку $[f_2(x)]^2 > 0$, то, по теореме 3, после умножения обеих частей последнего неравенства на $[f_2(x)]^2$ получим неравенство $f_1(x)\ f_2(x) > 0$, равносильное первому. Пункт б) доказывается аналогично. Следует отметить, что неравенство $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \geqslant 0$ равносильно неравенству $f_1(x) \cdot f_2(x) \geqslant 0$ при $f_2(x) \neq 0$, а неравенство $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \leqslant 0$ — неравенству $f_1(x) \cdot f_2(x) \leqslant 0$ при $f_2(x) \neq 0$.

**Теорема 6** (о транзитивном свойстве равносильных неравенств). *Если неравенство (1) равносильно неравенству (2), а неравенство (2) равносильно неравенству (3), то неравенство (1) равносильно неравенству (3).*

## § 3. Решение рациональных неравенств с одним неизвестным

**Решение неравенств первой степени с одним неизвестным.** Неравенства вида

$$f_1(x) > f_2(x),\ f_1(x) \geqslant f_2(x),$$
$$f_1(x) < f_2(x),\ f_1(x) \leqslant f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — линейные функции переменной $x$ (одна из которых может быть постоянной), называются *неравенствами первой степени с одним неизвестным.*

Всякое линейное неравенство с одним неизвестным всегда можно привести к каноническому виду

$$ax + b > 0. \tag{6.11}$$

**Решение неравенства** $ax + b > 0$:

а) если $a > 0$, то, по теореме 3 предыдущего параграфа, после умножения обеих частей неравенства на $\frac{1}{a} > 0$, получим равносильное данному неравенство $x + \frac{b}{a} >$, 0 из которого, по теореме 2, следует

$$x > -\frac{b}{a};$$

б) если $a<0$, то, по теореме 4 предыдущего параграфа, после умножения обеих частей данного неравенства на $\frac{1}{a}<0$ получим равносильное данному неравенство $x+\frac{b}{a}<0$, из которого следует

$$x<-\frac{b}{a};$$

в) если $a=0$, то при $b\leqslant 0$ для любого действительного значения $x$ неравенство обращается в неверное и решений не имеет, а при $b>0$ данное неравенство верно при всех действительных значениях $x$, т. е. все действительные числа являются решениями неравенства.

Следует отметить, что неравенство $ax+b<0$ можно привести к виду $-ax-b>0$ умножением обеих его частей на $-1$.

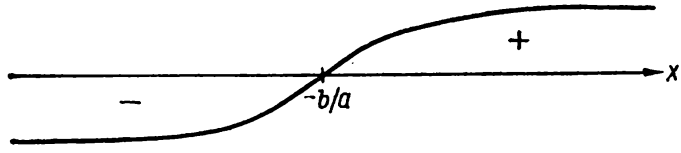



Рис. 10.

**Исследование двучлена** $ax+b$ $(a\neq 0)$. Найдем корень или нуль двучлена (значение $x$, при котором $ax+b=0$):

$$x=-\frac{b}{a}.$$

Представим двучлен в виде

$$a\left(x+\frac{b}{a}\right)(a\neq 0);$$

при $a>0$ двучлен будет положительным, если $x+\frac{b}{a}>0$ $\left(\text{т. е. при } x>-\frac{b}{a}\right)$, и отрицательным, если $x+\frac{b}{a}<0$ $\left(\text{т. е. при } x<-\frac{b}{a}\right)$.

Вывод. Если $a>0$, то двучлен $ax+b$ положителен при значениях $x$, больших корня, и отрицателен при значениях $x$, меньших корня (при $a<0$ — наоборот).

Геометрически это означает, что при $a>0$ двучлен $ax+b$ положителен справа и отрицателен слева от своего корня (рис. 10).

Рассмотрим пример решения неравенства первой степени

$$x-\frac{x-1}{2}>\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}.$$

Умножив обе части данного неравенства на $12>0$ (теорема 3 предыдущего параграфа), получим

$$12x-6x+6>3x-9-4x+8.$$

Перенесем члены неравенства, содержащие неизвестное, в одну часть неравенства, а известные — в другую (теорема 2):

$$12x - 6x - 3x + 4x > -9 + 8 - 6.$$

Так как приведение подобных членов не меняет ОДЗН, то, по теореме 1 предыдущего параграфа, получим неравенство

$$7x > -7,$$

равносильное предыдущему, а следовательно, и данному. Разделив обе части последнего неравенства на 7 $\left(\text{или умножив на } \frac{1}{7}\right)$, получим $x > -1$.

Ответ. $x > -1$.

При решении неравенств обоснование решения, как правило, письменно не излагается. Однако надо уметь обосновать каждое преобразование, выполняемое при решении неравенства, и уяснить, будет ли полученное неравенство равносильно предыдущему.

### Решение неравенств второй степени (квадратных) с одним неизвестным

Неравенство, обе части которого есть многочлены относительно неизвестного не выше второй степени, причем хотя бы один из них второй степени, называется *неравенством второй степени с одним неизвестным*.

Всякое неравенство второй степени с одним неизвестным (квадратное неравенство) можно привести к одному из его канонических видов:

$$ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c \geqslant 0,$$
$$ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c \leqslant 0, \qquad (6.12)$$

где $a \neq 0$.

**Решение неравенства** $ax^2 + bx + c > 0$ $(a \neq 0)$.

Если $a > 0$, то данное неравенство равносильно неравенству (теорема 3, § 2, гл. 6)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0,$$

или

$$x^2 + px + q > 0, \qquad (6.13)$$

где $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$.

Если $a < 0$, то данное неравенство равносильно неравенству (теорема 4, § 2, гл. 6)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0,$$

или

$$x^2 + px + q < 0, \qquad (6.14)$$

где $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$.

Аналогично другие неравенства вида (6.12) приводятся к виду, аналогичному (6.13) или (6.14).

Рассмотрим трехчлен

$$x^2 + px + q. \tag{6.15}$$

1. Если $D = p^2 - 4q > 0$, то трехчлен $x^2 + px + q$ можно разложить на множители с действительными коэффициентами (см. § 2, гл. 4)

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

где

$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ и $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ — корни трехчлена ($x_1 < x_2$).

Рис. 11.

Если $x < x_1 < x_2$, то $x - x_1 < 0$ и $x - x_2 < 0$; тогда $x^2 + px + q > 0$.

Если $x_1 < x < x_2$, то $x - x_1 > 0$, а $x - x_2 < 0$; тогда $x^2 + px + q < 0$.

Если $x > x_2 > x_1$, то $x - x_1 > 0$ и $x - x_2 > 0$; тогда $x_2 + px + q > 0$.

Вывод. Если $D > 0$, то квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ положителен при значениях $x$, меньших меньшего корня и больших большего корня, и отрицателен при значениях $x$, лежащих между корнями.

На рис. 11 изображены интервалы знакопостоянства трехчлена $x^2 + px + q$.

2. Если $D = p^2 - 4q = 0 \left(q = \frac{p^2}{4}\right)$, то трехчлен (6.15) принимает вид

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

и при всех $x \neq -\frac{p}{2}$ будет положительным, а при $x = -\frac{p}{2}$ равен нулю.

3. Если $D = p^2 - 4q < 0$, то трехчлен (6.15) можно представить в виде

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Так как $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \geqslant 0$ при всех $x$, а $4q - p^2 > 0$, то трехчлен (6.15) положителен при всех значениях $x$.

Правило. Чтобы решить квадратное неравенство $x^2+px+q>0$ или $x^2+px+q<0$, можно трехчлен $x^2+px+q$ разложить на множители, корни этих множителей нанести на числовую ось, а затем построить «змейку», проходящую через корни (см. рис. 11), причем ветвь, расположенная слева от наименьшего корня, должна находиться над числовой осью, т. е. левая часть неравенства будет положительной.

Если квадратный трехчлен не разлагается на различные множители, то второе неравенство не имеет решений; решениями первого неравенства будут все действительные числа, если трехчлен не имеет действительных корней; если же трехчлен имеет один (двукратный) действительный корень, то решениями первого неравенства будут все, за исключением этого корня, действительные числа.

Неравенства вида $x^2+px+q\geqslant 0$ и $x^2+px+q\leqslant 0$ решаются аналогично, только в область решений этих неравенств включаются действительные корни трехчлена $x^2+px+q$ (если они существуют).

Рис. 12.

Пример 1. Решить неравенство

$$x^2-6x+8>0.$$

Решение. Разложим левую часть неравенства на множители; тогда неравенство примет вид

$$(x-2)(x-4)>0.$$

При $x_1=2$ или $x_2=4$ левая часть неравенства обращается в нуль, т. е. $x_1=2$ или $x_2=4$ — корни (нули) левой части неравенства. При всех значениях $x>4$ оба множителя левой части неравенства положительны и при этих значениях $x$ левая часть неравенства принимает только положительные значения, т. е. $x>4$ — решения неравенства. При $2<x<4$ первый множитель левой части неравенства положителен, а второй отрицателен и при этих значениях $x$ левая часть неравенства принимает отрицательные значения, т. е. эти значения $x$ не являются решениями неравенства. При $x<2$ оба множителя левой части неравенства отрицательны и их произведение положительно, т. е. эти значения $x$ — решения данного неравенства.

Таким образом, если левая часть неравенства — произведение различных линейных приведенных множителей относительно неизвестного, а правая нуль, то при всех значениях неизвестного, больших наибольшего из корней левой части неравенства, она принимает только положительные значения, а при переходе справа налево через корни последовательно меняет знак.

Выяснение знака левой части такого неравенства удобно делать геометрически — по схеме, приведенной для данного неравенства на рис. 12. (См. правило «змейки» (6.18) или (6.19)).

Ответ. $x<2$ или $x>4$.

Пример 2. Решить неравенство $x^2 + x - 6 \leqslant 0$.

Решение. Разложим левую часть неравенства на множители; получим неравенство

$$(x + 3)(x - 2) \leqslant 0.$$

Построим «змейку» (рис. 13).

Ответ. $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

Пример 3. Решить неравенство

$$x^2 + 6x + 15 < 0.$$

Решение. Левая часть неравенства на линейные действительные множители не разлагается (действительных корней не имеет). Выделим в левой части неравенства полный квадрат; получим неравенство

$$(x + 3)^2 + 6 < 0,$$

левая часть которого положительна при всех действительных значениях $x$.

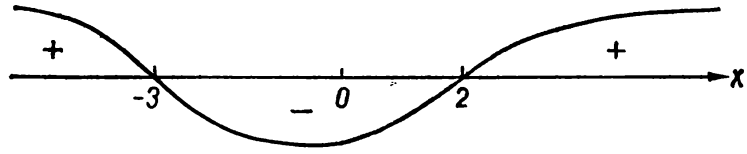



Рис. 13

Ответ. Решений нет.

Пример 4. Решить неравенство

$$x^2 - 8x + 16 > 0.$$

Решение. Разложим левую часть неравенства на множители

$$(x - 4)(x - 4) > 0, \text{ или } (x - 4)^2 > 0.$$

Левая часть последнего неравенства положительна при всех действительных значениях $x \neq 4$.

Ответ. $x \neq 4$.

Пример 5. Решить неравенство

$$x^2 + 10x + 30 < 0.$$

Решение. Левая часть неравенства на линейные действительные множители не разлагается. Выделим в левой части неравенства полный квадрат; получим неравенство

$$(x + 5)^2 + 5 > 0,$$

которое верно при всех действительных значениях $x$.

Ответ. $-\infty < x < +\infty$.

Символ «$\infty$» не является числом, а означает бесконечность; запись $-\infty < x < +\infty$ означает, что $x$ может быть любым действительным числом. Например, если $x$ — любое число, большее 5, то записывают так:

$$5 < x < +\infty \text{ или } (5; +\infty).$$

### Решение целых рациональных неравенств с одним неизвестным

Целым рациональным алгебраическим неравенством с одним неизвестным называется такое неравенство, обе части которого есть многочлены относительно неизвестного.

Степенью целого рационального алгебраического неравенства с одним неизвестным называется бóльшая из степеней многочленов, входящих в это неравенство.

Всякое целое рациональное алгебраическое неравенство $n$-й степени с одним неизвестным может быть приведено к одному из канонических видов

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 > 0, \tag{6.16}$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \geqslant 0 \tag{6.16,а}$$

или

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 < 0, \tag{6.17}$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \leqslant 0, \quad (a_n \neq 0). \tag{6.17,а}$$

Пример 1. Решить неравенство

$$(x + 2)(x - 3)(x - 5) < 0.$$

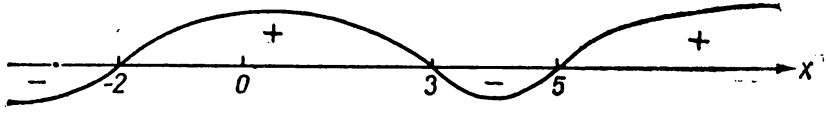



Рис. 14.

Решение. Нанесем на числовую ось нули левой части неравенства (рис. 14). Так как при $x > 5$ (больше наибольшего корня) все множители положительны, то и левая часть неравенства положительна. Далее нетрудно установить, что при переходе через нули левой части неравенства знак ее меняется на противоположный. Построим «змейку» (рис. 14).

Ответ. $x < -2$ и $3 < x < 5$.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5) > 0.$$

Решение. Нанесем нули левой части неравенства на числовую ось и построим «змейку» (рис. 15).

Ответ. $-1 < x < 1$, $2 < x < 3$ и $x > 5$.

*Правило «змейки».* Чтобы найти решения неравенства

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)>0 \qquad (6.18)$$

или

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)<0, \qquad (6.19)$$

все множители которого различны между собой, достаточно нанести на числовую ось нули левой части неравенства $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\cdots$ $x_n$; тогда при больших наибольшего нуля значениях $x$ левая часть неравенства будет положительной, а при переходе справа налево через нули ее знак будет меняться.

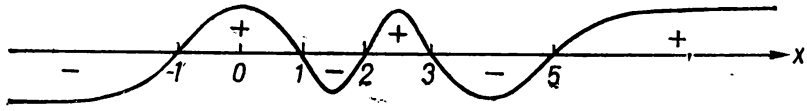



Рис. 15.

При решении неравенств

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\geqslant 0$$

и

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\leqslant 0$$

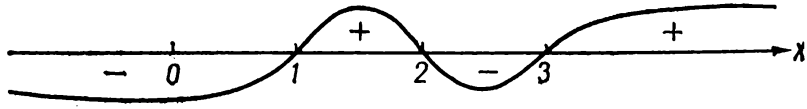



Рис. 16.

с помощью правила «змейки» кроме соответствующих интервалов знакопостоянства левых частей неравенств к их решениям надо относить и их нули (корни).

Пример 1. Решить неравенство

$$x^3-6x^2+11x-6\leqslant 0.$$

Решение. Найдем корни левой части неравенства: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ (все корни различные). Неравенство можно представить в виде

$$(x-1)(x-2)(x-3)\leqslant 0.$$

Построим «змейку» (рис. 16).

Ответ. $x\leqslant 1$ и $2\leqslant x\leqslant 3$.

Пример 2. Решить неравенство

$$(2x+1)(3-x)(x-6)<0.$$

Р е ш е н и е. Приведем данное неравенство к виду (6.18) или (6.19). Для этого разделим обе части неравенства на $2 > 0$:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(3 - x)(x - 6) < 0.$$

Затем обе части полученного неравенства умножим на $-1 < 0$; тогда данное неравенство принимает вид (6.18)

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)(x - 6) > 0.$$

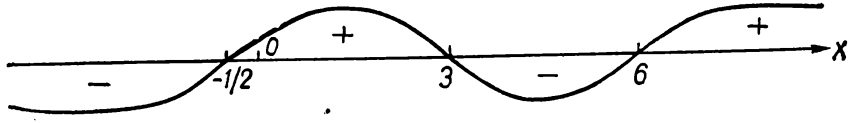



Рис. 17.

Строим «змейку» (рис. 17).

О т в е т. $-\frac{1}{2} < x < 3$ и $x > 6$.

П р и м е р 3. Решить неравенство

$$(x - 1)^3 (x - 2)^2 (x - 3)^5 (x - 4) > 0.$$

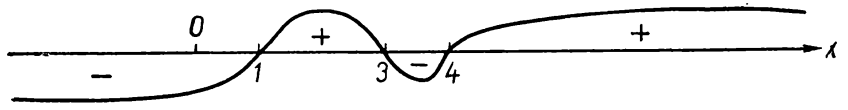



Рис. 18.

Р е ш е н и е. Так как основание нечетной степени и сама нечетная степень имеют одинаковые знаки при всех значениях $x$, то в данном неравенстве можно заменить $(x - 1)^3$ на $x - 1$ и $(x - 3)^5$ на $x - 3$:

$$(x - 1)(x - 2)^2 (x - 3)(x - 4) > 0.$$

Поскольку четная степень действительного числа неотрицательная, т. е. $(x - 2)^2 \geqslant 0$, то при $(x - 2)^2 > 0$, т. е. при $x \neq 2$, обе части неравенства можно разделить на $(x - 2)^2$. При $x = 2$ $(x - 2)^2 = 0$, значит, левая часть неравенства равна нулю, т. е. $x = 2$ не является решением данного неравенства.

Следовательно, данное неравенство равносильно неравенству $(x - 1)(x - 3)(x - 4) > 0$ при $x \neq 2$. Поэтому из решений последнего неравенства нужно исключить $x = 2$ (если оно принадлежит к его решениям).

Строим «змейку» (рис. 18) для неравенства $(x - 1)(x - 3)(x - 4) > 0$ и находим его решения: $1 < x < 3$ и $x > 4$. Исключая $x = 2$, получаем $1 < x < 2$; $2 < x < 3$; $x > 4$.

О т в е т. $1 < x < 2$, $2 < x < 3$, $x > 4$.

Пример 4. Решить неравенство $(x-1)(x+2)(x^2+3x+8)<0$.

Решение. Поскольку $x^2+3x+8=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$ при всех $x$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$(x-1)(x+2)<0,$$

из которого находим $-2<x<1$.

Ответ. $-2<x<1$.

Пример 5. Решить неравенство $(x-1)^2(x-3)(3x-6-x^2)<0$.

Решение. Множитель $3x-6-x^2$ приведем к виду (6.15); для этого обе части неравенства умножим на $-1<0$:

$$(x-1)^2(x-3)(x^2-3x+6)>0.$$

$x^2-3x+6=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$ при всех значениях $x$; $(x-1)^2>0$ при $x\neq 1$, поэтому данное неравенство равносильно $x-3>0$ при $x\neq 1$, откуда $x>3$.

Ответ. $x>3$.

Рассмотрим общую схему решения неравенства (6.16)

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0>0 \quad (a_n\neq 0).$$

Многочлен

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

в множестве действительных чисел можно представить в виде (см. § 1, гл. 13).

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=$$
$$=a_n(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_ix+q_i)^{l_i},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — действительные корни многочлена соответственно кратности $m_1, m_2, \ldots, m_k$, а трехчлены $x^2+p_1x+q_1, \ldots, x^2+p_ix+q_i$ имеют отрицательные дискриминанты, т. е. при всех $x$ положительны.

Неравенство (6.16) можно переписать в виде

$$a_n(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_ix+q_i)^{l_i}>0;$$

так как квадратные трехчлены в этом неравенстве принимают положительные значения при всех действительных значениях неизвестного, то оно (теорема 3, § 2, гл. 6) равносильно неравенству

$$a_n(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_k)^{m_k}>0. \qquad (1)$$

Множители левой части неравенства с нечетными показателями можно оставить в первой степени, а с четными — опустить, выписав те зна-

чения $x$, при которых они обращаются в нуль. Тогда неравенство примет вид

$$a_n (x - x_{j_1})(x - x_{j_2}) \cdots (x - x_{j_s}) > 0;$$

при $a_n > 0$ оно равносильно неравенству

$$(x - x_{j_1})(x - x_{j_2}) \cdots (x - x_{j_s}) > 0,$$

а при $a_n < 0$ — неравенству

$$(x - x_{j_1})(x - x_{j_2}) \cdots (x - x_{j_s}) < 0.$$

Решив полученное (одно из последних) неравенство по правилу «змейки» и исключив из найденных решений те значения неизвестного, при которых множители левой части неравенства (1) с четными показателями обращаются в нуль, получим решение неравенства (6.16).

Правило. Чтобы решить целое рациональное неравенство (6.16) или (6.17), достаточно его левую часть разложить на множители; затем привести его к виду (6.18) или (6.19) и по правилу «змейки» найти решение.

### Решение дробно-рациональных неравенств

*Неравенства вида*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0; \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geqslant 0 \tag{6.20}$$

*или*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0, \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leqslant 0, \tag{6.21}$$

*где*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

*и*

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \quad (b_n \neq 0)$$

*— многочлены переменной $x$, называются дробно-рациональными неравенствами.*

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 6x + 5} < 0.$$

Решение. По теореме 5 предыдущего параграфа, данное дробное неравенство равносильно целому

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 - 6x + 5) < 0.$$

Разложим левую часть неравенства на линейные множители

$$(x + 1)(x + 4)(x - 1)(x - 5) < 0.$$

Построим «змейку» (рис. 19).

Ответ. $-4 < x < -1$ и $1 < x < 5$.

Пример 2. Решить неравенство $2-\frac{x-3}{x-2}>\frac{x-5}{x-1}$.

Решение. Перенесем все члены неравенства в левую часть (теорема 2 предыдущего параграфа):

$$2-\frac{x-3}{x-2}-\frac{x-5}{x-1}>0.$$

Приведем все члены левой части неравенства к общему знаменателю:

$$\frac{2(x-2)(x-1)-(x-3)(x-1)-(x-5)(x-2)}{(x-2)(x-1)}>0;$$

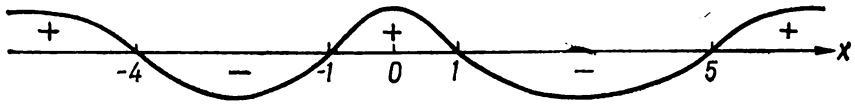



Рис. 19.

после упрощений получим неравенство

$$\frac{5x-9}{(x-2)(x-1)}>0,$$

которое равносильно неравенству

$$(5x-9)(x-2)(x-1)>0,$$

или

$$\left(x-\frac{9}{5}\right)(x-2)(x-1)>0.$$

По правилу «змейки» находим $1<x<\frac{9}{5}$ и $x>2$.

Ответ. $1<x<\frac{9}{5}$ и $x>2$.

При решении дробно-рациональных неравенств можно придерживаться следующей схемы:

а) перенести все члены неравенства в левую часть (теорема 2, § 2, гл. 6);

б) привести все члены левой части неравенства к общему знаменателю (теорема 1, § 2, гл. 6);

в) заменить дробное неравенство целым (теорема 5, § 2, гл. 6);

г) разложить левую часть полученного неравенства на простейшие множители (теорема 1, § 2, гл. 6);

д) привести полученное неравенство к виду (6.18) или (6.19) (теоремы 3 и 4, § 2, гл. 6);

е) найти решения полученного неравенства по правилу «змейки».

## § 4. Системы рациональных неравенств с одним неизвестным

*Системой неравенств с одним неизвестным называется несколько неравенств, в которых под одной и той же буквой, обозначающей неизвестное, подразумевается одна и та же величина.*

Например,

$$\begin{cases} 3x+5<x+1, \\ x^2-3x<2x^3-5. \end{cases}$$

Всякое значение неизвестного, удовлетворяющее одновременно всем неравенствам системы, называется *решением этой системы.*

Например, для системы неравенств

$$\begin{cases} 3x+5>x^2, \\ x^3-3x<4 \end{cases}$$

значение $x=1$ есть решение, так как при $x=1$ неравенства системы обращаются в тождественные неравенства

$$\begin{cases} 8>1, \\ -2<4; \end{cases}$$

значение $x=3$ не является решением, так как при $x=3$ неравенства системы обращаются в неравенства

$$\begin{cases} 14>9, \\ 18<4, \end{cases}$$

из которых второе не верно.

*Решить систему неравенств с одним неизвестным — значит найти множество всех ее решений или показать, что система не имеет решений.*

### Решение систем неравенств первой степени

Системы простейших неравенств первой степени имеют вид

$$\begin{cases} a_1x+b_1 \gtrless 0, \\ a_2x+b_2 \gtrless 0. \end{cases} \qquad (6.22)$$

Рассмотрим решение систем вида (6.22) на конкретных примерах.

А. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x-6>0, \\ 3x-15>0. \end{cases}$$

Решение. Решаем каждое неравенство системы

$$\begin{cases} x>3, \\ x>5. \end{cases}$$

Чтобы найти решение системы, возьмем числовую ось и на ней нанесем решения первого (сверху) и второго (снизу) неравенств, как показано на рис. 20, *а*. Тогда решениями системы будут те значения $x$, которые изображаются точками числовой оси, лежащими между полосками.

Ответ. $x > 5$.

Б. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x + 3 < 0, \\ 3x - 18 < 0. \end{cases}$$

Решение. Решаем каждое неравенство системы

$$\begin{cases} x < -3, \\ x < 6. \end{cases}$$

Графически найдем решение системы (рис. 20, *б*).

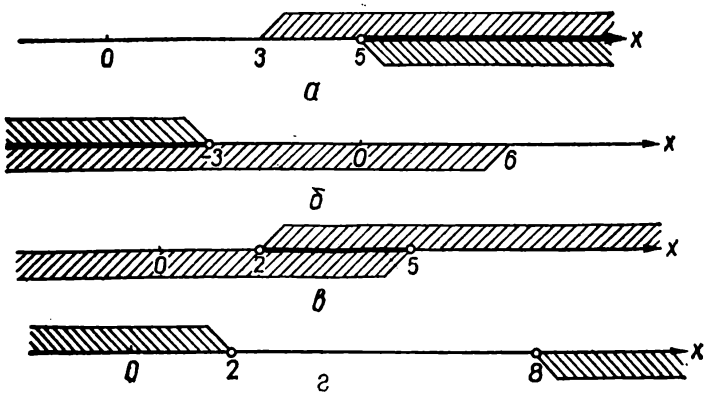



Рис. 20.

Ответ. $x < -3$.

В. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ 4x - 20 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Решив каждое неравенство системы, получим

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$$

Графически найдем решение (рис. 20, *в*).

Ответ. $2 < x \leqslant 5$.

Г. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - 6 < 0, \\ 5x - 40 > 0. \end{cases}$$

Решение. Решив каждое неравенство системы, получим

$$\begin{cases} x < 2, \\ x > 8. \end{cases}$$

Графически (рис. 20, *г*) найдем, что система решений не имеет (несовместна), поскольку между полосками точек числовой оси нет.

В случае нестрогих неравенств, в которых допускаются равенства ($\geqslant$ или $\leqslant$), в ответах тоже надо в соответствующих местах ставить нестрогие неравенства ($\geqslant$ или $\leqslant$). На рисунке в таких случаях ставится вертикальная черта вместо наклонной.

Рассмотрим еще два примера решений систем линейных неравенств.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{7-x}{2}-3<\dfrac{3+4x}{5}-4, \\ \dfrac{5x}{3}+5(4-x)\leqslant 2(4-x). \end{cases}$$

Решение. Решив каждое из неравенств, получим

$$\begin{cases} x>3, \\ x\geqslant 9, \end{cases}$$

откуда $x\geqslant 9$.

Ответ. $x\geqslant 9$.

Пример 2. Найти целые решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2}<2x, \\ \dfrac{2x+15}{9}>\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{x}{3}. \end{cases}$$

Решение. Находим действительные решения данной системы

$$\begin{cases} x>2{,}7, \\ x<3\dfrac{6}{7}, \end{cases}$$

откуда $2{,}7<x<3\frac{6}{7}$. Целым значением является только $x=3$.

Ответ. $x=3$.

### Решение систем рациональных неравенств высших степеней

Решение систем нескольких неравенств с одним неизвестным можно проводить по следующей схеме:

а) найти решения каждого из неравенств, входящих в данную систему;

б) составить систему, соответствующую данной, из найденных решений ее неравенств. Эта система будет равносильной данной;

в) найти решения последней системы. Решения системы удобно находить геометрически, как это показано в последующих примерах.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^3-10x^2+27x-18>0, \\ x^3-11x^2+38x-40\leqslant 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим каждое неравенство системы.

а) $x^3 - 10x^2 + 27x - 18 > 0$. Разложим левую часть неравенства на множители; получим неравенство

$$(x-1)(x-3)(x-6) > 0,$$

решая которое (по правилу «змейки»), найдем

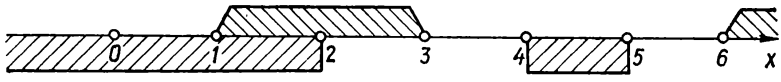
$$1 < x < 3 \text{ или } x > 6.$$

б) $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 \leqslant 0$. Разложив левую часть неравенства на множители, получим неравенство

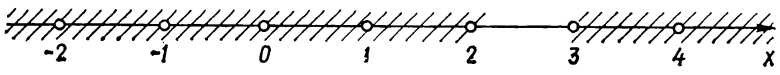
$$(x-2)(x-4)(x-5) \leqslant 0,$$

из которого находим

$$x \leqslant 2 \text{ или } 4 \leqslant x \leqslant 5.$$




*а*




*б*

Рис. 21.

Таким образом, данная система неравенств равносильна системе двух совокупностей неравенств

$$\begin{cases} 1 < x < 3 \text{ или } x > 6, \\ x \leqslant 2 \text{ или } 4 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

Решения этой системы найдем графически.

Решения первой совокупности неравенств системы изобразим в виде штрихованных полосок, лежащих над числовой осью, а решения второй совокупности неравенств системы — в виде полосок, лежащих под числовой осью. Тогда числа, соответствующие точкам интервалов числовой оси, лежащих между полосками (рис. 21, *а*), будут решениями последней системы совокупностей неравенств, которая равносильна данной системе неравенств.

О т в е т. $1 < x \leqslant 2$.

П р и м е р 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \leqslant 0, \\ x^4 + x^3 - 12x^2 - 26x - 24 < 0, \\ 1 - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+4} > \dfrac{x-14}{x^2+2x-8}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим каждое неравенство системы.

а) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$. Разложив левую часть неравенства на множители, получим неравенство

$$(x + 2)(x - 1)(x - 3) \leqslant 0,$$

откуда находим

$$x \leqslant -2 \text{ или } 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

б) $x^4 + x^3 - 12x^2 - 26x - 24 < 0$. Разложив левую часть неравенства на множители, найдем

$$(x + 3)(x - 4)(x^2 + 2x + 2) < 0;$$

так как трехчлен $x^2 + 2x + 2 \equiv (x + 1)^2 + 1$ принимает положительные значения при всех действительных значениях $x$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$(x + 3)(x - 4) < 0,$$

откуда находим

$$-3 < x < 4.$$

в) $1 - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+4} > \frac{x-14}{x^2+2x-8}$.

Перенесем все члены неравенства в левую часть; получим

$$1 - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+4} - \frac{x-14}{x^2+2x-8} > 0.$$

Приведем все члены левой части неравенства к общему знаменателю

$$\frac{(x+4)(x-2) - (x+4) + x - 2 - x + 14}{(x+4)(x-2)} > 0,$$

или

$$\frac{x(x+1)}{(x+4)(x-2)} < 0.$$

Это дробно-рациональное неравенство по теореме 5 § 2 этой главы равносильно целому рациональному неравенству

$$x(x + 1)(x + 4)(x - 2) > 0,$$

или

$$(x + 4)(x + 1)x(x - 2) > 0,$$

решая которое по правилу «змейки», находим

$$x < -4, \text{ или } -1 < x < 0, \text{ или } x > 2.$$

Таким образом, данная система неравенств равносильна следующей системе совокупностей неравенств

$$\begin{cases} x \leqslant -2 \text{ или } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x < -4, \text{ или } -1 < x < 0, \text{ или } x > 2. \end{cases} \quad \begin{array}{l} -3 < x < 4, \\ \end{array}$$

Найдем решения последней системы графически, но другим способом, чем в примере 1.

Нанесем на числовую ось числа $-4$; $-3$; $-2$; $-1$; $0$; $1$; $2$; $3$; $4$, выделив их кружочками (рис. 21, *б*).

Поскольку те значения $x$, которые не являются решениями какого-нибудь из неравенств системы, не являются и решениями системы, то сначала зачеркнем интервалы числовой оси, которые содержат числа, не являющиеся решениями первого неравенства данной системы, а затем то же самое проделаем для второго и третьего неравенств системы (рис. 21, б).

После вычеркивания упомянутых интервалов на числовой оси останется интервал от числа 2 до числа 3, причем число 2 вычеркнуто, а число 3 не вычеркнуто (решение системы).

Ответ. $2 < x \leqslant 3$.

Примечание. Если система неравенств содержит больше двух неравенств, то графически находить ее решения удобнее способом, который был использован при решении примера 2.

## § 5. Неравенства с неизвестным под знаком абсолютной величины. Иррациональные неравенства

Рассмотрим несколько примеров на решение неравенств с неизвестными под знаком абсолютной величины.

Пример 1. Решить неравенство $|x-5|<9$.

Решение. По свойству 4 модуля величины (§ 11, гл. 1) это неравенство равносильно системе неравенств

$$-9 < x-5 < 9.$$

Прибавив число 5 ко всем частям последних неравенств, найдем

$$-4 < x < 14.$$

Ответ. $-4 < x < 14$.

Рис. 22.

Пример 2. Решить неравенство

$$|x+4|>6.$$

Решение. По свойству 5 абсолютной величины (§ 11, гл. 1) данное неравенство равносильно двум:

$$x+4<-6 \text{ и } x+4>6,$$

откуда $x<-10$ и $x>2$.

Ответ. $x<-10$ и $x>2$.

Пример 3. Решить неравенство $|x+2|+|x-3|>x+5$.

Решение. Нанесем на числовую ось те значения $x$, при которых $x+2=0$ и $x-3=0$, т. е. $x=-2$ и $x=3$ (рис. 22), и рассмотрим неравенство на каждом из полученных промежутков:

а) при $x<-2$ неравенство принимает вид

$$-x-2-x+3>x+5,$$

или

$$x < -\frac{4}{3}.$$

т. е. решениями являются значения $x$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x < -2, \\ x < -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, $x < -2$;

б) при $-2 < x < 3$ неравенство принимает вид

$$x + 2 - x + 3 > x + 5,$$

или

$$x < 0,$$

т. е. решениями неравенства являются решения системы

$$\begin{cases} -2 < x < 3, \\ x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, $-2 < x < 0$;

в) при $x > 3$ неравенство принимает вид

$$x + 2 + x - 3 > x + 5,$$

или

$$x > 6,$$

т. е. решением неравенства являются решения системы

$$\begin{cases} x > 3, \\ x > 6. \end{cases}$$

Следовательно, $x > 6$.

Ответ. $x < -2$, $-2 < x < 0$ и $x > 6$.

### Иррациональные неравенства

Алгебраическое неравенство называется иррациональным если его неизвестное входит под знак корня (радикала).

Например: $\sqrt{x} > x - 1$; $\sqrt{x^2 - 4x + 4} < \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

При решении иррациональных неравенств, как и иррациональных уравнений, корни четной степени рассматриваются только арифметические, а корни нечетной степени рассматриваются на всей числовой оси (при всех действительных значениях подкоренных выражений).

При решении иррациональных неравенств пользуются следующими теоремами.

**Теорема 1.** *Если неравенство, обе части которого неотрицательны при всех значениях неизвестного из области допустимых, возвести в любую натуральную степень, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному*, т. е. если дано неравенство

$$f_1(x) > f_2(x),$$

причем при всех $x$ из ОДЗН $f_1(x) \geqslant 0$ и $f_2(x) \geqslant 0$, то неравенство

$$[f_1(x)]^n > [f_2(x)]^n$$

равносильно данному.

**Теорема 2.** *Если обе части неравенства возвести в нечетную натуральную степень, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному*, т. е. если дано неравенство

$$f_1(x) > f_2(x),$$

то неравенство

$$[f_1(x)]^{2n+1} > [f_2(x)]^{2n+1} \qquad (2)$$

равносильно данному.

При решении иррациональных неравенств, содержащих корни четной степени, можно придерживаться следующей схемы:

1) найти область допустимых значений неизвестного, а затем рассмотреть неравенство в найденной области. Может оказаться, что неравенство не определено в множестве действительных чисел, тогда вопрос о его решении отпадает;

2) неравенство удобно преобразовать к такому виду, чтобы одна из его частей, например левая, принимала положительные значения при всех допустимых значениях неизвестного;

3) затем рассмотреть правую часть неравенства.

Найти допустимые значения неизвестного, при которых она отрицательна (при этих значениях неравенство имеет решения или нет).

При допустимых значениях неизвестного, обращающих обе части в неотрицательные, для решения неравенства применима теорема 1, с помощью которой можно освободиться от иррациональности и найти решения полученного рационального неравенства.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x+7} > 2x - 1.$$

Решение. Областью допустимых значений неизвестного являются значения $x$, при которых $x + 7 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant -7$.

А. Найдем допустимые значения $x$, при которых правая часть неравенства отрицательна. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x \geqslant -7, \\ 2x - 1 < 0; \end{cases}$$

получим

$$-7 \leqslant x < \frac{1}{2}.$$

При этих значениях $x$ левая часть данного неравенства положительная (арифметический корень), а правая — отрицательная; поэтому все значения $x$, определяемые неравенствами $-7 \leqslant x < \frac{1}{2}$, есть решения данного неравенства.

Б. При $2x - 1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant \frac{1}{2}$, обе части данного неравенства неотрицательны и, по теореме 1, оно равносильно

$$(\sqrt{x+7})^2 > (2x-1)^2,$$

или

$$4x^2 - 5x - 6 < 0.$$

Решив систему неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ 4x^2 - 5x - 6 < 0, \end{cases}$$

получим

$$\frac{1}{2} \leqslant x < 2.$$

Изобразим графически под числовой осью $Ox$ в виде полоски ОДЗН, а над числовой осью нанесем в виде полосок результаты, полученные в пунктах А и Б (рис. 23). По графическому изображению легко найти результат решения.

Ответ. $-7 \leqslant x < 2$.

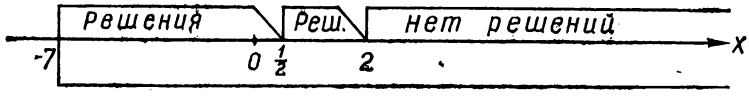



Рис. 23.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{x+6} < x - 6$.

Решение. Область определения данного неравенства найдем, решив неравенство

$$x + 6 \geqslant 0,$$

т. е.

$$x \geqslant -6.$$

А. Найдем допустимые значения $x$, при которых правая часть неравенства отрицательна:

$$\begin{cases} x \geqslant -6, \\ x - 6 < 0, \end{cases}$$

или $-6 \leqslant x < 6$. При этих значениях $x$ заданное неравенство решений не имеет (левая часть неравенства не отрицательна, а правая отрицательна).

Б. При $x - 6 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 6$, обе части неравенства принимают неотрицательные значения, поэтому, по теореме 1, заданное неравенство равносильно

$$(\sqrt{x+6})^2 < (x-6)^2,$$

или

$$x^2 - 13x + 30 > 0.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x^2 - 13x + 30 > 0, \end{cases}$$

из которой находим $x > 10$.

Изобразим это графически (рис. 24).

Ответ. $x > 10$.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x$.

Решение. Найдем ОДЗН:

$$x \leqslant -2 \text{ или } x \geqslant 5.$$

А. Найдем допустимые значения $x$, при которых правая часть неравенства отрицательна:

$$\begin{cases} (x+2)(x-5) \geqslant 0, \\ 8 - x < 0, \end{cases}$$

откуда $x > 8$. Эти значения $x$ не являются решениями.

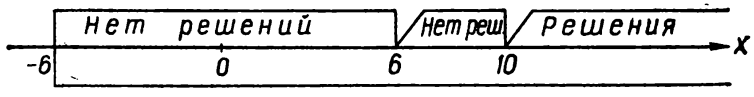



Рис. 24.

Б. При тех допустимых значениях неизвестного, при которых

$$x \leqslant -2 \text{ и } 5 \leqslant x < 8,$$

обе части заданного неравенства принимают неотрицательные значения. Применив теорему 1, получим $(x+2)(x-5) < 64 - 16x + x^2$, или

Рис. 25.

$13x < 74$; $x < 5\frac{9}{13}$. Учитывая допустимые в данном случае значения $x$, находим

$$x \leqslant -2 \text{ и } 5 \leqslant x < 5\frac{9}{13}.$$

Изобразим это графически (рис. 25).

Ответ. $x \leqslant -2$ и $5 \leqslant x < 5\frac{9}{13}$.

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt{5x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$.

Решение. Область определения неравенства находим из системы неравенств

$$\begin{cases} 5x + 6 \geqslant 0, \\ x + 1 \geqslant 0, \\ 2x - 5 \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда находим $x \geqslant \frac{5}{2}$.

Так как при всех $x$ из ОДЗН обе части данного неравенства положительны, то после возведения их в квадрат получим неравенство

$$x+5>\sqrt{(x+1)(2x-5)},$$

равносильное данному. Поскольку в полученном неравенстве при $x\geqslant\frac{5}{2}$ обе части неотрицательные, то после возведения их в квадрат получим

$$x^2-13x-30<0,$$

или

$$(x-15)(x+2)<0;\ -2<x<15.$$

Учитывая допустимые значения неизвестного, находим $\frac{5}{2}\leqslant x<15$.

Ответ. $\frac{5}{2}\leqslant x<15$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\sqrt{6-x-x^2}<\sqrt{3x+6}.$$

Решение. ОДЗН определяется системой неравенств

$$\begin{cases}6-x-x^2\geqslant 0,\\ 3x+6\geqslant 0,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}(x+3)(x-2)\leqslant 0,\\ x+2\geqslant 0,\end{cases}$$

откуда находим $-2\leqslant x\leqslant 2$.

Поскольку при всех $x$ из ОДЗН обе части заданного неравенства неотрицательны, после возведения их в квадрат и упрощений получим $x^2+4x>0$; $x<-4$ и $x>0$. Учитывая ОДЗН, находим $0<x\leqslant 2$.

Ответ. $0<x\leqslant 2$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}. \qquad (1)$$

Решение. ОДЗН определяется системой неравенств

$$\begin{cases}x^2-8x+15\geqslant 0,\\ x^2+2x-15\geqslant 0,\\ 4x^2-18x+18\geqslant 0,\end{cases}$$

решая которую, находим $x\leqslant -5$, $x=3$, $x\geqslant 5$.

А. При $x=3$ неравенство (1) обращается в неверное неравенство $0>0$. Значит, $x=3$ не является решением.

Б. При $x\leqslant -5$ и $x\geqslant 5$ обе части данного неравенства положительны. Представим его в виде

$$\sqrt{(x-3)(x-5)}+\sqrt{(x-3)(x+5)}>\sqrt{4(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)},$$

или

$$\sqrt{|x-3|}\cdot\sqrt{|x-5|}+\sqrt{|x-3|}\cdot\sqrt{|x+5|}>$$
$$>2\sqrt{|x-3|}\cdot\sqrt{\left|x-\frac{3}{2}\right|}.$$

Так как $x \neq 3$, то последнее неравенство равносильно

$$\sqrt{|x-5|}+\sqrt{|x+5|}>2\sqrt{\left|x-\frac{3}{2}\right|}. \qquad (2)$$

Решим неравенство (2) при $x \leqslant -5$. В этом случае оно принимает вид

$$\sqrt{5-x}+\sqrt{-5-x}>2\sqrt{\frac{3}{2}-x}.$$

После возведения обеих частей в квадрат (обе части неравенства положительны) получим

$$-2x+2\sqrt{x^2-25}>4\left(\frac{3}{2}-x\right),$$

или

$$\sqrt{x^2-25}>3-x.$$

Поскольку $3-x>0$ и $\sqrt{x^2-25} \geqslant 0$ при всех $x \leqslant -5$, после возведения обеих частей этого неравенства в квадрат и упрощений получим

$$x>5\frac{2}{3}.$$

Система неравенств

$$\begin{cases} x \leqslant -5, \\ x>5\frac{2}{3} \end{cases}$$

противоречива, поэтому среди допустимых значений $x \leqslant -5$ решений нет.

Решим неравенство (2) при $x \geqslant 5$. В этом случае оно принимает вид

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{x+5}>2\sqrt{x-\frac{3}{2}}.$$

После возведения обеих частей в квадрат и упрощений получим

$$\sqrt{x^2-25}>x-3.$$

При $x \geqslant 5$ обе части этого неравенства неотрицательны; после возведения их в квадрат получим

$$x^2-25>x^2-6x+9,$$

или

$$x>5\frac{2}{3}.$$

Из системы $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ x>5\frac{2}{3} \end{cases}$ найдем $x>5\frac{2}{3}$.

Ответ. $x>5\frac{2}{3}$.

## § 6. Исследование уравнений первой и второй степени с одним неизвестным

Рассмотрим уравнение с буквенными коэффициентами (параметрами)

$$f(x, a, b, c, \ldots, p) = 0.$$

Если вместо параметров $a, b, c, \ldots, p$ подставить числовые значения $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0, \ldots, p = p_0$ и при этом уравнение определено, то говорят, что система значений параметров $a_0, b_0, c_0, \ldots, p_0$ допустима для уравнения; если же при этих значениях параметров уравнение не определено, то говорят, что система значений параметров не допустима для уравнения. Исследование будем проводить в множестве действительных чисел.

Исследовать уравнение — это значит:

а) определить множество допустимых значений неизвестного и параметров;

б) для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующие множества решений уравнения. Рассмотрим несколько примеров на полное исследование уравнений первой степени с одним неизвестным.

### Исследование уравнений первой степени с одним неизвестным

Простейшее уравнение первой степени с одним неизвестным имеет вид

$$ax = b.$$

А. При $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$, которое будет:

положительным ($x > 0$), если $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0; \end{cases}$

нулевым ($x = 0$), если $\begin{cases} b = 0, \\ a \neq 0; \end{cases}$

отрицательным ($x < 0$), если $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0. \end{cases}$

Б. Если $a = 0$, то при $b = 0$ уравнение имеет бесчисленное множество решений ($x$ — любое действительное число); при $b \neq 0$ решений не имеет.

Пример 1. Исследовать уравнение

$$\frac{3}{kx - 12} = \frac{1}{3x - k}. \qquad (1)$$

Решение. Допустимыми значениями неизвестного и параметра уравнения будут те значения, при которых

$$kx - 12 \neq 0 \text{ и } 3x - k \neq 0,$$

или

$$kx \neq 12 \text{ и } 3x \neq k.$$

Приведем уравнение (1) к простейшему виду. Для этого умножим обе его части на $(kx - 12)(3x - k) \neq 0$; получим

$$9x - 3k = kx - 12,$$

или

$$(9 - k)x = 3k - 12. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) равносильны, если $kx \neq 12$ и $3x \neq k$ (теорема 3, § 1, гл. 4).

Найдем те значения параметра $k$, при которых уравнения (1) и (2) равносильны, т. е. при которых $kx \neq 12$ или $3x \neq k$.

Для этого выясним, используя уравнение (2), при каких значениях $k$ будет $kx = 12$ или $3x = k$.

Подставив в уравнение (2) $x = \frac{12}{k}$ $(k \neq 0)$, получим $(9 - k)\frac{12}{k} = 3k - 12$, откуда найдем $k = \pm 6$. Если подставим $x = \frac{k}{3}$, также получим $k = \pm 6$.

При $k = 0$ уравнения (1) и (2) равносильны.

Таким образом, при $k \neq \pm 6$ уравнение (1) равносильно уравнению (2) и исследование уравнения (1) можно заменить исследованием уравнения (2).

А. Если $9 - k \neq 0$, то уравнение (2), а вместе с ним и уравнение (1) имеют единственное решение $x = \frac{3k - 12}{9 - k}$, которое будет:

а) положительным, если $\begin{cases} 3k - 12 > 0, \\ 9 - k > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3k - 12 < 0, \\ 9 - k < 0. \end{cases}$

Решая эти системы, находим $4 < k < 9$. С учетом $k \neq \pm 6$, получаем $4 < k < 6$, $6 < k < 9$;

б) нулевым, если $3k - 12 = 0$, или $k = 4$;

в) отрицательным, если $\begin{cases} 3k - 12 < 0, \\ 9 - k > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3k - 12 > 0, \\ 9 - k < 0. \end{cases}$

Решая эти системы, находим $k < 4$ и $k > 9$; учитывая допустимые значения $k \neq \pm 6$, получаем

$$-\infty < k < -6, \quad -6 < k < 4, \quad 9 < k < +\infty.$$

Б. Если $9 - k = 0$, т. е. $k = 9$, то уравнение (2) принимает вид $0 \cdot x = 15$ и решений не имеет.

В. При $k = -6$ уравнение (1) принимает вид

$$\frac{1}{-2x - 4} = \frac{1}{3x + 6},$$

или

$$\frac{-\frac{1}{2}}{x + 2} = \frac{\frac{1}{3}}{x + 2}$$

и решений не имеет.

При $k = 6$ уравнение (1) принимает вид

$$\frac{1}{2x - 4} = \frac{1}{3x - 6},$$

или

$$\frac{\frac{1}{2}}{x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{x-2}$$

и также решений не имеет.

Изобразим результаты исследования графически (рис. 26).

Ответ. а) $x = \frac{3k-12}{9-k}$, если $k \neq \pm 6$ и $k \neq 9$;

причем $x > 0$ при $4 < k < 6$ и $6 < k < 9$;

$x = 0$ при $k = 4$;

$x < 0$ при $-\infty < k < -6$, $-6 < k < 4$, $9 < k < +\infty$;

б) при $k = 9$ или $k = \pm 6$ уравнение не имеет решений.

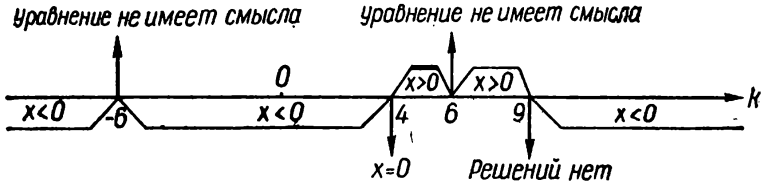



Рис. 26.

Пример 2. Исследовать уравнение

$$\frac{a}{3a+x} = \frac{2}{b+x}. \qquad (1)$$

Допустимыми значениями неизвестного и параметров в данном уравнении будут те значения, при которых $3a + x \neq 0$ и $b + x \neq 0$.

Приведем уравнение (1) к простейшему виду. Умножив обе его части на $(3x + x)(b + x) \neq 0$, получим

$$a(b + x) = 6a + 2x,$$

или

$$(a - 2)x = a(6 - b). \qquad (2)$$

При $3a + x \neq 0$ и $b + x \neq 0$ уравнения (1) и (2) будут равносильными.

Найдем те значения $a$ и $b$, при которых $3a + x = 0$ или $b + x = 0$. Для этого в уравнение (2) подставим последовательно $x = -3a$ и $x = -b$:

$(a - 2)(-3a) = a(6 - b)$, или $a(b - 3a) = 0$, откуда найдем $a = 0$ и $b = 3a$;

$(a - 2)(-b) = a(6 - b)$, или $2b = 6a$, откуда найдем $b = 3a$.

При $a \neq 0$ и $b \neq 3a$ уравнения (1) и (2) равносильны и исследовать уравнение (1) можно с помощью уравнения (2).

Исследование уравнения (2) при $a \neq 0$ и $b \neq 3a$.

А. Если $a - 2 \neq 0$, т. е. $a \neq 2$, уравнение имеет единственное решение $x = \frac{a(6-b)}{a-2}$, которое будет:

а) положительным, если $\begin{cases} a(6-b) > 0, \\ a - 2 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a(6-b) < 0, \\ a - 2 < 0. \end{cases}$

Из систем неравенств находим

$$\begin{cases} a > 2, \\ b < 6, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 2, \\ b > 6. \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ b < 6. \end{cases} \quad (b \neq 3a);$$

б) нулевым, если $a(6 - b) = 0$.
Поскольку $a \neq 0$, то $b = 6$, т. е.

$$\begin{cases} a \neq 2, \\ b = 6; \end{cases}$$

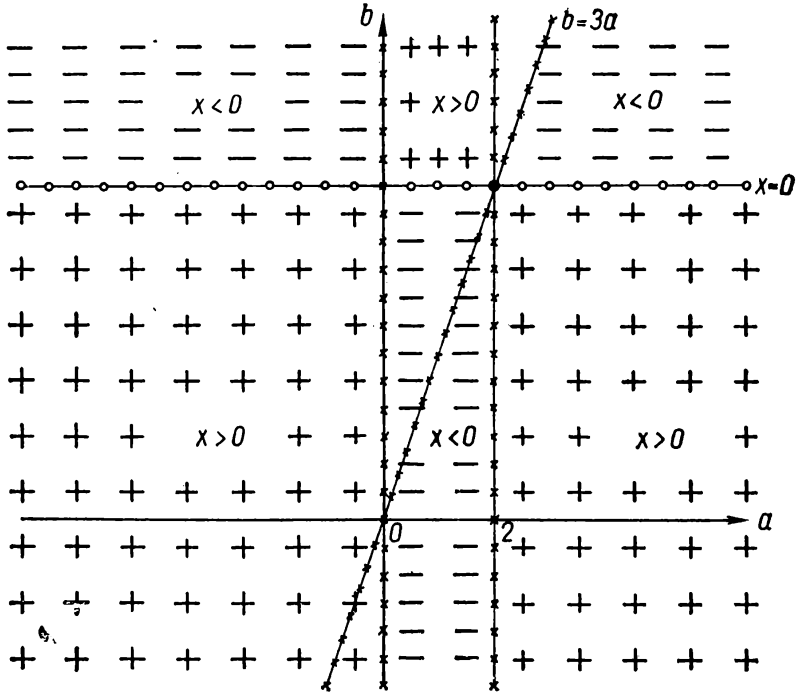



Рис. 27.

в) отрицательным, если $\begin{cases} a(6 - b) > 0, \\ a - 2 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a(6 - b) < 0, \\ a - 2 > 0. \end{cases}$
Из систем неравенств находим

$$\begin{cases} a < 0, \\ b > 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 2, \\ b < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 2, \\ b > 6 \end{cases} \quad (b \neq 3a).$$

Б. Если $a - 2 = 0$, т. е. $a = 2$, то уравнение (2) принимает вид $0 \cdot x = 2(b - 6)$, откуда следует:

а) при $b = 6$, т. е. $\begin{cases} a = 2, \\ b = 6 \end{cases}$ уравнение имеет бесчисленное множество решений;

б) при $b \neq 6$ уравнение решений не имеет. Графическая иллюстрация исследования приведена на рис. 27.

Ответ. а) $x = \dfrac{a(6-b)}{a-2}$, если $a \neq 2$, $a \neq 0$ и $b \neq 3a$;

причем $x > 0$ при $\begin{cases} a < 0, \\ b < 6, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < a < 2, \\ b > 6, \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ b < 6; \end{cases}$

$x = 0$ при $b = 6$;

$x < 0$ при $\begin{cases} a < 0, \\ b > 6, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < a < 2, \\ b < 6, \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ b > 6; \end{cases}$

б) уравнение имеет бесчисленное множество решений, если $\begin{cases} a=2, \\ b=6; \end{cases}$

в) решений нет, если $\begin{cases} a = 2, \\ b \neq 6, \end{cases}$ или $a = 0$, или $\begin{cases} 3a = b, \\ a \neq 2. \end{cases}$

### Исследование квадратных уравнений

Рассмотрим уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0). \tag{1}$$

Обозначим левую часть через $f(x)$, т. е. $f(x) = ax^2 + bx + c$. Если уравнение (1) имеет действительные и различные корни, то $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (x_1 < x_2).$$

Построим «змейку» (рис. 28) для произведения $(x - x_1)(x - x_2)$. Если $a > 0$, то $f(x) < 0$ при $x_1 < x < x_2$ и $f(x) > 0$ при $x < x_1$ и $x > x_2$. Если $a < 0$, то $f(x) < 0$ при $x < x_1$ и $x > x_2$ и $f(x) > 0$ при $x_1 < x < x_2$.

Рис. 28.

Вывод. Если число $x = \alpha$ лежит между корнями квадратного уравнения (1), то левая часть этого уравнения при $x = \alpha$, т. е. $a\alpha^2 + b\alpha + c$ имеет знак, противоположный знаку первого коэффициента $a$; если число $x = \beta$ лежит вне промежутка корней уравнения (1), то левая часть этого уравнения при $x = \beta$, т. е. $a\beta^2 + b\beta + c$ имеет такой же знак, как и первый коэффициент.

Пользуясь описанным выводом, легко определить, как расположено заданное число относительно корней уравнения.

Пример 1. Определить, при каких значениях $a$ оба корня уравнения $x^2 + 2(a-4)x + a^2 + 6a = 0$ положительны.

Решение. Корни квадратного уравнения положительны, если

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0. \end{cases}$$

Для данного уравнения

$$\begin{cases} (a-4)^2 - a^2 - 6a \geqslant 0, \\ -2(a-4) > 0, \\ a^2 + 6a > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a < -6$, $0 < a \leqslant \frac{8}{7}$.

Ответ. $a < -6$ и $0 < a \leqslant \frac{8}{7}$.

Пример 2. Найти действительные значения $a$, при которых корни $x_1$ и $x_2$ уравнения

$$2x^2 - 2(2a+1)x + a(a-1) = 0$$

удовлетворяют условию $x_1 < a < x_2$.

Решение. Корни уравнения должны быть действительными разными, поэтому дискриминант должен быть положительным. Поскольку $a$ находится между корнями уравнения, то произведение первого коэффициента уравнения (коэффициента при $x^2$) на значение левой части уравнения при $x = a$ должно быть отрицательным, т. е. решение задачи сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 4(2a+1)^2 - 8a(a-1) > 0, \\ 2[2a^2 - 2(2a+1)a + a(a-1)] < 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2a^2 + 6a + 1 > 0, \\ a^2 + 3a > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a < -3$ и $a > 0$.

Ответ. $a < -3$ и $a > 0$.

Пример 3. Найти все действительные значения $a$, при которых оба корня уравнения $(2a+3)x^2 + (a+1)x + 4 = 0$ заключены между $-2$ и 0.

Решение. Корни уравнения должны быть действительными, поэтому должно выполняться условие $D \geqslant 0$. Так как требуется, чтобы $-2 < x_1 \leqslant x_2 < 0$, то числа $-2$ и 0 должны находиться вне промежутка корней и, кроме того, полусумма корней $\frac{x_1 + x_2}{2}$ должна находиться между данными числами.

Таким образом, решение задачи сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} (a+1)^2 - 16(2a+3) \geqslant 0, \\ (2a+3)[(2a+3)(-2)^2 + (a+1)(-2) + 4] > 0, \\ (2a+3)[(2a+3) \cdot 0^2 + (a+1) \cdot 0 + 4] > 0, \\ -2 < -\frac{a+1}{2(2a+3)} < 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a^2 - 30a - 47 \geqslant 0, \\ (2a+3)(3a+7) > 0, \\ 2a + 3 > 0, \\ 0 < \frac{a+1}{2a+3} < 4. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, находим $a > 15 + 4\sqrt{17}$.

Ответ. $a > 15 + 4\sqrt{17}$.

Пример 4. Найти, при каких значениях $a$ уравнение $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ имеет один корень меньше 2, а второй — больше 3.

Решение. По условию $x_1 < 2 < 3 < x_2$, т. е. числа 2 и 3 должны находиться между корнями, поэтому решение задачи сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 4(a+3)^2 - 4(a-2) \cdot 4a > 0, \\ (a-2)[(a-2) \cdot 2^2 - 2(a+3) \cdot 2 + 4a] < 0, \\ (a-2)[(a-2) \cdot 3^2 - 2(a+3) \cdot 3 + 4a] < 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3a^2 - 14a - 9 < 0, \\ (a-2)(a-5) < 0, \\ (a-2)\left(a - \frac{36}{7}\right) < 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $2 < a < 5$.

Ответ. $2 < a < 5$.

## § 7. Исследование решений задач на составление уравнений

При решении и исследовании задач на составление уравнений можно придерживаться следующей схемы:

1. **Анализ.** Обозначить одну из неизвестных величин буквой. Установить зависимости между неизвестными и данными величинами по условию задачи. Представить двумя различными (не тождественными) выражениями одну и ту же величину и приравнять эти выражения, т. е. составить уравнение относительно неизвестной величины, обозначенной буквой.

2. **Решение уравнения.** Решить уравнение и записать его корни.

3. **Исследование решения задачи:**

а) установить допустимые значения искомых и данных величин и соотношения между ними по условию задачи;

б) определить, при каких значениях данных величин корни уравнения будут действительными, и установить их знаки;

в) исследовать, какие из корней уравнения пригодны к решению и при каких значениях параметров (данных величин).

4. **Ответ на вопрос задачи.**

Рассмотрим решение двух задач по приведенной схеме.

Задача 1. В совхозном саду посажено $n$ деревьев, расположенных рядами поровну в каждом ряду. Если бы в каждом ряду было посажено на 3 дерева меньше, а число рядов увеличено на 4, то число деревьев в саду осталось бы прежним. Сколько рядов деревьев было в совхозном саду?

Решение. 1. Пусть в саду было $x$ рядов, тогда в каждом ряду было $\frac{n}{x}$ деревьев. Если бы в каждом ряду было посажено на 3 дерева

меньше, то в ряду было бы $\left(\frac{n}{x}-3\right)$ дерева; но тогда рядов было бы $x+4$. По условию задачи число деревьев в саду не изменилось, т. е.

$$\left(\frac{n}{x}-3\right)(x+4)=n.$$

2. После преобразований данное уравнение принимает вид

$$x^2+4x-\frac{4n}{3}=0.$$

Решая его, находим

$$x_1=-2-2\sqrt{1+\frac{n}{3}},\quad x_2=-2+2\sqrt{1+\frac{n}{3}}.$$

3. Исследуем решение:

а) по условию $x$ и $n$ — натуральные числа. Поскольку при уменьшении числа деревьев в каждом ряду на 3 число рядов увеличилось на 4, то $x$ и $n$ — четные натуральные числа, причем $\frac{n}{x}-3$ — натуральное число, т. е. $n>3x$; так как $x\geqslant 2$, то $n\geqslant 6$;

б) поскольку $D=1+\frac{n}{3}>0$, то корни действительны, причем, по теореме Виета, $x_1\cdot x_2=-\frac{4}{3}n<0$, т. е. $x_1<0$, а $x_2>0$;

в) $x_1<0$ к решению задачи непригодно, так как по условию $x$ — натуральное число; $x_2>0$ пригодно к решению задачи, если $n$ — такое натуральное четное число, при котором $x_2$ — также четное натуральное число. Для этого выражение $1+\frac{n}{3}$ должно быть точным квадратом в множестве натуральных чисел.

Обозначим $1+\frac{n}{3}=p^2$, где $p$ — натуральное число; тогда $n=3(p^2-1)$, или $n=3(p-1)(p+1)$.

По условию задачи $n$ — натуральное четное число не меньше 6. Так как $p-1$ и $p+1$ — одновременно четные или нечетные, то при $p$ четном $n$ будет нечетным и, следовательно, не удовлетворяющим решению задачи, а при $p$ нечетном $n$ будет четным.

Обозначим $p=2k+1$; тогда $n=12k(k+1)$. Поскольку $n\geqslant 6$, то $12k(k+1)\geqslant 6$; $k\geqslant 1$, т. е. $k=1, 2, 3, \ldots$.

Таким образом, для решения задачи пригодны значения $n$, определяемые формулой

$$n=12k(k+1),\text{ где } k=1, 2, 3, \ldots$$

4. Ответ. В саду было $-2+2\sqrt{1+\frac{n}{3}}$ рядов, где $n=12k(k+1)$ при $k=1, 2, 3, \ldots$

Задача 2. Две точки $A$ и $B$ движутся по разным сторонам прямого угла к его вершине со скоростями, соответственно равными $a$ и $b$ м/с. В данный момент точки приближаются к вершине угла, причем $A$ находится от нее на расстоянии $m$ сантиметров, а $B$ — на расстоянии $n$ сантиметров. Через сколько секунд после этого момента расстояние между точками станет равным $d$ сантиметрам?

Решение. 1. Для анализа сделаем схематический рисунок (рис. 29). Пусть расстояние между точками $A$ и $B$ через $x$ секунд будет равным $d$ сантиметрам. Тогда точка $A$ за $x$ секунд пройдет расстояние $AA_1 = ax$, а точка $B - BB_1 = bx$; расстояние точки $A$ от вершины составит $A_1O = (m - ax)$, а точки $B - B_1O = (n - bx)$ сантиметров. Из прямоугольного треугольника $A_1OB_1$, по теореме Пифагора, находим

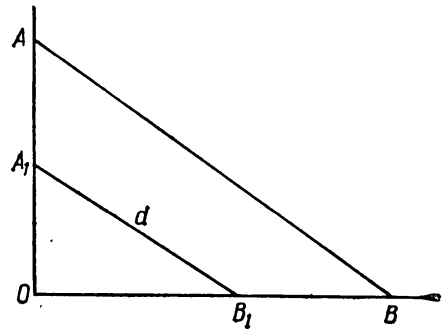


Рис. 29.

$$(m - ax)^2 + (n - bx)^2 = d^2.$$

2. После преобразований составленное уравнение принимает вид

$$(a^2 + b^2)\, x^2 - 2\,(am + bn)\, x + m^2 + n^2 - d^2 = 0.$$

Решив последнее уравнение, получим

$$x_1 = \frac{am + bn - \sqrt{(am + bn)^2 - (a^2 + b^2)\,(m^2 + n^2 - d^2)}}{a^2 + b^2};$$

$$x_2 = \frac{am + bn + \sqrt{(am + bn)^2 - (a^2 + b^2)\,(m^2 + n^2 - d^2)}}{a^2 + b^2}.$$

3. Исследуем решение:

а) по условию задачи $a > 0$, $b > 0$, $m > 0$, $n > 0$, $d > 0$, $x \geqslant 0$, причем $ax \leqslant m$, $bx \leqslant n$ и $d^2 \leqslant m^2 + n^2$;

б) корни уравнения $x_1$ и $x_2$ действительны при

$$D = (am + bn)^2 - (a^2 + b^2)\,(m^2 + n^2 - d^2) \geqslant 0, \text{ или}$$

$$(a^2 + b^2)\, d^2 - (an - bm)^2 \geqslant 0,$$

т. е. если параметры задачи подобраны так, чтобы удовлетворять последнему неравенству.

Определим знаки корней. По теореме Виета,

$$x_1 + x_2 = \frac{2\,(am + bn)}{a^2 + b^2} > 0,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 + n^2 - d^2}{a^2 + b^2} \geqslant 0,$$

т. е. либо оба корня положительны, либо $x_1 = 0$, $x_2 > 0$ при $m^2 + n^2 - d^2 = 0$;

в) к решению задачи пригодны корни, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} ax \leqslant m, \\ bx \leqslant n. \end{cases}$$

Для удобства сравнения корней со значениями $x$, удовлетворяющими этой системе, умножим неравенства системы соответственно на $a > 0$ и $b > 0$ и сложим их; получим

$$(a^2 + b^2)\, x \leqslant am + bn,$$

или

$$x \leqslant \frac{am + bn}{a^2 + b^2}.$$

Сравнивая $x_1$ и $x_2$ с выражением $\frac{am + bn}{a^2 + b^2}$, делаем вывод, что $x_1 < \frac{am + bn}{a^2 + b^2}$ пригодно к решению задачи, а $x_2 > \frac{am + bn}{a^2 + b^2}$ не удовлетворяет условию.

4. Ответ. Расстояние между точками $A$ и $B$ будет равным $d$ через

$$\frac{am + bn - \sqrt{(am + bn)^2 - (a^2 + b^2)\,(m^2 + n^2 - d^2)}}{a^2 + b^2} \quad \text{(c)}$$

### Упражнения

Доказать неравенства:

201. $a^3 + b^3 + c^3 > \frac{3}{8}(a + b)(a + c)(b + c)$, где $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

202. $\frac{a^2 + 5}{\sqrt{a^2 + 4}} \geqslant 2{,}5$*.

203. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}}$ ($a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$).

204. $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$, где $n$—натуральное число.

205. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

206. $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 9abc$ ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$).

207. Показать, что $am + bn + cp \leqslant 1$ при $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ и $m^2 + n^2 + p^2 = 1$.

208. Доказать, что $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc\,(a + b + c)$.

209. Доказать, что если $a + b \geqslant 0$, то $4(a^3 + b^3) \geqslant (a + b)^3$.

210. Доказать, что $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdots \frac{4n - 1}{4n + 1} < \sqrt{\frac{3}{4n + 3}}$, где $n$ — натуральное число.

Решить неравенства ($x \in R$):

211. $x + \frac{6}{x} < 7$.

---

* При доказательстве нестрогих неравенств ($\geqslant$ или $\leqslant$) читателю предлагается выяснить условие равенства.

212. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 \leqslant 0$.

213. $\dfrac{x^2 + 2x - 63}{x^2 - 8x + 7} > 7$.

214. $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{7}{x+2} < \dfrac{6}{x-1}$.

215. $\dfrac{3}{6x^2 - x - 12} + \dfrac{3}{3x+4} < \dfrac{25x - 47}{10x - 15}$.

216. $|x+1| + |x-1| < 3x - 5$.

217. $\dfrac{|x-1|}{x+2} + x - 3 > \dfrac{1}{x+2}$.

218. $|x^2 - 5x| < 6$.

219. $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$.

220. $\sqrt{x^2 + 4x + 4} < x + 6$.

221. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3$.

222. $(1 + x)\sqrt{x^2 + 1} > x^2 - 1$.

223. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} > \sqrt{2x+4}$.

224. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

225. $\dfrac{6x}{x-2} - \sqrt{\dfrac{12x}{x-2}} > 2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}$.

Решить системы неравенств ($x \in R$):

226. $\begin{cases} 2 - \dfrac{5+x}{7} < 1 - \dfrac{9-x}{14}, \\ 12 - \dfrac{1}{3}\left(47 - \dfrac{60}{x}\right) < 3. \end{cases}$

227. $\begin{cases} |x+4| < 9, \\ \dfrac{5x-2}{x+6} > 1. \end{cases}$

228. $\begin{cases} \left|\dfrac{x^2 - 1}{x+2}\right| < 1, \\ \dfrac{4}{x-2} < 0. \end{cases}$

229. $\sqrt{x^2 - 9x + 20} \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x^2 - 13}$

230. $\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} > 4. \end{cases}$

231. Определить значения $k$, при которых корни уравнения $\dfrac{3}{8x - k} = \dfrac{1}{kx - 2}$ положительны.

232. Определить, при каких значениях $m$ система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ 5x + my = 2 \end{cases}$$

имеет отрицательные решения, т. е. $x < 0$ и $y < 0$.

233. Определить, при каких значениях $a$ уравнение $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ имеет только положительные решения.

234. Для каких значений $m$ уравнение $4x^2 - 2x + m = 0$ имеет корни, заключенные между $-1$ и $1$?

235. Для каких значений $a$ один из корней уравнения $x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a + 3 = 0$ меньше 1, а второй — больше 2?

Решить задачи и исследовать их решения.

236. В одном городе $a$ жителей, а в другом городе $b$ жителей. Население первого города ежегодно увеличивается на $m$ человек, а население второго города ежегодно увеличивается на $n$ человек. Через сколько лет количество жителей в обоих городах будет одинаковым?

237. Два куска латуни весят $a$ килограммов. В первом куске содержится $p$ процентов чистой меди, во втором $q$ процентов, причем в первом куске чистой меди на $b$ килограммов больше, чем во втором. Сколько весит каждый кусок?

238. Из пункта $A$ на берегу озера в пункт $B$, расположенный на берегу реки, впадающей в это озеро, вышел катер. Катер прибыл к месту назначения через $t$ часов, пройдя по озеру $a$ километров, а по реке половину этого расстояния. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки $b$ км/ч.

239. Тело $A$ движется по прямой линии от точки $M$ к точке $N$ со скоростью $a$ м/с; когда оно прошло $c$ метров, из $N$ начало двигаться тело $B$. Последнее, покрывая в секунду $\frac{1}{k}$ расстояния $MN$, встретилось с $A$ по прошествии стольких секунд, сколько метров в секунду проходит тело $B$. Определить расстояние $MN$.

240. Выгрузка $a$ тонн зерна была поручена нескольким рабочим. Так как на работу явилось на $b$ рабочих больше, то каждому пришлось выгрузить на $c$ тонн меньше. Сколько рабочих работало на выгрузке зерна?

# Глава 7

# НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИЯХ

## § 1. Понятие функции, область определения и способы ее задания

**Переменные и постоянные величины.** При изучении различных явлений природы приходится рассматривать самые разнообразные величины: длину, площадь, объем, температуру, массу, вес, напряжение тока, работу, время и др. Рассматриваемые величины могут принимать различные численные значения или принимать одно определенное значение.

*Постоянной величиной* называется всякая величина, принимающая в данном рассмотрении одно и то же численное значение.

*Переменной величиной* называется всякая величина, принимающая в данном рассмотрении различные численные значения.

Постоянную величину рассматривают как частный случай переменной величины, т. е. постоянной величиной называют такую переменную величину, все значения которой равны.

Величины, постоянные при одном рассмотрении, могут в другом рассмотрении принимать другое значение или быть переменными. Такие величины называются параметрами или характеристиками данного процесса.

Если рассматривается сжатие определенной порции газа при постоянной температуре, то объем и давление газа будут величинами переменными, а температура и газовая постоянная будут параметрами. Если же эта порция газа рассматривается при постоянном объеме (в определенном сосуде), при различных значениях температуры, то переменными величинами будут температура и давление, а постоянными — объем и газовая постоянная. Величины, которые принимают одно и то же численное значение, независимо от условий их рассмотрения, называются абсолютными постоянными. Например, отношение длины окружности к ее диаметру всегда равно $\pi$. Число $\pi$ — абсолютная постоянная.

Среди переменных величин встречаются зависимые и независимые. Если в некотором рассмотрении участвует несколько переменных величин, связанных между собой так, что изменение одних величин влечет за собой изменение других, то говорят, что между этими величинами существует функциональная зависимость.

Совокупность тех численных значений, которые может принимать данная переменная величина, называют областью изменения этой величины.

Переменная величина, принимающая сплошь все действительные численные значения или все численные значения, заключенные между некоторыми числами, называется непрерывной. Переменная величина, которая принимает только отдельные численные значения, называется дискретной.

Переменная величина может не принадлежать ни к непрерывным, ни к дискретным величинам. Такую переменную величину будем называть смешанной.

Например: а) если величина $x$ принимает все значения от 1 до 5, т. е. $1 \leqslant x \leqslant 5$, то она непрерывная;

б) если переменная величина $x_n = n$, где $n$ — натуральное число, т. е. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, ... , то $x_n$ есть дискретная величина;

в) переменная величина $x$, принимающая значения $1 < x \leqslant 2$, $x = 3$, $4 \leqslant x < 5$, $x = 6$, $x = 7$, $8 < x < 10$ и т. д есть смешанная переменная величина.

Областью изменения непрерывной величины служит интервал или совокупность нескольких интервалов.

Конечным интервалом называется совокупность всех чисел, заключенных между данными числами $a$ и $b$ $(a < b)$. которые называются концами данного интервала.

Если концы интервала причисляются к самому интервалу, то его называют замкнутым интервалом или отрезком (сегментом). Тогда числа $x$, принадлежащие замкнутому интервалу, записывают так:

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ или } x \in [a; b].$$

Если концы $a$ и $b$ не принадлежат данному интервалу, то его называют открытым интервалом или промежутком.

Если число $x$ принадлежит открытому интервалу, то это записывают:

$$a < x < b \text{ или } x \in (a, b).$$

Если один из концов интервала принадлежит к интервалу, а второй нет, то интервал называется полуоткрытым.

Если число $x$ принадлежит полуоткрытому интервалу, то это записывают так:

$$a < x \leqslant b \text{ или } x \in (a, b];$$
$$a \leqslant x < b \text{ или } x \in [a, b).$$

Интервалы могут быть бесконечными с одной стороны или с двух сторон.

Если величина $x$ может принимать любые значения, бо́льшие числа $a$ (включая или исключая $a$), то записывают это так:

$$a \leqslant x < +\infty \text{ или } x \in [a, +\infty);$$
$$a < x < +\infty \text{ или } x \in (a, +\infty).$$

Указанные интервалы не имеют правого конца.

Если величина $x$ может принимать любые действительные значения, меньшие числа $b$ (включая или исключая $b$), то это записывают:

$$-\infty < x \leqslant b \text{ или } x \in (-\infty, b];$$
$$-\infty < x < b \text{ или } x \in (-\infty, b).$$

Если величина $x$ может принимать любые действительные значения, то область ее изменения записывают так:

$$-\infty < x < +\infty$$

или

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

Введенные здесь символы $-\infty$ и $+\infty$ означают, что величина $x$ может соответственно принимать какие угодно большие по абсолютной

величине отрицательные и положительные значения (эти символы никаких чисел не обозначают). Символ $-\infty$ геометрически означает, что в интервале нет левого конца, а символ $+\infty$, что в интервале нет правого конца, т. е. что интервалы не ограничены.

Областью изменения дискретной величины служит множество конечного или бесконечного числа отдельных чисел.

Областью изменения смешанной величины служит множество интервалов и отдельных чисел.

Если переменная величина в некотором процессе меняется все время в одном направлении, т. е. все время возрастает или все время убывает, то она называется монотонной.

Переменная величина называется ограниченной сверху (справа), если в процессе своего изменения она все время остается меньше некоторой постоянной величины, и ограниченной снизу (слева), если в процессе изменения она остается больше некоторой постоянной величины. Если величина ограничена сверху и снизу, то она называется ограниченной.

Например, если область изменения непрерывной переменной величины задана интервалом $-\infty < x < b$, то она ограничена сверху; если $a \leqslant x < +\infty$, то $x$ ограничена снизу; если $a < x \leqslant b$, то $x$ — ограниченная.

**Функция и область ее определения.** Величина $y$ называется *функцией переменной величины* $x$, если каждому значению переменной $x$ из указанной ее области изменения $D$ соответствует одно или несколько определенных значений $y$. Записывают это так: $y = f(x)$. Величину $x$ при этом называют независимой переменной или аргументом.

Если каждому значению $x$ соответствует одно определенное значение $y$, то функцию $y$ называют *однозначной*,

Если аргумент $x$ может принимать только значения действительных чисел, то функция $y$ называется функцией действительной переменной $x$. Здесь будем рассматривать только функции действительной переменной и в дальнейшем термин «действительной» будем опускать.

Если же каждому значению $x$ соответствует несколько определенных значений $y$ (два, три и т. д.), то функцию $y$ называют *многозначной* (двузначной, трехзначной и т. д.)*.

Буква $f$, входящая в равенство $y = f(x)$, в отличие от букв $x$ и $y$, обозначает не переменную величину, а то правило** (закон), по которому устанавливается соответствие между $x$ и $y$. В частности, буква $f$ может обозначать совокупность математических операций, которые нужно произвести над аргументом $x$, чтобы получить соответствующее значение $y$, и указывать последовательность их выполнения. Символ $f$ называют характеристикой функции. Буква $f$ может обозначать не только математические операции и последовательность их выполнения, а и правило, сформулированное любым способом (словами, таблицей, графиком и т. д.), по которому каждому значению $x$ можно найти соответствующее значение $y$.

Если функция $y$ задана формулой $y = x^2 - 3x$, то роль $f$ здесь играет предложение: «Чтобы получить значение $y$, зная значение $x$, нужно из квадрата числа $x$ вычесть утроенное это число».

---

* В настоящее время понятие однозначной и многозначной функции не везде употребляется. Говорят, что имеется не многозначная функция, а несколько различных функций

** В математике под функцией понимают также правило (закон), по которому каждому значению $x$ соответствует определенное значение $y$. Если это правило задано, то задана функция.

Если функция $y$ задана уравнением $y=\sqrt{x}+x^2$, то роль $f$ здесь играет предложение: «Чтобы получить значение $y$, зная значение $x$, нужно найти сумму корня квадратного из числа $x$ и квадрата числа $x$».

Символ $f$ может употребляться и для обозначения неизвестной функции. Если рассматривается несколько различных неизвестных функций, то их характеристики обозначают различными буквами.

*Областью определения (существования) функции* $y$ называется совокупность значений независимой переменной $x$, при которых эта функция определена, т. е. область изменения независимой переменной (аргумента).

Если область определения функции $y$ (область изменения аргумента $x$) непрерывна, то $y$ называют функцией непрерывного аргумента.

Если область определения функции дискретна, то функцию называют функцией дискретного аргумента.

*Областью изменения функции* называется совокупность значений функции, которые она принимает при всех значениях аргумента из области ее определения.

Функция $y$ от аргумента $x$ считается заданной (определенной), если указана область определения функции (значения, которые может принимать переменная $x$) и указано, по какому правилу $f$ для каждого значения $x$ можно найти соответствующее значение функции $y=f(x)$.

Пусть функция $y=x^2$ задана на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$. Тогда область ее определения есть этот отрезок [0; 1], а вне отрезка функция не определена; например, при $x=2$ или $x=-1$ не известно, чему равна эта функция, т. е. она при этих значениях $x$ не определена.

Если функция задана аналитически и область ее определения не указана (не задана), то под областью определения функции понимают совокупность всех тех значений аргумента, при которых аналитическое выражение имеет числовой смысл. Поэтому, если функция задана аналитически, то можно ставить задачу нахождения ее области определения.

Пример 1. Найти область определения функции $y=x^2-3x+1$.

Решение. Так как правая часть равенства имеет числовой смысл при всех действительных значениях $x$, то функция определена при всех действительных значениях $x$.

Ответ. $-\infty<x<+\infty$.

Пример 2. Найти область определения функции

$$y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}.$$

Так как правая часть равенства имеет числовой смысл, если $x\neq -2$ и $x\neq 1$, то область определения функции состоит из трех промежутков $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ и $(1; +\infty)$.

Ответ. $-\infty<x<-2$, $-2<x<1$, $1<x<+\infty$.

Пример 3. Найти область определения функции $y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{9-x^2}$.

Решение. Уравнение, которым задана функция, имеет числовой смысл при значениях $x$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ 9-x^2\geqslant 0; \end{cases}$$

решая эту систему, находим $-3\leqslant x\leqslant -1$, $1\leqslant x\leqslant 3$.

Ответ. $[-3; -1]$ и $[1; 3]$.

**Способы задания функции.** Соответствие (закон соответствия) между величинами $x$ и $y$ можно задать самыми разнообразными способами. Наиболее распространенными способами задания функции являются следующие:

1. Аналитический способ задания функции (с помощью формулы или аналитического выражения).

Например:

$$y = x^3 + 1; \quad y = \sqrt{x}; \quad y = \frac{x}{x^2 + 1}; \quad y = |x|;$$

$$y = \begin{cases} x \text{ при } x < 1, \\ x^2 - 2 \text{ при } x \geqslant 1. \end{cases}$$

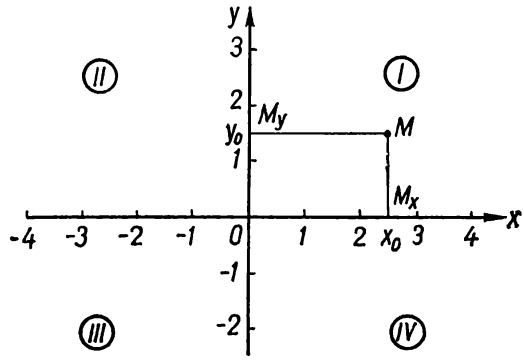



Рис. 30.

*Аналитическим выражением* называется символически записанная совокупность известных математических операций над постоянными числами и переменными величинами.

2. Табличный способ. Значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ независимой переменной $x$, для которых определена функция, выписываются в определенном порядке, рядом с ними указываются соответствующие им значения функции $y$: $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$. Это записывают по форме:

$$\begin{array}{cccccc} x & x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \\ y & y_1 & y_2 & \ldots & y_{n-1} & y_n. \end{array}$$

Например: таблицы квадратов, кубов, синусов, логарифмов.

3. Графический способ (задание функции графически). Для построения графиков используются различные системы координат. Наиболее распространена прямоугольная система координат.

Если указан способ, с помощью которого положение точки плоскости можно установить численно, то говорят, что задана система координат.

Для определения положения точки на плоскости выберем прямоугольную систему координат, т. е. две взаимно перпендикулярные числовые оси $Ox$ и $Oy$ (рис. 30). Ось $Ox$ называется осью абсцисс, а $Oy$ — осью ординат; точку их пересечения $O$ называют началом координат.

Пусть в координатной плоскости $xOy$ дана точка $M$. Опустим перпендикуляры из точки $M$ на координатные оси: $MM_x \perp Ox$ и $MM_y \perp Oy$. Алгебраические величины $\overline{MM_y} = x_0$ и $\overline{MM_x} = y_0$ называются соответственно абсциссой и ординатой точки $M$ (абсцисса — обособленная; ордината — упорядоченная). Записывают это так: $M(x_0, y_0)$. Абсцисса $x_0$ и ордината $y_0$ называются координатами точки $M$.

Координатная плоскость делится координатными осями на четыре прямых угла, называемых координатными углами или квадрантами. Порядок нумерации квадрантов показан на рис. 30. Координаты точек плоскости имеют следующие знаки:

| | | |
|---|---|---|
| в | I квадранте | $x > 0,\ y > 0,$ |
| » | II » | $x < 0,\ y > 0,$ |
| » | III » | $x < 0,\ y < 0,$ |
| » | IV » | $x > 0,\ y < 0.$ |

Метод координат позволяет решить две основные задачи.

А. Дана пара упорядоченных чисел $(x_0, y_0)$. Найти определяемую ими точку плоскости.

Б. Дана точка плоскости. Найти пару чисел $(x_0, y_0)$ — координаты этой точки.

Графиком данной функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости $xOy$, абсциссами которых являются значения аргумента $x$, а ординатами — соответствующие значения $y = f(x)$.

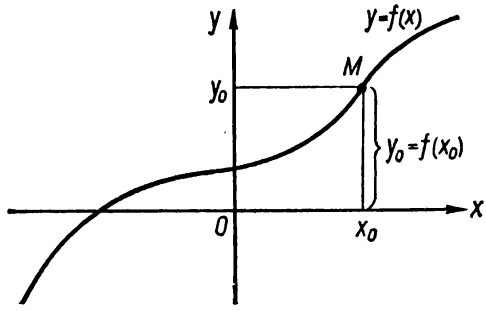



Рис. 31.

Другими словами, графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек координатной плоскости $xOy$, координаты которых удовлетворяют функциональной зависимости $y = f(x)$. Функция считается заданной графически, если начерчен ее график (рис. 31).

Чтобы найти значение $y_0 = f(x_0)$ заданной графически функции $y = f(x)$, соответствующее значению аргумента $x_0$, надо на оси абсцисс найти точку $x_0$ и из нее восставить перпендикуляр до пересечения с графиком функции в точке $M$ (рис. 31); затем из точки $M$ опустить перпендикуляр на ось $Oy$. Основание этого перпендикуляра соответствует числу $y_0$, которое и будет значением данной функции при значении аргумента $x_0$.

Одна и та же функция может быть задана различными способами. Рассмотренные способы задания функций обладают преимуществами и недостатками. Так, в случае аналитического способа задания

функции можно вычислить значение функции при любом значении аргумента из области определения функции, удобно над функцией производить различные исследования, определять ее свойства и т. д. Недостатками аналитического способа задания функции является отсутствие наглядности, громоздкость вычислений значений функции (если выражение, которым задана функция, громоздко). Табличный способ задания функции хорош тем, что для нахождения значений функции никаких вычислений производить не надо, но таблица дает только некоторые значения функции — это его недостаток. Графический способ задания функции нагляден; из графика легко прочитать характер изменения функции, поэтому он часто применяется в экспериментальных исследованиях характера изменения различных величин. Его основной недостаток — приближенность — небольшая степень точности определения значения функции по значению аргумента. Поэтому, как правило, при изучении функциональных зависимостей между величинами пользуются всеми способами. Построение графиков — важное средство изучения функций, заданных аналитически и таблично.

## § 2. Элементарные функции, их классификация и основные характеристики

Функции классифицируются по их аналитическому заданию, в зависимости от характера операций, которые надо произвести над аргументом, чтобы получить значение функции.

*Функция называется алгебраической*, если ее связь с аргументом может быть выражена с помощью уравнения $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен относительно $x$ и $y$.

Если функция задана формулой, содержащей конечное число только алгебраических действий, то она алгебраическая. Всякая неалгебраическая функция называется трансцендентной.

Например: $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3 + 1$ — алгебраические функции, а $y = \sin x$, $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$, $y = \lg x$, $y = 2^x$, $y = x^{\sqrt{3}}$ — трансцендентные функции.

Алгебраические функции могут быть рациональные и иррациональные.

Рациональной алгебраической функцией называется функция, заданная аналитически с помощью рационального алгебраического выражения. Другими словами, функция $y = f(x)$ называется рациональной алгебраической, если $f(x)$ есть рациональное алгебраическое выражение относительно $x$.

Иррациональной алгебраической функцией называется функция, заданная аналитически с помощью иррационального алгебраического выражения, т. е. функция $y = f(x)$ есть иррациональная, если $f(x)$ — иррациональное алгебраическое выражение относительно $x$.

Рациональные алгебраические и иррациональные алгебраические функции называют рациональными и иррациональными функциями (не добавляя слова «алгебраические»).

Например: $y = x^2 + 1$, $y = \dfrac{x+1}{x^2-1}$, $y = \dfrac{1}{x}$ — рациональные функции, а $y = \sqrt{x}$, $y = x^2 + \sqrt[3]{x} - 1$ — иррациональные функции.

Рациональные функции делятся на целые рациональные и дробные рациональные. Если аналитическое выражение содержит только

действия сложения, вычитания и умножения (в том числе возведения в натуральную степень), то такая функция называется целой рациональной функцией или многочленом. Например: $y=\frac{1}{2}x^2$; $y=5x^3-$ $-3x^2+6x-1$; $y=\sqrt{2}x^3-\frac{1}{3}x$; $y=\pi x^5$.

Если аналитическое выражение содержит рациональные действия, среди которых есть деление на выражение, содержащее аргумент, то такую функцию называют дробно-рациональной. Например: $y=x+\frac{1}{x}$; $y=x^2+3x-\frac{x-1}{x+1}$; $y=\frac{x+\sqrt{3}}{x^3+x+1}$.

Всякую целую рациональную функцию можно представить в виде

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0), \tag{7.1}$$

а дробно-рациональную функцию можно представить в виде отношения двух многочленов (целых рациональных функций):

$$y=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}. \tag{7.2}$$

**Основные элементарные функции.** К ним относятся:

1. $y=x^a$ (при постоянном $a$) — степенная функция;

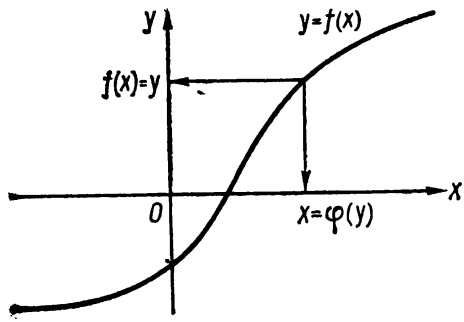



Рис. 32.

2. $y=a^x$ (при $a>0$, $a\neq 1$) — показательная (экспоненциальная) функция;

3. $y=\log_a x$ (при $a>0$, $a\neq 1$) — логарифмическая функция;

4. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$, $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec}x$ — тригонометрические функции;

5. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arcctg}x$, $y=\operatorname{arcsec}x$, $y=\operatorname{arccosec}x$ — обратные тригонометрические функции.

**Сложная функция** (функция от функции). Если функция $y$ от $x$ задана так, что $y=F(u)$, где $u=\varphi(x)$, т. е. $y=F[\varphi(x)]$, то $y$ называют сложной функцией от $x$. Функция $y$ зависит от переменной $u$, которая в свою очередь зависит от $x$. Переменная $u$ называется промежуточным аргументом, а независимая переменная $x$ — окончательным аргументом.

Функция $F(u)$ называется внешней функцией, $\varphi(x)$ — внутренней, $=F[\varphi(x)]$ — сложной.

Сложная функция может быть составлена из нескольких функций, т. е. содержать несколько промежуточных переменных.

Например: а) $y=u^2$, где $u=\sin x$. Тогда $y=\sin^2 x$; б) $y=\sqrt{u}$, где $u=\lg v$, а $v=\operatorname{tg}x$. Тогда $y=\sqrt{\lg\operatorname{tg}x}$.

*Элементарной функцией* называется всякая функция, которая получается из основных элементарных функций с помощью конечного

числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

**Обратные функции.** Пусть задана функция $y = f(x)$, т. е. пусть каждому значению переменной $x$ соответствует определенное значение функции $y$ из ее области определения. Если принять зависимую переменную (функцию) $y$ за аргумент, а независимую переменную $x$ за функцию, то *полученная функция* $x = \varphi(y)$ называется *обратной по отношению к функции* $y = f(x)$.

Функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ выражают одну и ту же зависимость между величинами $x$ и $y$.

Графиками этих функций является одна и та же линия (рис. 32).

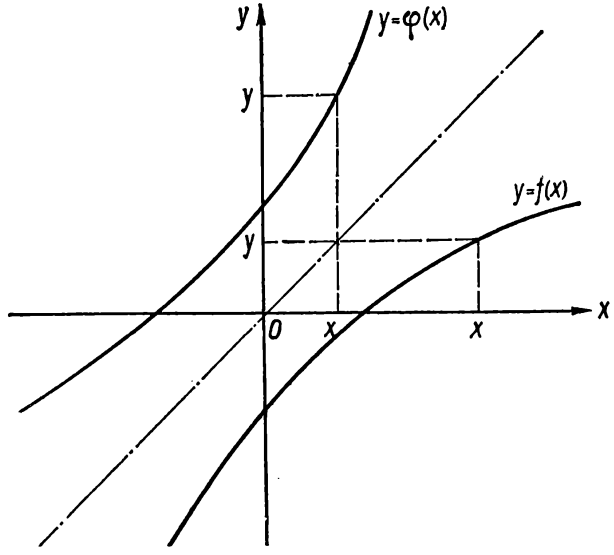



Рис. 33.

Если обратную функцию $(x)$ обозначить буквой $y$, а ее аргумент $(y)$ обозначить буквой $x$, то получим $y = \varphi(x)$. При таком обозначении область определения прямой функции $y = f(x)$ есть область изменения обратной ей функции $y = \varphi(x)$ и наоборот. Графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 33).

Чтобы найти в явном виде функцию, обратную данной, достаточно поменять ролями (местами) буквы, обозначающие функцию и аргумент, и решить полученное уравнение (если оно разрешимо) относительно буквы, обозначающей функцию.

Пример. Найти функцию, обратную функции $y = \dfrac{x-1}{3}$.

Решение. Поменяем ролями функцию и аргумент; получим

$$x = \frac{y-1}{3},$$

откуда найдем $y = 3x + 1$ — функцию, обратную данной.

Ответ. $y = 3x + 1$.

Обратная функция однозначна, если исходная функция монотонна в области ее определения.

**Явные и неявные функции.** Функция называется явной или явно заданной, если она задана аналитически уравнением, решенным относительно функции. Если функция $y$ от аргумента $x$ задана явно, то в общем виде пишут $y = f(x)$.

Функция называется неявно заданной или неявной, если ее связь с аргументом задана с помощью уравнения, не решенного относительно функции. Если функция $y$ от аргумента $x$ задана неявно, то в общем виде пишут $F(x, y) = 0$.

Например, функции $y = 3x + 1$, $y = x^2 + 5x$, $y = \dfrac{x+2}{x^2}$ и $y = \sin x$ — явно заданные (явные) функции; функции $3x - y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 4$, $xy = 5$ — неявно заданные (неявные) функции.

Если функция задана неявно, то иногда можно получить ее явное задание. Это можно сделать тогда, когда уравнение, связывающее аргумент и функцию, удается решить относительно функции.

Пример. Функция задана неявно $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Найти ее явное задание.

Решение. Находим $y$ из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1:$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ответ. $y = \pm \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

**Ограниченные функции.** Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на отрезке $[a, b]$, если можно указать такое положительное число $M$, что при всех значениях аргумента из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$, где $M$ — положительное число.

График ограниченной функции заключен между прямыми $y = -M$ и $y = M$ (рис. 34).

Из основных элементарных функций ограниченными являются $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{arcsec} x$, $\operatorname{arccosec} x$.

Например: $|\sin x| \leqslant 1$, $|\operatorname{arctg} x| < \dfrac{\pi}{2}$.

**Возрастающие и убывающие функции.** Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на отрезке $[a, b]$, если для любых $x_1$ и $x_2$, удовлетворяющих условию $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Если из условия $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется убывающей на отрезке $[a, b]$.

Аналогично определяются возрастающие и убывающие функции в промежутке или полуоткрытом интервале (конечных или бесконечных).

Функция $y = f(x)$ называется неубывающей на отрезке $[a, b]$, если из неравенств $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ следует неравенство $f_1(x) \leqslant f_2(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется невозрастающей на отрезке $[a, b]$, если из неравенств $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ следует неравенство $f_1(x) \geqslant f_2(x)$.

Возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие функции называются монотонными функциями.

Для монотонных функций употребляются также и другие названия: возрастающая функция — строго возрастающая, убывающая — строго убывающая, неубывающая — возрастающая, невозрастающая — убывающая. Строго возрастающие и строго убывающие функции называют строго монотонными, а возрастающие, строго возрастающие, убывающие и строго убывающие — монотонными.

На рис. 35, *а*, *б*, *в*, *г* показаны соответственно графики возрастающей, убывающей, неубывающей и невозрастающей функций.

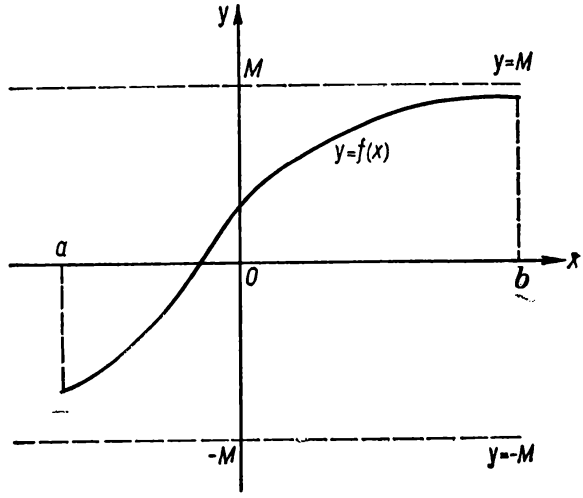



Рис. 34.

Пример. Доказать, что функция $y = x^3$ возрастает при $-\infty < x < +\infty$.

Доказательство. Функция определена при всех действительных значениях $x$. Возьмем любые два значения аргумента $x_1$ и $x_2$, причем $x_1 < x_2$. Найдем $y_1 = x_1^3$ и $y_2 = x_2^3$ и вычислим разность $y_1 - y_2 = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right)$. Поскольку $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right] > 0$ при любых действительных значениях $x$, а $x_1 - x_2 < 0$ (по условию $x_1 < x_2$), то разность $y_1 - y_2 < 0$, т. е. $y_1 < y_2$. Это значит, что функция возрастает.

Для нахождения интервалов монотонности функции $y = f(x)$ можно воспользоваться тем, что исходная функция будет монотонной на тех интервалах, на которых ее обратная функция будет однозначной.

Если функция $y = f(x)$ задана уравнением, разрешимым относительно $x$, т. е. из этого уравнения можно найти $x = \varphi(y)$, и если при этом $x = \varphi(y)$ однозначна, то функция $y = f(x)$ в области определения монотонна (для определения характера монотонности достаточно сравнить между собой $f(x_1) \vee f(x_2)$, где $x_1 < x_2$. Символ «$\vee$»

означает, что пока неизвестно, какая из частей неравенства больше). Если же функция $x = \varphi(y)$ не однозначна, то область определения функции $y = f(x)$ надо разбить на интервалы однозначности функции $x = \varphi(y)$, тогда на каждом из таких интервалов функция $y = f(x)$ будет монотонной.

Пример 1. Найти интервалы монотонности функции $y = x^2$.

Решение. Решая уравнение, которым задана функция, относительно $x$, получим $x = \pm\sqrt{y}$ при $y \geqslant 0$.

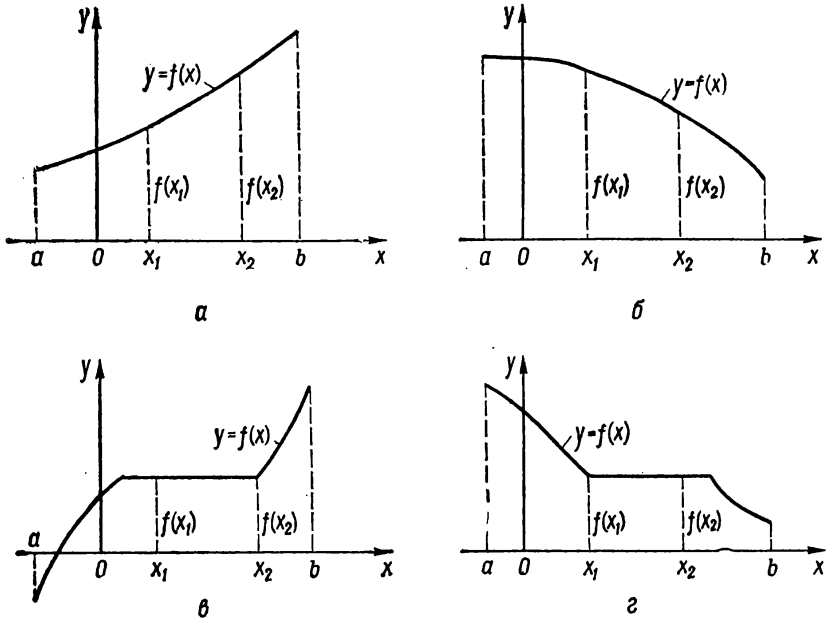



Рис. 35.

Обратная функция двузначна, т. е. $x = -\sqrt{y}$ и $x = \sqrt{y}$. Областью определения этой двузначной функции является интервал $0 \leqslant y < +\infty$. Из $x = -\sqrt{y}$ значениям $0 \leqslant y < +\infty$ соответствуют значения $-\infty < x \leqslant 0$, а из $x = +\sqrt{y}$ значениям $0 \leqslant y < +\infty$ соответствуют значения $0 \leqslant x < +\infty$.

Таким образом, функция $y = x^2$ имеет два интервала монотонности: $-\infty < x \leqslant 0$ и $0 \leqslant x < +\infty$.

Определим характер монотонности функции на интервале $(-\infty, 0]$. Для этого сравним значения функции в точках $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$ $(x_1 < x_2)$, принадлежащих этому интервалу: $x_1^2 = 9$, $x_2^2 = 1$; значит,

$$x_1^2 > x_2^2, \text{ т. е. на интервале } (-\infty, 0]$$

функция убывает.

Определим характер монотонности функции на интервале $[0, +\infty)$. Для этого сравним значения функции в точках $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$

($x_1 < x_2$), принадлежащих этому интервалу: $x_1^2 = 4$, $x_2^2 = 9$; значит,

$$x_1^2 < x_2^2,$$ т. е. на интервале $(0, +\infty)$

функция возрастает.

Ответ. Функция $y = x^2$ на интервале $(-\infty, 0]$ убывает, а на интервале $[0, +\infty)$ возрастает.

Пример 2. Найти интервалы монотонности функции

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Решение. Решая относительно $x$, получим: $yx^2 - x + y = 0$, или $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$ при $y \neq 0$. Заметим, что $x = 0$ при $y = 0$.

Область определения обратной функции: $1 - 4y^2 \geqslant 0$; отсюда найдем

$$-\frac{1}{2} \leqslant y < 0 \text{ и } 0 < y \leqslant \frac{1}{2}.$$

Обратная функция двузначна, т. е. каждому значению $y$ из ее области определения соответствует два значения $x$:

$$\text{а) } x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y^2}}{2y} \text{ и б) } x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}.$$

Значениям $-\frac{1}{2} \leqslant y < 0$ из «а» соответствуют значения $-\infty < x \leqslant -1$, а из «б» значения $-1 < x < 0$; значениям $0 < y \leqslant \frac{1}{2}$ из «а» соответствуют значения $0 < x < 1$, а из «б» значения $1 \leqslant x < +\infty$. Так как $x = 0$ при $y = 0$, то получим $-\infty < x \leqslant 1$.

Ответ. $-\infty < x \leqslant 1$ и $1 \leqslant x < +\infty$ — интервалы убывания, а $-1 < x < 1$ — интервал возрастания.

**Четные и нечетные функции.** Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для всех значений $x$ из области ее определения выполняется тождество

$$f(-x) \equiv f(x).$$

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для всех значений $x$ из области ее определения выполняется тождество

$$f(-x) \equiv -f(x).$$

Например, функция $f(x) = x^4 - 3x^2$ — четная, поскольку $f(-x) \equiv (-x)^4 - 3(-x)^2 \equiv x^4 - 3x^2 = f(x)$; функция $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ — нечетная, поскольку $f(-x) = 2^{-x} - 2^x \equiv -[2^x - 2^{-x}] \equiv -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 36, *а*), а график нечетной функции — относительно начала координат (рис. 36, *б*).

Не каждая функция является четной или нечетной. Например, функция $f(x) = x + 1$ ни четная, ни нечетная, поскольку $f(-x) = -x + 1$; следовательно, $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

**Периодические функции.** Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если при всех значениях $x$ имеет место равенство $f(x + T) = f(x)$, где $T$ — постоянное число, отличное от нуля.

Число $T$ называется периодом функции, а наименьшее положительное число $T_0$, обладающее этим свойством, называется основным периодом функции $f(x)$.

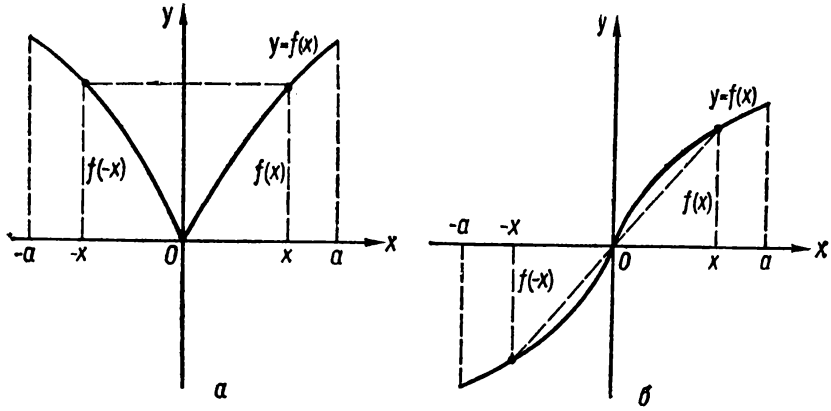



Рис. 36.

Из элементарных периодическими функциями являются тригонометрические. Например, функция $y = \sin x$ имеет основной период, равный $2\pi$, т. е. $\sin(2\pi + x) = \sin x$ при любом значении $x$.

**Понятие максимума и минимума функции.** Функция $y = f(x)$ при $x = x_0$ имеет максимум, если ее значение $f(x_0)$ больше всех других ее значений, принимаемых вблизи этой точки (рис. 37, *а*), т. е. $f(x_0) > f(x)$ $(x \neq x_0)$.

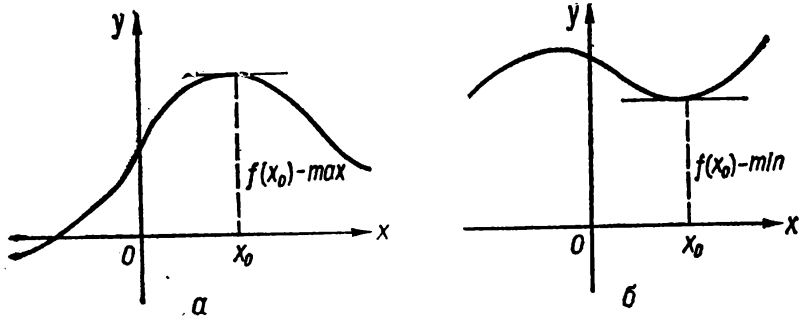



Рис. 37.

Функция $y = f(x)$ при $x = x_0$ имеет минимум, если ее значение $f(x_0)$ меньше всех других ее значений, принимаемых вблизи этой точки (рис. 37, *б*), т. е. $f(x_0) < f(x)$ $(x \neq x_0)$. Предполагается, что точка $x = x_0$ есть внутренняя точка области определения функции. Введенные здесь максимум и минимум называются локальными максимумом и минимумом. Максимум и минимум функции называются экстремумами функции (экстремум — крайний).

Например: 1) функция $y = x^4$ при $x = 0$ имеет минимум $y_{\min}=0$, так как $x^4 > 0$ при всех значениях $x \neq 0$;

2) функция $y = 1 - x^2$ при $x = 0$ имеет значение $y = 1$, а при всех $x \neq 0$ $y = 1 - x^2 < 1$, т. е. при $x = 0$ функция имеет максимум и $y_{\max} = 1$.

Заметим, что функции $y = x^2 + a^2$ и $y = x^2 - a^2$, где $a$ — постоянная величина, имеют минимум при $x = 0$, причем: 1) $y_{\min} = a^2$; 2) $y_{\min} = -a^2$. Функция $y = a^2 - x^2$ имеет максимум при $x = 0$ и $y_{\max} = a^2$.

Если функция $y = f(x)$ задана и непрерывна (строгое определение непрерывности функции будет дано в гл. 13; наглядно можно представлять непрерывную функцию такой, график которой можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги) на отрезке $[a, b]$, то кроме экстремумов она имеет на этом отрезке свое наибольшее и наименьшее значения. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, достаточно найти ее экстремумы на этом отрезке и значения функции $f(a)$, $f(b)$ на концах отрезка, а затем среди этих значений взять наименьшее и наибольшее.

Пример 1. Найти наибольшее $M$ и наименьшее $m$ значения функции $y = x^2 + 1$ на отрезке $[-1; 3]$.

Решение. В точке $x = 0$ функция имеет минимум $y_{\min} = 1$. Найдем значения функции на концах отрезка: $y(-1) = 2$, $y(3) = 10$. Таким образом, функция $y = x^2 + 1$ на отрезке $[-1; 3]$ принимает наименьшее значение, равное 1, и наибольшее — равное 10.

Ответ. $m = 1$ и $M = 10$.

Если функция $y = f(x)$ задана уравнением, которое разрешимо относительно $x$, т. е. можно найти $x = \varphi(y)$, то, найдя область определения обратной функции $x = \varphi(y)$ (область изменения данной функции $y = f(x)$), легко установить наибольшее и наименьшее значения данной функции на рассматриваемом отрезке.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$.

Решение. Функция определена при всех действительных значениях $x$. При $x = 0$ функция $y = 0$. При $y \neq 0$ найдем обратную функцию $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - y^2}}{y}$. Область определения обратной функции находим из неравенства $9 - y^2 \geqslant 0$; учитывая, что $y \neq 0$, получаем $-3 \leqslant y < 0$, $0 < y \leqslant 3$. Поскольку данная функция при $x = 0$ имеет значение $y = 0$, то область ее изменения будет $-3 \leqslant y \leqslant 3$. Следовательно, наименьшее значение функции $m = -3$, а наибольшее $M=3$.

Ответ. $m = -3$, $M = 3$.

**Выпуклость и вогнутость графика функции.** График функции $y = f(x)$ называется выпуклым (обращенным выпуклостью вверх) на интервале $(a, b)$, если любая дуга его лежит над стягивающей ее хордой (рис. 38, *а*).

График функции $y = f(x)$ называется вогнутым (обращенным выпуклостью вниз) на интервале $(a, b)$, если любая его дуга лежит под стягивающей ее хордой (рис. 38, *б*),

*Условие выпуклости и вогнутости графика функции* заключается в следующем. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке

$[a, b]$ и график функции на этом отрезке выпуклый (рис. 39). Возьмем на отрезке $[a, b]$ два любых значения аргумента $x_1$ и $x_2$ $(x_1<x_2)$. Тогда значениями ординат точек $A$ и $B$ графика функции соответственно будут $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Посредине между точками $x_1$ и $x_2$ возьмем точку $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Тогда $f(x_0) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$. Так как по условию график функции выпуклый, то для любых значений $x_1$ и $x_2$ из

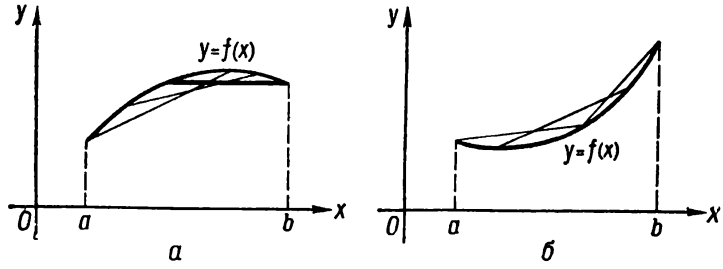



Рис. 38.

отрезка $[a, b]$ точка графика функции $C$ должна лежать выше точки $C_1$ хорды $AB$, т. е. $\overline{DC} > \overline{DC_1}$. Из трапеции $Ax_1x_2B$ находим ее среднюю линию $C_1D = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

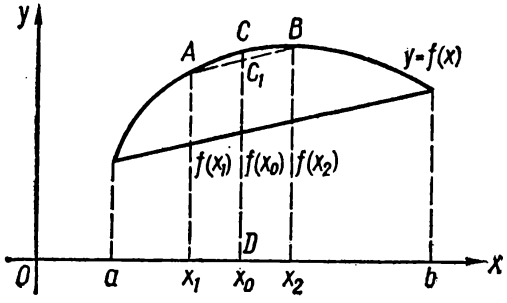



Рис. 39.

Таким образом, если график функции $y = f(x)$ выпуклый на отрезке $[a, b]$, то для любых двух значений аргумента $x_1$ и $x_2$ из этого отрезка должно выполняться неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \qquad (7.3)$$

Аналогично можно показать, что если график функции $y = f(x)$ вогнутый на отрезке $[a, b]$, то для любых значений $x_1$ и $x_2$ из этого отрезка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \qquad (7.4)$$

Справедливо и обратное утверждение: если для функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, при всех значениях $x_1$, $x_2$ этого отрезка выполняется неравенство (7.3), то график функции на этом отрезке выпуклый, а если выполняется неравенство (7.4), то график функции на этом отрезке вогнутый.

Неравенства (7.3) и (7.4) есть необходимое и достаточное условия выпуклости и вогнутости графика функции.

Пример 1. Исследовать на выпуклость и вогнутость график функции $f(x) = x^2$.

Решение. Данная функция определена при всех действительных значениях $x$. Возьмем два произвольных значения аргумента $x_1$ и $x_2$ ($x_1 < x_2$) и выясним знак неравенства в выражении

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \vee \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

(Напомним, что символ «$\vee$» означает, что пока неизвестно, какая из частей неравенства больше.)

В данном примере $f(x_1) = x_1^2$, $f(x_2) = x_2^2$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$. Тогда неравенство принимает вид

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \vee \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

Найдем разность

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{-x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2}{4} = -\frac{(x_1 - x_2)^2}{4} < 0$$

при любых значениях $x_1 \neq x_2$. Тогда $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$, или $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, т. е. для данной функции выполняется неравенство (7.4) на всей числовой оси; следовательно, график функции $f(x) = x^2$ вогнутый при $-\infty < x < +\infty$.

Ответ. График функции $f(x) = x^2$ вогнутый при всех значениях $x$, т. е. при $-\infty < x < +\infty$.

Пример 2. Исследовать на выпуклость и вогнутость график функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Данная функция определена при всех $x \neq 0$, т. е. на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Определим знак в неравенстве $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \vee \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, которое для данной функции принимает вид

$$\frac{1}{\frac{x_1 + x_2}{2}} \vee \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2}.$$

Найдем разность

$$\frac{1}{\frac{x_1+x_2}{2}}-\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}=-\frac{(x_1-x_2)^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}.$$

А. На промежутке $-\infty<x<0$ разность положительна, так как $(x_1-x_2)^2>0$ и $x_1x_2>0$, а $x_1+x_2<0$, т. е.

$$\frac{1}{\frac{x_1+x_2}{2}}>\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x^2}}{2}, \text{ или } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Следовательно, кривая выпуклая.

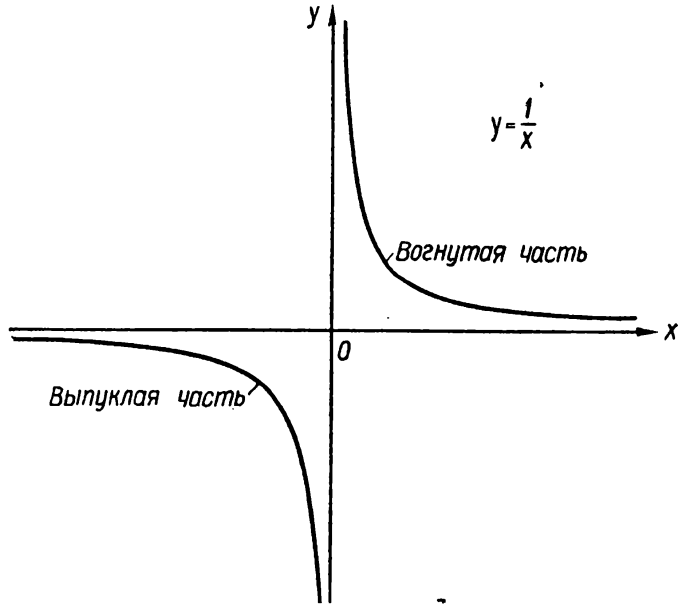



Рис. 40.

Б. На промежутке $0<x<+\infty$ разность отрицательна, так как $(x_1-x_2)^2>0$, $x_1x_2>0$ и $x_1+x_2>0$, т. е.

$$\frac{1}{\frac{x_1+x_2}{x}}<\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}, \text{ или } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Следовательно, кривая вогнутая.

Таким образом, график функции $y=\frac{1}{x}$ выпуклый при $x<0$ и вогнутый при $x>0$; в точке $x=0$ функция не определена (график разорван) (рис. 40).

Пример 3. Исследовать на выпуклость и вогнутость график функции $y = x^3$.

Решение. Функция определена при всех действительных значениях $x$, т. е. $-\infty < x < +\infty$.

Определим знак в неравенстве $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \vee \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, которое для данной функции принимает вид

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3 \vee \frac{x_1^3 + x_2^3}{2}.$$

Найдем разность

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3 - \frac{x_1^3 + x_2^3}{2} = \frac{-3x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 - 3x_2^3}{8} = -\frac{3}{8}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2.$$

На промежутке $-\infty < x < 0$ разность положительна, так как $x_1 + x_2 < 0$, а $(x_1 - x_2)^2 > 0$; тогда

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3 > \frac{x_1^3 + x_2^3}{2},$$

или

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

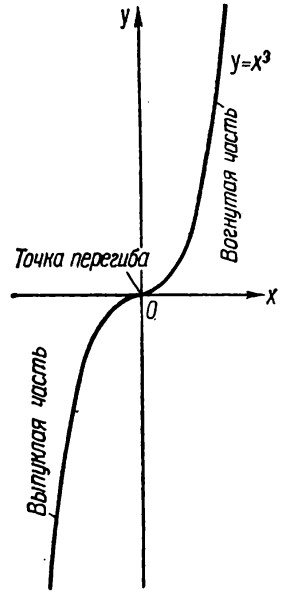


Рис. 41.

Следовательно, кривая при $x < 0$ выпуклая.

На промежутке $0 < x < +\infty$ разность отрицательна, так как $x_1 + x_2 > 0$, $(x_1 - x_2)^2 > 0$; тогда $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3 < \frac{x_1^3 + x_2^3}{2}$, или $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$. Следовательно, кривая при $x > 0$ вогнутая.

Точка $x = 0$ отделяет выпуклую часть графика функции $y = x^2$ от вогнутой; такую точку называют точкой перегиба (рис. 41).

## § 3. Степенная функция

Степенной функцией называется функция вида $y = x^a$, где $x$ — независимая переменная (аргумент), а $a$ — данное постоянное число.

**Степенная функция с натуральным показателем.** Рассмотрим функцию $y = x^n$, где $n$ — натуральное число.

Основные свойства степенной функции с натуральным показателем:

1. Область определения. Функция $y = x^n$ определена при всех действительных значениях $x$, т. е. при $-\infty < x < +\infty$.

2. Область изменения функции: а) если $n = 2k$ — число четное, то степенная функция изменяется от 0 до $+\infty$, т. е. $0 \leqslant x^{2k} < +\infty$ ($k$ — натуральное число); б) если $n = 2k - 1$ — число нечетное, то степенная функция изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. $-\infty < x^{2k-1} < +\infty$.

3. Нули функции. Степенная функция $y = x^n$ обращается в нуль при $x = 0$, т. е. график этой функции проходит через начало координат.

4. Интервалы знакопостоянства (интервалы, на которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения): а) при $n = 2k$ функция $x^{2k} > 0$ при $x \neq 0$, б) при $n = 2k - 1$ функция $x^{2k-1} < 0$ при $x < 0$ и $x^{2k-1} > 0$ при $x > 0$.

5. Четность и нечетность. Функция $y = x^n$ при $n = 2k$ — четная и график ее симметричен относительно оси ординат, а при $n = 2k - 1$ — нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

6. Интервалы возрастания и убывания: а) если $n = 2k$, то функция $y = x^{2k}$ на промежутке $-\infty < x < 0$ убывает, а на промежутке $0 < x < +\infty$ — возрастает; б) если $n = 2k - 1$, то функция $y = x^{2k-1}$ везде возрастает.

7. Наибольшее и наименьшее значения функции: а) если $n = 2k$, то функция $x^{2k}$ имеет наименьшее значение при $x = 0$, равное нулю, которое будет минимумом функции. Наибольшего значения функция не имеет; б) если $n = 2k - 1$, то функция $y = x^{2k-1}$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения; в) функция неограниченная.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции:

а) при $n = 2k$ график функции $f(x) = x^{2k}$ везде вогнутый.

Действительно, график функции вогнутый, если $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, или $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$.

Это неравенство было доказано для положительных $x_1$ и $x_2$ в гл. 6, § 1, пример 15 (равенство достигалось только при $n = 1$); так как $x^{2k}$ — функция четная, то неравенство верно и при отрицательных значениях $x_1$ и $x_2$;

б) при $n = 2k + 1$ график функции $f(x) = x^{2k+1}$ выпуклый при $-\infty < x < 0$ и вогнутый при $0 < x < +\infty$ (при $n = 1$ функция имеет вид $y = x$, а ее график есть прямая линия). Вогнутость графика функции $y = x^{2k+1}$ при положительных $x_1$ и $x_2$ следует из неравенства

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{2k+1} < \frac{x_1^{2k+1} + x_2^{2k+1}}{2},$$

доказанного в гл. 6, § 1, пример 15.

Если $x_1$ и $x_2$ — отрицательные, то

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{2k+1} > \frac{x_1^{2k+1} + x_2^{2k+1}}{2},$$

а это значит, что график функции выпуклый.

Точка (0; 0) отделяет выпуклую часть графика от вогнутой и является точкой перегиба.

Заметим, что на промежутке $(-1, 1)$ для степенной функции $y = x^n$ имеет место неравенство $|y| < |x|$, а на промежутках $(-\infty;$

$-1$) и $(1; +\infty)$ — неравенство $|y| > |x|$. Если $x = \pm 1$, то $|y| = 1$.

График степенной функции при $n = 2k$ изображен на рис. 42, *а*, а при $n = 2k - 1$ — на рис. 42, *б*.

На рис. 43 изображены графики степенных функций при различных четных (рис. 43, *а*) и нечетных (рис. 43, *б*) значениях $n$.

На рис. 44, *а* заштрихована часть плоскости, в которой проходят графики степенной функции при четных значениях $n$ ($n = 2, 4, 6, 8, \ldots$), а на рис. 44, *б* заштрихована часть плоскости, в которой проходят графики степенной функции при нечетных показателях $n$ ($n = 1, 3, 5, \ldots$).

**Степенная функция с целым отрицательным показателем.** Рассмотрим функцию $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, где $n$ — натуральное число.

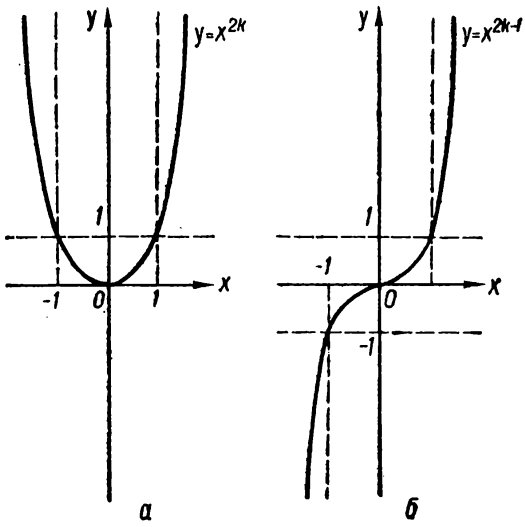



Рис. 42.

Основные свойства степенной функции с отрицательным показателем:

1. Область определения. Функция $y = \frac{1}{x^n}$ определена при всех действительных значениях $x \neq 0$, т. е. при $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$.

2. Область изменения: а) при $n = 2k$ ($n$ четном) функция изменяется от 0 до $+\infty$, т. е. $0 < x^{-2k} < +\infty$; б) при $n = 2k - 1$ ($n$ нечетном) функция изменяется от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$, т. е. $-\infty < x^{-2k+1} < 0$ и $0 < x^{-2k+1} < +\infty$.

3. Нулей функция не имеет, т. е. ее график с осью $Ox$ не пересекается. Оси $Oy$ график функции тоже не пересекает ($x$ не может равняться нулю).

4. Интервалы знакопостоянства: а) при $n = 2k$ функция везде положительна; б) при $n = 2k - 1$ функция при $x < 0$ отрицательная, а при $x > 0$ положительная.

5. Четность и нечетность функции: а) при $n = 2k$ функция четная и ее график симметричный относительно оси ординат; б) при $n = 2k - 1$

функция нечетная и ее график симметричный относительно начала координат.

6. Интервалы возрастания и убывания функции: а) при $n = 2k$ функция возрастает, если $-\infty < x < 0$, и убывает, если $0 < x < +\infty$; б) при $n = 2k - 1$ функция везде убывает.

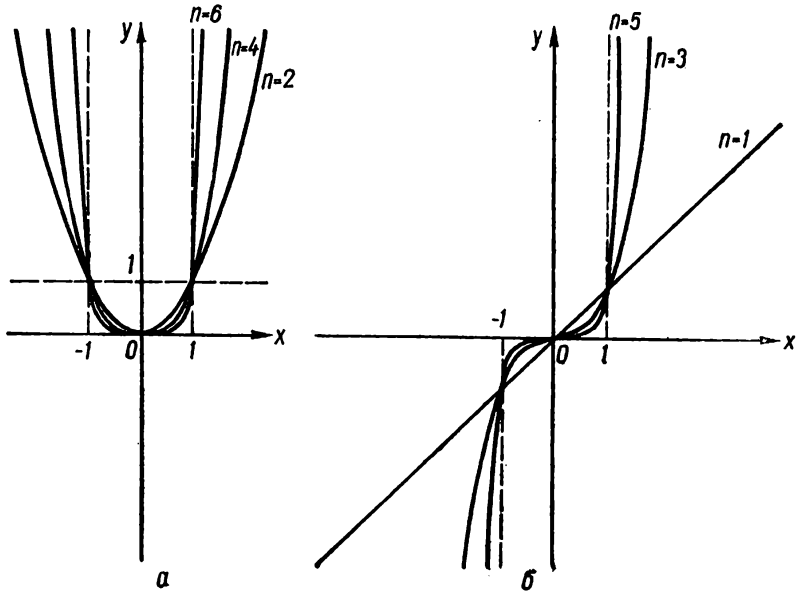



Рис. 43.

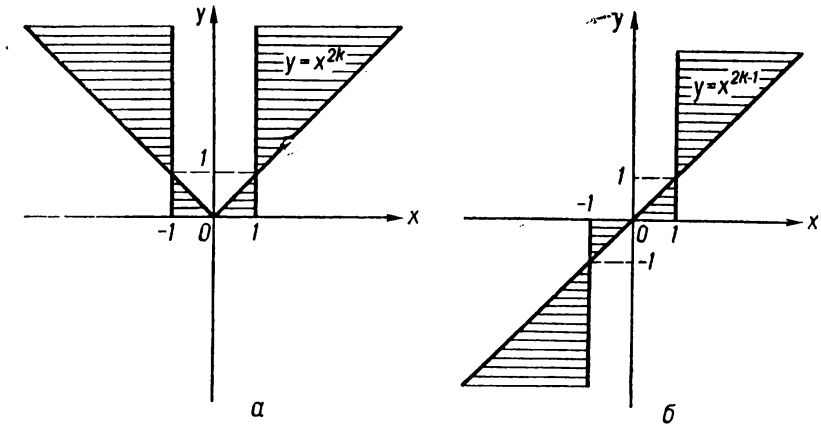



Рис. 44.

7. Наибольших и наименьших значений, а также максимумов и минимумов функция не имеет (неограничена).

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции: а) при $n = 2k$ график функции везде вогнутый; б) при $n = 2k - 1$ график функции выпуклый, если $-\infty < x < 0$, и вогнутый, если $0 < x < +\infty$.

На рис. 45, *а*, *б* изображены графики степенной функции с целым отрицательным показателем (для четного и нечетного показателей).

На рис. 46, *а*, *б* заштрихована часть плоскости, в которой размещены графики степенной функции с четными отрицательными показателями $n = -2, -4, -6, \ldots$ (рис. 46, *а*) и нечетными отрицательными показателями $n = -1, -3, -5, -7, \ldots$ (рис. 46, *б*).

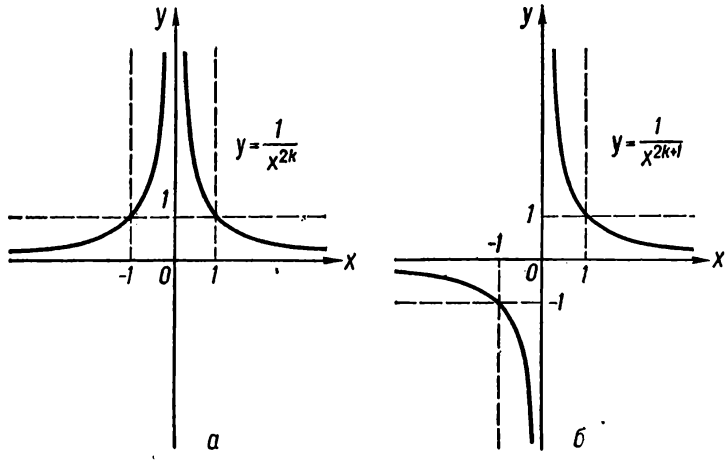



Рис. 45.

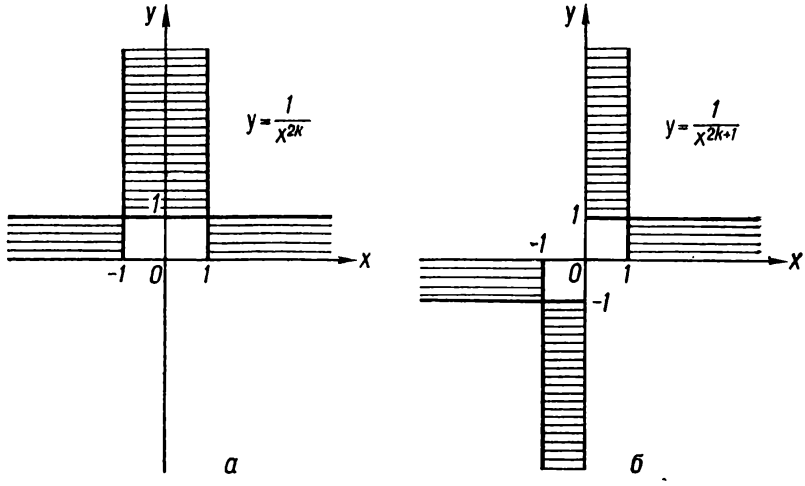



Рис. 46.

**Степенная функция с показателем** $a = \frac{1}{n}$, где $n$ — натуральное число, большее единицы ($n > 1$). Рассмотрим функцию $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Основные свойства:

1. Область определения: а) если $n = 2k$, то функция $\sqrt[2k]{x}$ определена при $x \geqslant 0$, т. е. при $0 \leqslant x < +\infty$; б) если $n = 2k + 1$, то функ-

ция $\sqrt[2k+1]{x}$ определена при всех действительных значениях $x$, т. е. при $-\infty < x < +\infty$.

2. Область изменения: а) при $n = 2k$ функция изменяется от 0 до $+\infty$, т. е. $0 \leqslant \sqrt[2k]{x} < +\infty$; а) при $n = 2k + 1$ функция принимает любые действительные значения, т. е. $-\infty < \sqrt[2k+1]{x} < +\infty$.

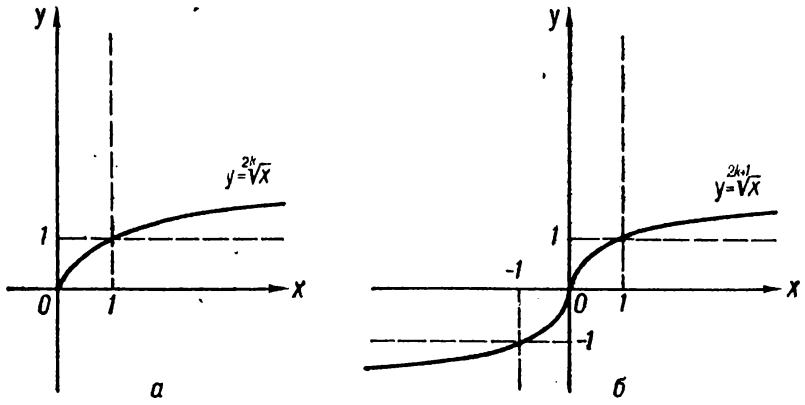



Рис. 47.

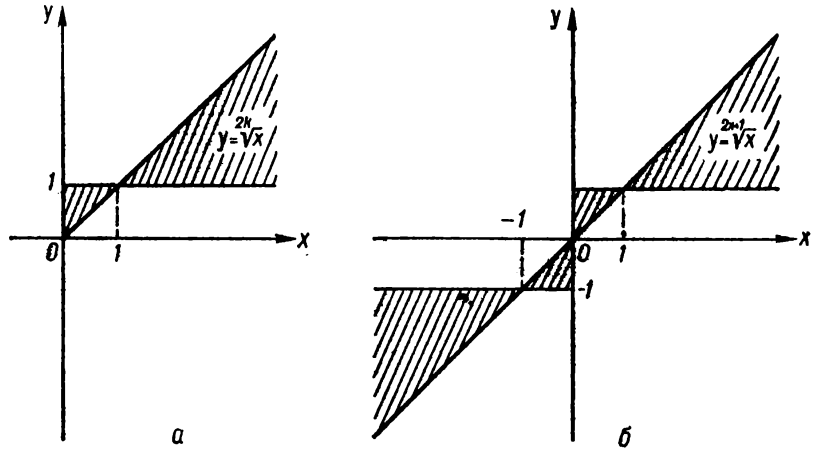



Рис. 48.

3. Нули функции. $y = 0$ при $x = 0$, т. е. графики функции проходят через начало координат.

4. Интервалы знакопостоянства: а) при $n = 2k$ функция положительна при $x > 0$; б) при $n = 2k + 1$ функция положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$.

5. Четность и нечетность функции: а) если $n = 2k$, то функция при $x < 0$ не определена и ни четная, ни нечетная; б) при $n = 2k + 1$ функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

6. Интервалы возрастания и убывания: функция $\sqrt[n]{x}$ в области определения везде возрастает.

7. Наибольшее и наименьшее значения: а) при $n = 2k$ наименьшее значение функции равно 0, а наибольшего нет. Максимумов и минимумов функция не имеет; б) при $n = 2k + 1$ функция не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значения; максимумов и минимумов нет. Функция неограниченная.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости: а) при $n = 2k$ график функции везде выпуклый; б) при $n = 2k + 1$ график функции вогнутый при $-\infty < x < 0$ и выпуклый при $0 < x < +\infty$; точка $(0, 0)$ — точка перегиба графика функции.

На рис. 47, *а* и *б* изображены графики функции $y = \sqrt[n]{x}$ для $n = 2k$ (четного) и $n = 2k + 1$ (нечетного).

Заметим, что функции $y = x^{2k}$ $(x \geqslant 0)$ и $y = \sqrt[2k]{x}$, а также $y = x^{2k+1}$ и $y = \sqrt[2k+1]{x}$ взаимно обратны и их графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

На рис. 48, *а*, *б* заштрихована часть координатной плоскости, где размещены графики функции $y = \sqrt[n]{x}$ для $n = 2k$ и $n = 2k + 1$.

**Степенная функция с положительным рациональным показателем.** Рассмотрим функцию $y = x^r$, где $r$ — рациональное число $\left(r = \frac{m}{n}\right.$, а $m$ и $n$ — взаимно простые натуральные числа).

Основные свойства:

1. Область определения: а) если $n = 2k$, то функция определена при $x \geqslant 0$, т. е. при $0 \leqslant x < +\infty$; б) если $n = 2k + 1$, то функция определена при всех действительных значениях $x$, т. е. при $-\infty < x < +\infty$.

2. Область изменения функции: а) если $n = 2k$, то функция изменяется от 0 до $+\infty$, т. е. $0 \leqslant y < +\infty$; б) если $n = 2k + 1$, то при $m$ четном $0 \leqslant y < +\infty$, а при $m$ нечетном $-\infty < y < +\infty$.

3. Нули функции. $y = 0$ при $x = 0$, т. е. график функции проходит через начало координат.

4. Интервалы знакопостоянства: а) если $n$ — четное, то $y > 0$ при $x > 0$; б) если $n$ — нечетное, а $m$ — четное, то $y > 0$ при $x \neq 0$; в) если $n$ — нечетное и $m$ — нечетное, то $y < 0$ при $x < 0$ и $y > 0$ при $x > 0$.

5. Четность и нечетность функции: а) если $n$ — четное, то функция при $x < 0$ не определена, т. е. ни четная, ни нечетная; б) если $n$ — нечетное, а $m$ — четное, то функция четная и ее график симметричный относительно оси ординат; в) при $n$ нечетном и $m$ нечетном функция нечетная и ее график симметричный относительно начала координат.

6. Интервалы возрастания и убывания: а) если $n$ — четное или $n$ нечетное и $m$ — нечетное, то функция возрастает при $-\infty < x < +\infty$; б) если $n$ — нечетное, а $m$ — четное, то при $x < 0$ функция убывает, а при $x > 0$ возрастает.

7. Наибольшее и наименьшее значения:

а) если $n$ четное, то функция при $x = 0$ принимает наименьшее значение $y = 0$. Максимумов и минимумов нет. Наибольшего значения нет. Функция неограниченная;

б) если $n$ — нечетное, а $m$ — четное, то при $x=0$ функция принимает наименьшее значение $y=0$, которое является минимумом функции. Наибольшего значения нет. Функция неограниченная;

в) если $n$ — нечетное и $m$ — нечетное, то функция не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значения. Функция неограниченная.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции:

а) если $n$ — четное и $m<n$, то график функции выпуклый ($x\geqslant 0$), а при $m>n$ график функции вогнутый ($x\geqslant 0$);

б) если $n$ — нечетное, а $m$ — четное, то при $m<n$ график функции выпуклый при $-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty$, а при $m>n$ график функции вогнутый при $-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty$;

в) если $n$ нечетное и $m$ нечетное, то при $m<n$ график функции вогнутый при $x<0$ и выпуклый при $x>0$, а при $m>n$ — выпуклый при $x<0$ и вогнутый при $x>0$; точка (0, 0) — точка перегиба.

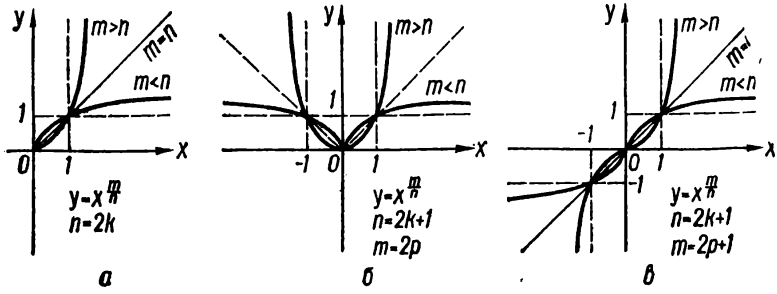



Рис. 49.

На рис. 49, *а*, *б*, *в* изображены графики функции $y=x^{\frac{m}{n}}$ для случаев: а) $n$ четное; б) $n$ нечетное, $m$ четное; в) $n$ нечетное и $m$ нечетное.

**Степенная функция с отрицательным рациональным показателем.** Рассмотрим функцию $y=x^r$, где $r=-\frac{m}{n}$, а $m$ и $n$ — натуральные взаимно простые числа.

Основные свойства:

1. Область определения: а) при четном $n$ функция определена при $x\geqslant 0$, т. е. при $0<x<+\infty$; б) при нечетном $n$ функция определена при $x\neq 0$, т. е. при $-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty$.

2. Область изменения функции: а) при четном $n$ функция принимает все положительные значения, т. е. $0<y<+\infty$; б) при нечетном $n$, а $m$ четном функция принимает все положительные значения, т. е. $0<y<+\infty$; в) при $n$ нечетном и $m$ нечетном функция принимает все действительные значения, не равные нулю, т. е. $-\infty<y<0$ и $0<y<+\infty$.

3. Нули функции. Функция нулей не имеет, т. е. ее график с осью абсцисс не пересекается.

4. Интервалы знакопостоянства: а) при $n$ четном функция в промежутке $0<x<+\infty$ положительна; б) при $n$ нечетном, а $m$ четном

функция в промежутке $-\infty < x < +\infty$ положительна; в) при $n$ нечетном и $m$ нечетном функция отрицательна при $x < 0$ и положительна при $x > 0$.

5. Четность и нечетность функции: а) при $n$ четном функция ни четная, ни нечетная; б) при $n$ нечетном, а $m$ четном функция четная; в) при $n$ нечетном и $m$ нечетном функция нечетная.

6. Интервалы возрастания и убывания: а) при $n$ четном функция везде убывает; б) при $n$ нечетном, а $m$ четном функция возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$; в) при $n$ нечетном и $m$ нечетном функция везде убывает.

7. Наибольшее и наименьшее значения функции. При любых $n$ и $m$ функция не имеет наибольших и наименьших значений; неограниченная. Функция не имеет ни максимумов, ни минимумов.

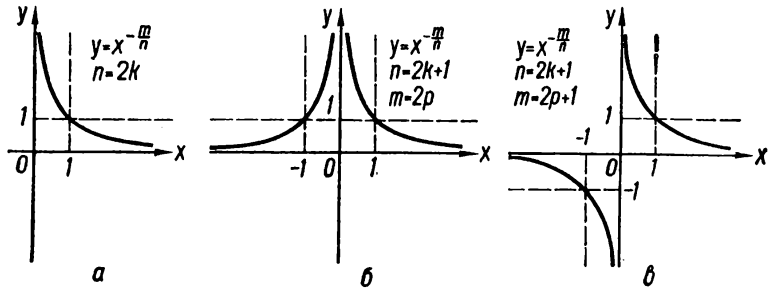



Рис. 50.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции: а) при $n$ четном график функции везде вогнутый; б) при $n$ нечетном, а $m$ четном график функции везде вогнутый; в) при $n$ нечетном и $m$ нечетном график функции при $x < 0$ выпуклый, при $x > 0$ — вогнутый.

На рис. 50, *а*, *б*, *в* изображены графики функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$ для а) $n$ четного; б) $n$ нечетного, $m$ четного; в) $n$ и $m$ нечетных.

Степенная функция с иррациональным показателем здесь не рассматривается. Однако следует заметить, что под $x^{\alpha}$, где $\alpha$ — иррациональное число, понимается предел последовательности рациональных степеней $x$, при условии, что последовательность показателей стремится к $\alpha$, т. е.

$$x^{\alpha} = \lim_{r_n \to \alpha} x^{r_n},$$

где $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ — последовательность рациональных чисел (о понятии предела см. § 6, гл. 8).

Так как степенная функция для любого рационального показателя определена голько при $x > 0$, то степенную функцию с иррациональным показателем рассматривают в промежутке $(0, +\infty)$, т. е. функция $y = x^{\alpha}$ ($\alpha$ — любое действительное число) определена при $0 < x < +\infty$; если $\alpha > 0$, то она, кроме того, определена и при $x = 0$.

Иррациональная степень отрицательного числа не имеет смысла. Если для иррационального числа $\alpha$ подобрать два достаточно близких рациональных числа $r$ и $R$ так, чтобы $r < \alpha < R$, то при $x \neq 1$

$$x^r > x^\alpha > x^R, \text{ если } 0 < x < 1,$$
$$x^r < x^\alpha < x^R, \text{ если } x > 1.$$

Пользуясь этими неравенствами, можно составить представление о свойствах и графике функции $y = x^\alpha$.

## § 4. Линейная функция

Функция вида $y = ax + b$, где $x$ — независимая переменная, а $a$ и $b$ — действительные числа, называется *линейной функцией*. Основные свойства линейной функции:

1. Область определения. Функция определена при $-\infty < x < +\infty$.

2. Область изменения. Функция принимает все действительные значения, т. е. $-\infty < y < +\infty$.

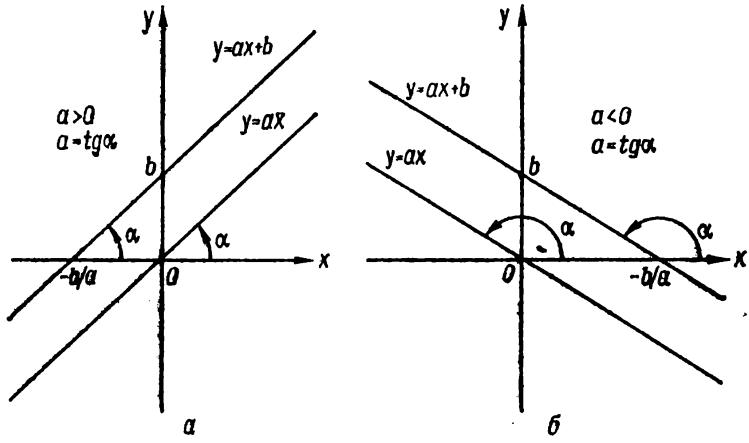



Рис. 51.

3. График линейной функции есть прямая линия, проходящая через точку оси ординат $(0; b)$ и наклоненная к оси абсцисс под углом $\alpha$, тангенс которого равен $a$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = a$ (рис. 51, *а*, *б*); поэтому $a$ называется угловым коэффициентом, а $b$ — начальной ординатой.

4. Нули функции. Функция обращается в нуль при $x = -\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$ $\left(\text{в точке } \left(-\frac{b}{a}; 0\right) \text{ график функции пересекается с осью абсцисс}\right)$.

5. Интервалы знакопостоянства: а) если $a>0$, то при $-\infty<x<-\frac{b}{a}$ $y<0$, а при $-\frac{b}{a}<x<+\infty$ $y>0$; б) если $a<0$, то при $-\infty<x<-\frac{b}{a}$ $y>0$, а при $-\frac{b}{a}<x<+\infty$ $y<0$; в) при $a=0$ прямая параллельна оси абсцисс.

6. Возрастание и убывание функции. При $a<0$ функция везде возрастает, а при $a<0$ — везде убывает; при $a=0$ функция постоянна.

7. Если $b=0$, то функция принимает вид $y=ax$ и ее график проходит через начало координат. Зависимость $y=ax$ между величинами $x$ и $y$ называется прямо пропорциональной зависимостью, а число $a$ называется коэффициентом пропорциональности.

Графики функции $y=ax+b$ при различных значениях $a$ и $b$ изображены на рис. 51.

## § 5. Квадратичная функция

Функция вида $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ называется квадратичной функцией или квадратным трехчленом ($a$, $b$ и $c$ — действительные числа).

**Квадратичная функция** $y=ax^2$ $(b=c=0)$.

Рассмотрим основные свойства:

1. Функция определена при всех действительных значениях $x$.

2. Если $a>0$, то она изменяется от 0 до $+\infty$, т. е. $0\leqslant y<+\infty$. Если $a<0$, то она изменяется от 0 до $-\infty$, т. е. $-\infty<y\leqslant 0$.

3. Функция обращается в нуль при $x=0$; график ее проходит через начало координат.

4. При $a>0$ и $x\neq 0$ функция принимает положительные значения, т. е. $y>0$, а при $a<0$ и $x\neq 0$ — отрицательные значения, т. е. $y<0$.

5. Функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.

6. При $a>0$ функция убывает на промежутке $(-\infty; 0)$ и возрастает на промежутке $(0; +\infty)$. При $a<0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывает на промежутке $(0; +\infty)$.

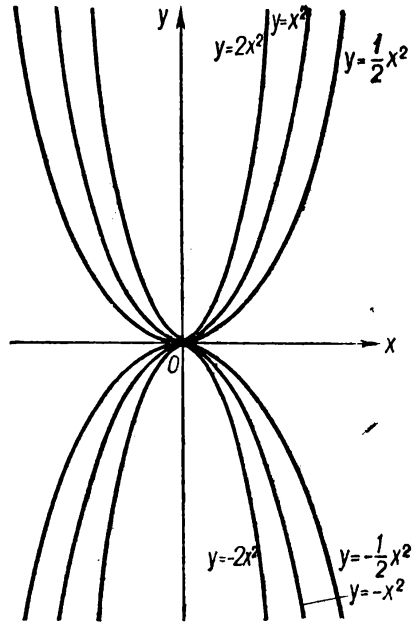


Рис. 52.

7. При $a>0$ функция имеет наименьшее значение $y=0$ в точке $x=0$, являющееся минимумом функции, а наибольшего значения не имеет. При $a<0$ функция имеет наибольшее значение $y=0$ в точке $x=0$, являющееся максимумом функции, а наименьшего значения функция не имеет. Функция неограниченная.

8. При $a>0$ график функции везде вогнутый, а при $a<0$ — выпуклый.

На рис. 52 изображен график функции при различных значениях параметра $a$. Кривая, представляющая собой график квадратичной функции, называется параболой.

**Квадратичная функция** $y = ax^2 + c$ $(b = 0)$. Рассмотрим основные свойства:

1. Функция определена при всех значениях $x$.

2. Если $a > 0$, то функция изменяется от $c$ до $+\infty$, т. е. $c \leqslant y < +\infty$; если $a < 0$, то функция изменяется от $-\infty$ до $c$, т. е. $-\infty < y \leqslant c$.

3. Если $a > 0$ и $c > 0$, то функция в нуль не обращается, а если $a > 0$ и $c < 0$, то функция обращается в нуль при $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и график функции пересекает ось абсцисс в двух точках.

Если $a < 0$ и $c < 0$, то функция в нуль не обращается, а если $a < 0$ и $c > 0$, то функция обращается в нуль при $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и график функции пересекает ось абсцисс в двух точках.

4. При $a > 0$ и $c > 0$ функция при всех значениях $x$ положительна, т. е. $y > 0$, а при $a > 0$ и $c < 0$ функция принимает положительные значения на промежутках $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ и $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}, +\infty\right)$ и отрицательные значения на промежутке $\left(-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$.

При $a < 0$ и $c < 0$ функция при всех значениях $x$ принимает отрицательные значения, а при $a < 0$ и $c > 0$ она положительна на промежутке $\left(-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ и отрицательна на промежутках $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ и $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}, +\infty\right)$.

Между различными корнями (если функция их имеет) знак функции противоположный знаку коэффициента при $x^2$.

5. Функция четная и ее график симметричный относительно оси ординат.

6. При $a > 0$ функция убывает на промежутке $(-\infty, 0)$ и возрастает на промежутке $(0, +\infty)$. При $a < 0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty, 0)$ и убывает на $(0, +\infty)$.

7. При $a > 0$ функция имеет наименьшее значение (минимум) при $x = 0$, которое равно $c$, а наибольшего значения не имеет. При $a < 0$ функция имеет наибольшее значение (максимум) при $x = 0$, которое равно $c$, а наименьшего значения не имеет.

8. При $a > 0$ график функции везде вогнутый, а при $a < 0$ график функции везде выпуклый. Точка $(0, c)$ параболы (графика функции) называется вершиной этой параболы. При $a > 0$ парабола обращена вершиной вниз, а при $a < 0$ — вершиной вверх.

На рис. 53, *а*, *б* изображены графики функции $y = ax^2 + c$.

**Квадратичная функция** $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Выделим в данном квадратном трехчлене полный квадрат и представим функцию в виде

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right],$$

где $b^2 - 4ac = D$ — дискриминант трехчлена. Раскрыв квадратные скобки, получим

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

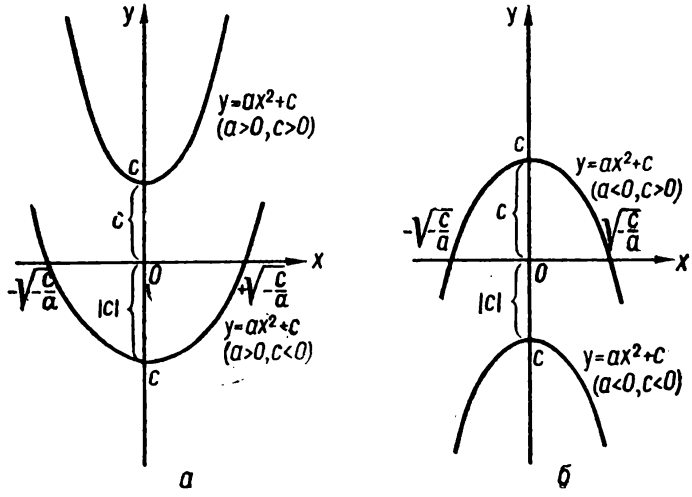



Рис. 53.

Заметим, что если обозначить $x + \frac{b}{2a} = X$, а $\frac{4ac - b^2}{4a} = C$, то функция примет вид $y = aX^2 + C$; такая функция рассмотрена выше.

Основные свойства функции $y = ax^2 + bx + c$:

1. Функция определена при всех действительных значениях $x$.

2. Если $a > 0$, то функция изменяется от $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ до $+\infty$, т. е. $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \leqslant y < +\infty$, а при $a < 0$ изменяется от $-\infty$ до $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, т. е. $-\infty < y \leqslant -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

3. Если $b^2 - 4ac < 0$, то функция нулей не имеет.

Если $b^2 - 4ac = 0$, то функция имеет нуль $x = -\frac{b}{2a}$; график функции касается оси абсцисс при $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $b^2 - 4ac > 0$, функция имеет два нуля:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

4. Если $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0 \left(\text{т. е. } C = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0\right)$, то функция при всех значениях $x$ положительна.

Если $a > 0$ и $b^2 - 4ac = 0 \left(\text{т. е. } C = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0\right)$, то функция положительна при $x \neq -\frac{b}{2a}$ и равна нулю при $x = -\frac{b}{2a}$.

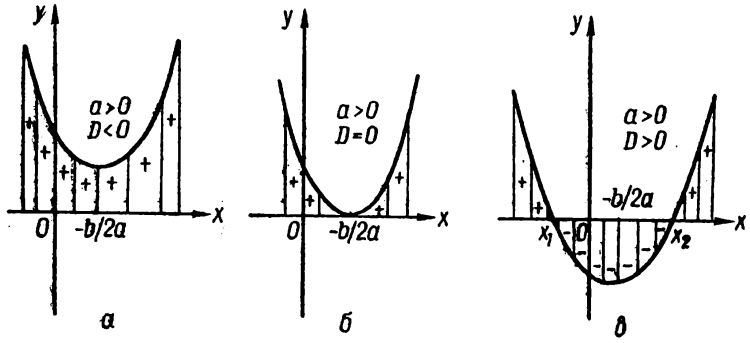



Рис. 54.

График функции касается оси абсцисс в точке $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$. В этом случае квадратный трехчлен есть полный квадрат.

Если $a > 0$ и $b^2 - 4ac > 0 \left(\text{т. е. } C = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0\right)$, то функция положительна на промежутках $(-\infty, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ и отрицательна на промежутке $(x_1, x_2)$ (рис. 54, *а*, *б*, *в*).

Если $a < 0$ и $b^2 - 4ac < 0 \left(\text{т. е. } C = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0\right)$, то функция при всех значениях $x$ принимает отрицательные значения.

Если $a < 0$ и $b^2 - 4ac = 0 \left(\text{т. е. } C = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0\right)$, то функция отрицательна при всех $x \neq -\frac{b}{2a}$, а при $x = -\frac{b}{2a}$ $y = 0$, т. е. график функции касается оси абсцисс при $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $a < 0$ и $b^2 - 4ac > 0$, то функция положительна на промежутке $(x_1, x_2)$ и отрицательна на промежутках $(-\infty, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ (рис. 55, *а*, *б*, *в*).

Вывод:

а) если $D = b^2 - 4ac < 0$, то квадратный трехчлен при всех значениях $x$ имеет знак первого коэффициента $a$;

б) если $D = b^2 - 4ac = 0$, то квадратный трехчлен имеет знак коэффициента $a$ при всех $x \neq -\frac{b}{2a}$, а при $x = -\frac{b}{2a}$ обращается в нуль;

а) если $D > 0$, то квадратный трехчлен имеет знак первого коэффициента вне промежутка корней и знак, противоположный знаку первого коэффициента, на промежутке между его корнями. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Если трехчлен имеет действительные корни $x_1$ и $x_2$ ($x_1 < x_2$), то при $x_1 < x < x_2$ выполняется неравенство $af(x) < 0$, а при $x < x_1$ и $x > x_2$ — неравенство $af(x) > 0$.

5. Если $b \neq 0$, то функция ни четная, ни нечетная; при $b = 0$ функция четная.

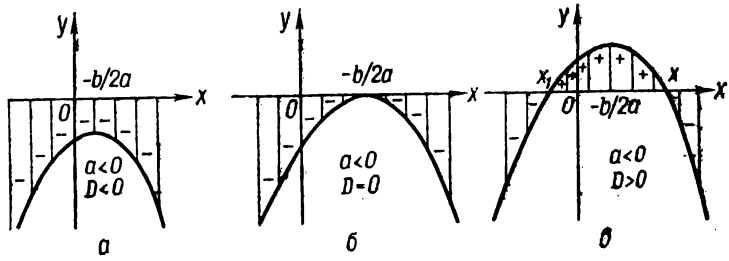



Рис. 55.

6. При $a > 0$ функция убывает на промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и возрастает на промежутке $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

При $a < 0$ функция возрастает на промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и убывает на промежутке $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

7. При $a > 0$ функция имеет наименьшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$, являющееся минимумом функции, причем

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Наибольшего значения функция не имеет.

При $a < 0$ функция имеет наибольшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$, являющееся максимумом функции, причем

$$y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Наименьшего значения функция не имеет.

8. При $a>0$ график функции везде вогнутый, т. е. обращен выпуклостью вниз. При $a<0$ график функции везде выпуклый, т. е. обращен выпуклостью вверх. Заметим, что графиком квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$ есть парабола, а точка $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ называется вершиной этой параболы.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. При каких значениях $m$ неравенство $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3<0$ удовлетворяется при всех действительных значениях $x$?

Квадратный трехчлен отрицателен при всех значениях $x$ (рис. 55,$a$), если $a<0$ и $D<0$, т. е.

$$\begin{cases} m+1<0, \\ 4(m-1)^2-4(m+1)(3m-3)<0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m<-1, \\ m^2+m-2>0, \end{cases}$$

откуда находим $m<-2$.

Ответ. $m<-2$.

Пример 2. При каких значениях $m$ трехчлен $(m-1)x^2+2mx+3m-2$ представляет полный квадрат?

Квадратный трехчлен будет полным квадратом, если $a>0$ и $D=0$, т. е.

$$\begin{cases} m-1>0, \\ 4m^2-4(m-1)(3m-2)=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m>1, \\ 2m^2-5m+2=0, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} m>1, \\ m=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} m>1, \\ m=2. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет, а решением второй является $m=2$.

Ответ. $m=2$.

Пример 3. Вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ имеет координаты $x=6$, $y=-12$. Зная, что парабола вогнута и имеет один из нулей при $x=8$, найти $a$, $b$ и $c$.

Парабола вогнута, значит $a>0$. Вершина параболы находится в точке $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, т. е.

$$-\frac{b}{2a}=6,$$

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=-12,$$

и $x=8$ — нуль квадратного трехчлена, т. е. $a\cdot 8^2+b\cdot 8+c=0$. Поэтому решение задачи сводится к решению системы

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=6, \\ \frac{4ac-b^2}{4a}=-12, \\ 64a+8b+c=0. \end{cases}$$

Решив систему при условии $a>0$, найдем $a=3$, $b=-36$, $c=96$.

Ответ. $a=3$, $b=-36$, $c=96$.

**Пример 4.** При каких значениях $k$ неравенство

$$\frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

справедливо при всех значениях $x$?

Так как $x^2 + x + 1 > 0$ при всех значениях $x$, то данное неравенство равносильно неравенству $x^2 - kx + 1 < 3(x^2 + x + 1)$, или $2x^2 + (k+3)x + 2 > 0$.

Трехчлен в левой части данного неравенства при всех значениях $x$ положителен, если $(k+3)^2 - 16 < 0$, или $-4 < k + 3 < 4$, т. е. $-7 < k < 1$.

Ответ. $-7 < k < 1$.

**Пример 5.** Найти значения $m$, при которых $x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$ для всех $x$, удовлетворяющих условию $1 < x < 2$ (при остальных $x$ трехчлен может принимать любые значения).

Так как коэффициент при $x^2$ равен $1 > 0$, то трехчлен $x^2 + mx + m^2 + 6m$ принимает отрицательные значения между корнями, которые должны быть действительными и находиться вне интервала $(1; 2)$, т. е. при $x=1$ и при $x=2$ трехчлен должен быть не положительным. Поэтому $m$ должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} m^2 - 4(m^2 + 6m) > 0, \\ 1 + m + m^2 + 6m \leqslant 0 \ (x = 1), \\ 4 + 2m + m^2 + 6m \leqslant 0 \ (x = 2), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m^2 + 8m < 0, \\ m^2 + 7m + 1 \leqslant 0, \\ m^2 + 8m + 4 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $-\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \leqslant m \leqslant 2\sqrt{3} - 4$.

Ответ. $-\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \leqslant m \leqslant 2\sqrt{3} - 4$.

Примечание. Первое неравенство системы можно опустить, так как оно выполняется, если выполняется хотя бы одно из двух остальных неравенств. Почему?

**Пример 6.** Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом (нормандское окно). Каковы должны быть размеры окна, чтобы при его периметре, равном $2p$, окно пропускало наибольшее количество света?

Окно будет пропускать наибольшее количество света, когда его площадь будет наибольшей. Обозначим ширину окна $AB = 2x$, а высоту до полукруга $AD = y$ (рис. 56); тогда его площадь

$$S = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2,$$

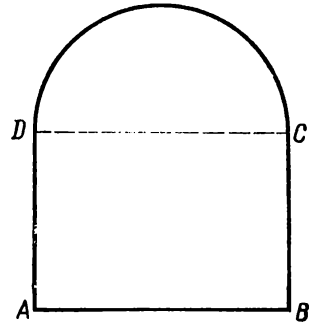


Рис. 56.

где $2x + 2y + \pi x = 2p$ (по условию).

Из последнего равенства найдем $y = p - x - \frac{\pi}{2}x$. Подставив значение $y$ в формулу для площади, получим

$$S = 2x\left(p - x - \frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2}\pi x^2,$$

или

$$S = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2 + 2px,$$

т. е. площадь равна квадратному трехчлену с коэффициентами $a = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$, $b = 2p$ и $c = 0$.

Поскольку $a < 0$, то трехчлен при $x = -\frac{b}{2a}$ имеет максимум. Следовательно,

$$x = \frac{2p}{2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2p}{4 + \pi};$$

тогда

$$y = p - \frac{2p}{4 + \pi} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2p}{4 + \pi} = \frac{2p}{4 + \pi}.$$

Ответ. Ширина окна $AB = \frac{4p}{4 + \pi}$, а высота $AD = \frac{2p}{4 + \pi}$.

## § 6. Дробно-линейная функция

Функцию вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

где $x$ — аргумент, а $a$, $b$, $c$ и $d$ — заданные числа, называют дробно-линейной функцией.

**Обратно пропорциональная зависимость величин.** Если величины $x$ и $y$ связаны между собой уравнением $y = \frac{k}{x}$, то такую связь называют обратно пропорциональной зависимостью.

Если в дробно-линейной функции положить $a = d = 0$ и $\frac{b}{c} = k$, то получим

$$y = \frac{k}{x} \quad (k \neq 0).$$

Основные свойства обратно пропорциональной зависимости:

1. Функция определена при $x \neq 0$, т. е. $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.
2. Функция изменяется в промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.
3. Нулей функция не имеет, т. е. ее график с осью абсцисс не пересекается.
4. Если $k > 0$, то $y > 0$ при $x > 0$ и $y < 0$ при $x < 0$.
   Если $k < 0$, то $y > 0$ при $x < 0$ и $y < 0$ при $x > 0$.
5. Функция нечетная; ее график симметричный относительно начала координат.
6. Если $k > 0$, функция убывает; если $k < 0$, функция возрастает.
7. Наименьшего и наибольшего значений, а также максимумов и минимумов функция не имеет.

8. При $k>0$ на промежутке $(-\infty, 0)$ график функции выпуклый, а в промежутке $(0, +\infty)$ — вогнутый.

При $k<0$ на промежутке $(-\infty, 0)$ график функции вогнутый, а в промежутке $(0, +\infty)$ — выпуклый. На рис. 57, *а*, *б* изображен график функции $y=\frac{k}{x}$. График функции $y=\frac{k}{x}$ называется гиперболой. Точка $O$ (0; 0) называется центром гиперболы.

**Дробно-линейная функция** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$. Если $c=0$, то функция $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ становится линейной. Если же $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, или $ad=bc$

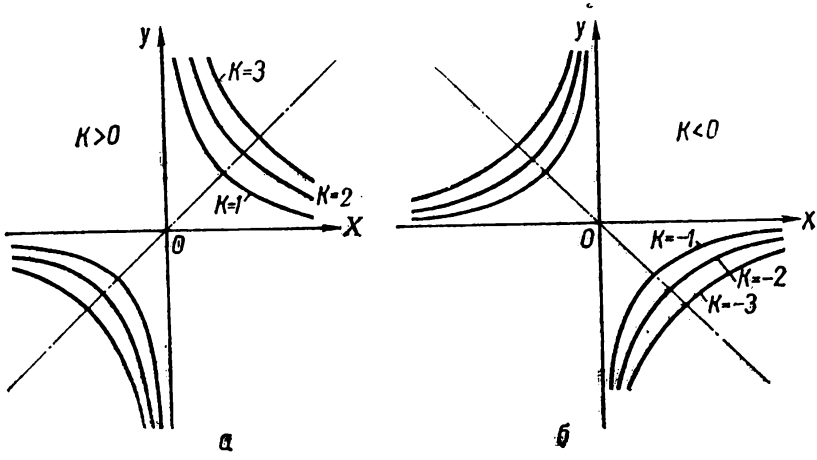



Рис. 57.

то, обозначив отношения $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=p$, получаем $a=cp$ и $b=dp$; тогда

$$y=\frac{p(cx+d)}{cx+d}=p\ (cx+d\neq 0),$$

т. е. функция не зависит от переменной $x$ (является постоянной). Поэтому будем рассматривать эту функцию при $c\neq 0$ и $ad\neq bc$.

Представим ее в виде

$$y=\frac{\frac{a}{c}\left(cx+\frac{bc}{a}\right)}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}\left(cx+d+\frac{bc}{a}-d\right)}{cx+d}=$$

$$=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d},$$

или

$$y-\frac{a}{c}=\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

Если обозначить $y-\frac{a}{c}=Y$, $x+\frac{d}{c}=X$ и $\frac{bc-ad}{c^2}=k$, то дробно-линейная функция сводится к обратно пропорциональной зависимости

$$Y=\frac{k}{X}.$$

Основные свойства дробно-линейной функции

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

$\left(\text{для удобства будем пользоваться обозначением } k=\frac{bc-ad}{c^2}\right)$:

1. Функция определена при $x\neq-\frac{d}{c}$, т. е. на промежутках $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ и $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$.

2. Функция изменяется в промежутках $\left(-\infty, \frac{a}{c}\right)$ и $\left(\frac{a}{c}, +\infty\right)$, т. е. принимает все действительные значения, кроме $\frac{a}{c}$.

3. При $x=-\frac{b}{a}$ функция обращается в нуль (если $a\neq 0$).

4. Если $k>0$: а) при $\frac{a}{c}>0$ в интервалах $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ и $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ $y>0$, а в интервале $\left(-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}\right)$ $y<0$; б) при $a=0$ в интервале $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ $y<0$, а в интервале $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ $y>0$; в) при $\frac{a}{c}<0$ в интервалах $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ и $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ $y<0$, а в интервале $\left(-\frac{d}{c}, -\frac{b}{a}\right)$ $y>0$.

Если $k<0$: а) при $\frac{a}{c}>0$ в интервалах $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ и $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ $y>0$, а в интервале $\left(-\frac{d}{c}, -\frac{b}{a}\right)$ $y<0$; б) при $a=0$ в интервале $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ $y>0$, а в интервале $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ $y<0$;

в) при $\frac{a}{c} < 0$ в интервалах $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ и $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right) y < 0$, а в интервале $\left(-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}\right) y > 0$.

5. Функция ни четная, ни нечетная (если $a = d = 0$, то функция нечетная).

6. Если $k > 0$, функция убывает; если $k < 0$, функция возрастает.

7. Наибольшего и наименьшего значений, максимумов и минимумов функция не имеет.

8. При $k > 0$ в интервале $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ график функции выпуклый, а в интервале $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ — вогнутый. При $k < 0$ в интервале

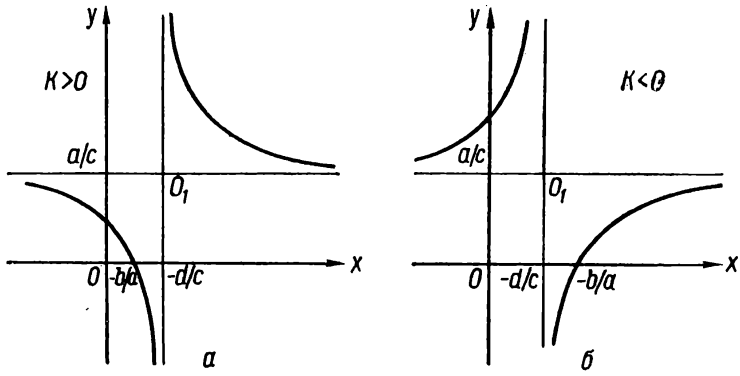



Рис. 58.

$\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ график функции вогнутый, а в интервале $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ — выпуклый. График функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ при $c \neq 0$ и $ad \neq bc$ есть такая же гипербола, как $y = \frac{k}{x}$, только центр ее находится в точке $O_1\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ (рис. 58, *а*, *б*).

## § 7. Преобразование графиков функций

Рассмотрим, как по известным графикам каких-либо данных функций построить графики других функций, выражающихся через данные. Например, пусть дан график функции $y = f(x)$.

1. Чтобы построить график функции $y = f(x + a)$, где $a$ — некоторое данное число, достаточно график функции $y = f(x)$ перенести параллельно в направлении оси $Ox$ на расстояние $|a|$ в положительном

направлении, если $a < 0$, и в отрицательном направлении, если $a > 0$ (рис. 59).

Пример. Построить графики $y = (x - 3)^2$ и $y = (x + 1)^2$. Строим график $y = x^2$ (пунктиром). Переносим его в положительном направлении оси $Ox$ на расстояние, равное 3; получаем график $y = (x - 3)^2$. Переносим его в отрицательном направлении оси $Ox$ на расстояние, равное 1; получим график $y = (x + 1)^2$ (рис. 60).

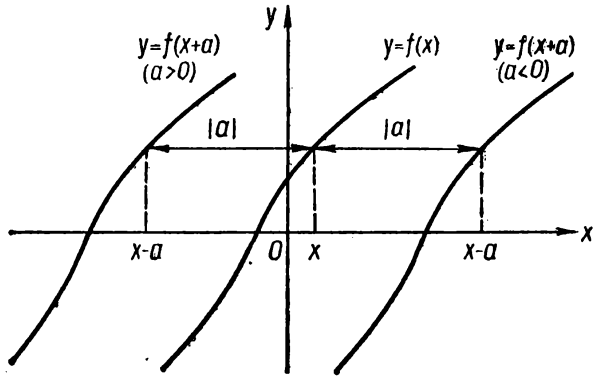



Рис. 59.

2. Чтобы построить график функции $y = f(x) + a$, где $a$ — некоторое данное число, достаточно график функции параллельно перенести в направлении оси $Oy$ на расстояние $|a|$ в положительном направлении, если $a > 0$, и в отрицательном, если $a < 0$ (рис. 61).

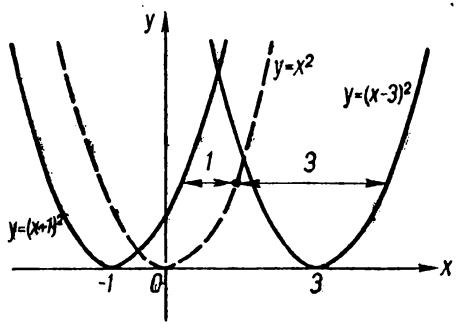



Рис. 60.

3. Чтобы построить график функции $y = f(ax)$, где $a$ — некоторое положительное число, достаточно график функции $y = f(x)$ равномерно сжать к оси $Oy$ в $a$ раз; если $a > 1$, то имеет место сжатие, а если $a < 1$, то имеет место растяжение (рис. 62, $а$). Это означает, что абсциссы всех точек графика функции достаточно уменьшить в $a$ раз, если $a > 1$, или увеличить в $\frac{1}{a}$ раз, если $a < 1$, а ординаты оставить без изменения. Если $a < 0$, то к указанным преобразованиям добавится еще преобразование симметрии относительно оси $Oy$ (рис. 62, $б$).

Пример. Построить графики $y=\sqrt{2x}$ и $y=\sqrt{-\frac{x}{2}}$.

Построим график $y=\sqrt{x}$ (рис. 63, *а*). Затем график сожмем к оси

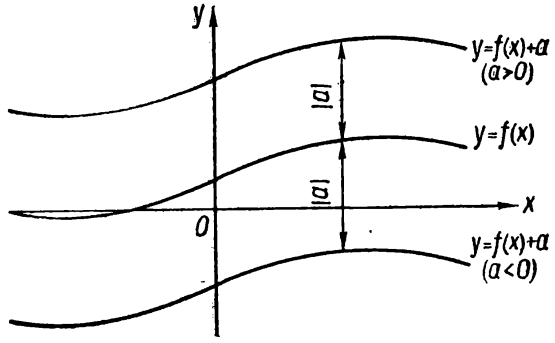



Рис. 61.

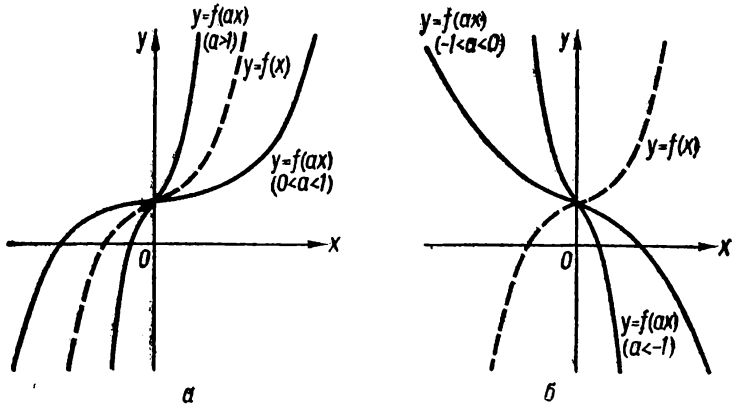



Рис. 62.

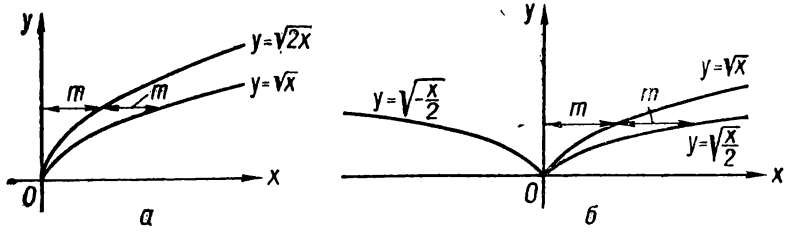



Рис. 63.

*Oy* в два раза; получим график $y=\sqrt{2x}$. Если график $y=\sqrt{x}$ растянем от оси *Oy* в два раза, а затем симметрично отобразим полученный график относительно оси *Oy* (рис. 63, *б*), получим график $y=\sqrt{-\frac{x}{2}}$.

4. Чтобы построить график функции $y = af(x)$, где $a$ — данное положительное число, достаточно график функции $y = f(x)$ «растянуть» от оси $Ox$ в $a$ раз (если $a > 1$, то будет растяжение, а если $a < 1$, то будет сжатие к оси $Ox$). Если $a < 0$, то к указанному преобразованию еще добавится преобразование симметрии относительно оси $Ox$ (рис. 64).

Пользуясь преобразованиями графиков функций 1—4 можно построить график функции $y = af(bx + c) + d$, зная график функции $y = f(x)$.

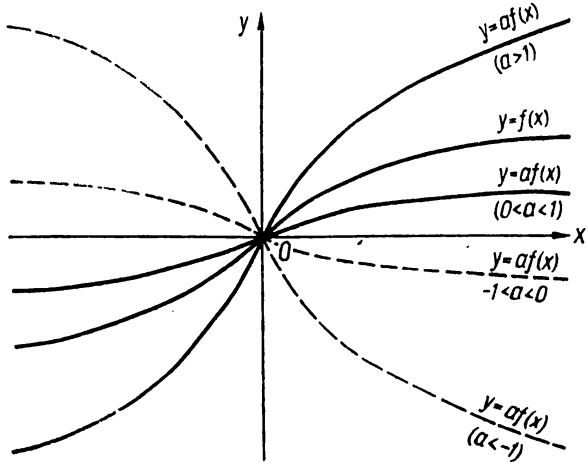



Рис. 64.

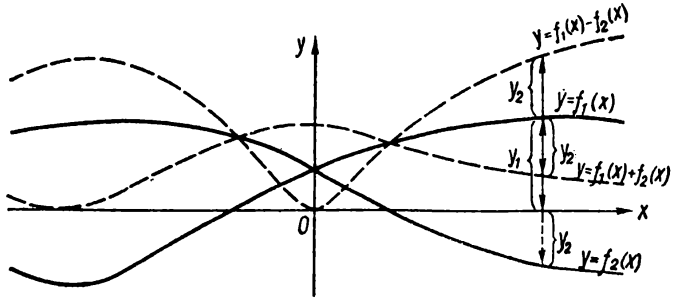



Рис. 65.

5. По графикам функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ можно построить графики функций $y = f_1(x) + f_2(x)$, $y = f_1(x) - f_2(x)$, $y = f_1(x) \times f_2(x)$, $y = f_1(x) : f_2(x)$, т. е. над функциями, графики которых заданы, можно производить арифметические действия.

На рис. 65 показано, как, зная графики $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, построить графики $y = f_1(x) + f_2(x)$ и $y = f_1(x) - f_2(x)$.

**Построение графика сложной функции.** Пусть даны графики функций $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$; требуется построить график сложной функции $y = f[\varphi(x)]$. Пусть на рис. 66, *а*, *б* заданы графики функций $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$.

Построим график $y = f[\varphi(x)]$. Возьмем значение $x = x_0$ на рис. 66, *б* и найдем $u_0 = \varphi(x_0)$. Затем отложим на оси $Ou$ (рис. 66, *а*) $u_0$ и найдем соответствующее значение $y_0 = f(u_0)$. В координатной плоскости $xOy$ построим точку $(x_0, y_0)$ графика функции $y = f[\varphi(x)]$. Построив достаточное количество точек графика функции $y = f[\varphi(x)]$ и соединив их, получим график сложной функции $y = f[\varphi(x)]$ (рис. 67).

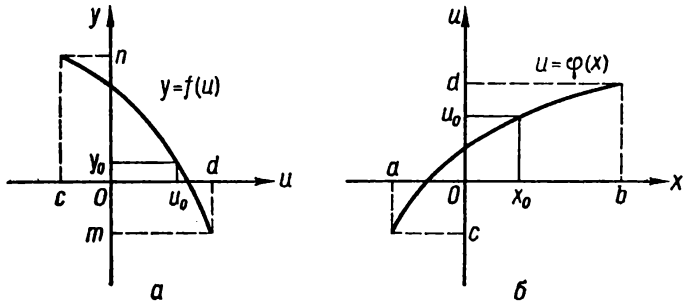



Рис. 66.

**Построение графиков функций, содержащих символ абсолютной величины числа.** Пусть задан график функции $y = f(x)$.

А. Чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, достаточно часть графика $y = f(x)$, лежащую в правой полуплоскости $x \geqslant 0$, оставить без изменения, а в левой полуплоскости $x < 0$ построить

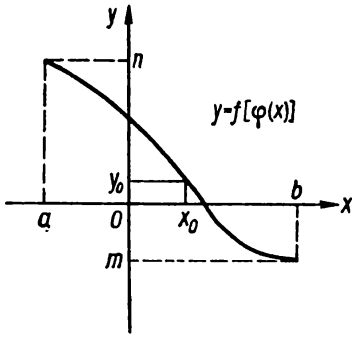



Рис. 67.

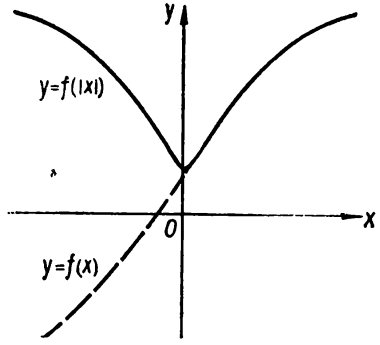



Рис. 68.

кривую, симметричную с правой частью графика $y = f(x)$ относительно оси ординат. Действительно, функция $y = f(|x|)$ четная, так как $f(|-x|) = f(|x|)$, т. е. ее график симметричен относительно оси ординат. Так как при $x \geqslant 0$ $f(|x|) = f(x)$ и графики функций $y = f(|x|)$ и $y = f(x)$ совпадают, то отсюда следует указанный способ построения графика функции $y = f(|x|)$ (рис. 68).

Пример. Построить графики функций $y = x^2 - 3|x| + 2$ и $y = \sqrt{|x|}$.

1. Строим график функции $y = x^2 - 3x + 2$ для $x \geqslant 0$ (рис. 69), а затем кривую, симметричную с построенным графиком относительно оси $Oy$, и получаем график функции $y = x^2 - 3|x| + 2$ (следует учесть, что $x^2 = |x|^2$).

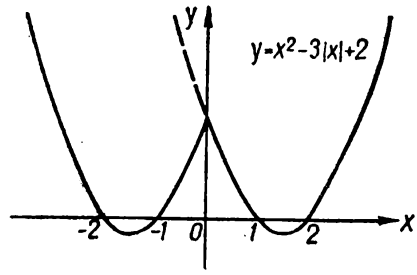



Рис. 69.

2. Строим график функции $y = \sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$ и отображаем его симметрично относительно оси ординат (рис. 70).

Б. Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, достаточно все части графика $y = f(x)$, для которых $y \geqslant 0$, оставить без изменения, а те части, при которых $y < 0$, отобразить симметрично относительно оси абсцисс (рис. 71).

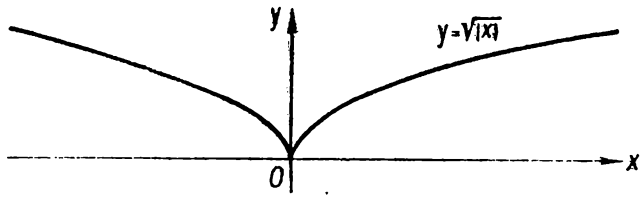



Рис. 70

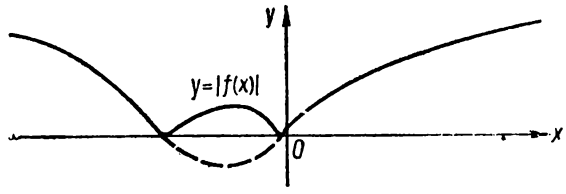



Рис. 71.

Пример. Построить график $y = \frac{1}{|x|}$. Строим график $y = \frac{1}{x}$ (рис. 72), и часть графика, лежащую над осью абсцисс $y \geqslant 0$, оставляем без изменения и к ней достраиваем линию, симметричную относительно оси абсцисс с той частью, которая лежит под осью абсцисс ($y < 0$).

В. Чтобы построить график $|y| = f(x)$, достаточно те части графика $y = f(x)$, на которых $f(x) \geqslant 0$, оставить без изменения и к ним

построить кривые, симметричные с ними относительно оси абсцисс (рис. 73). Часть графика функции $y = f(x)$, где $f(x) < 0$, отбрасывается. Заметим, что $|y| = f(x)$ — функция двузначная, если $y = f(x)$ — однозначная: $y = \pm f(x)$ при $f(x) \geqslant 0$.

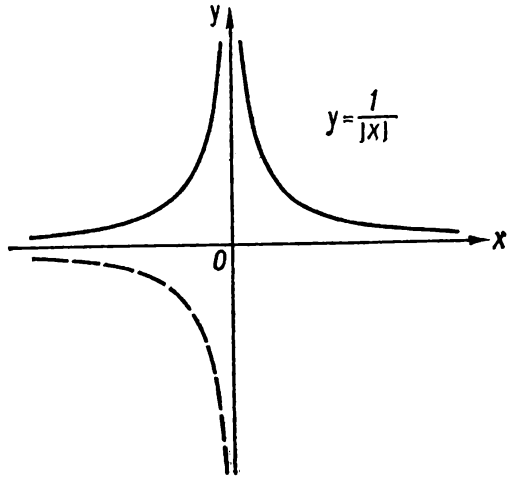



Рис. 72.

Пример. Построить график $|y| = -x^2 - 3x + 10$. Строим график $y = -x^2 - 3x + 10$ при $-x^2 - 3x + 10 \geqslant 0$, или $-5 \leqslant x \leqslant 2$. Затем построенный график отображаем симметрично относительно оси абсцисс (рис. 74).

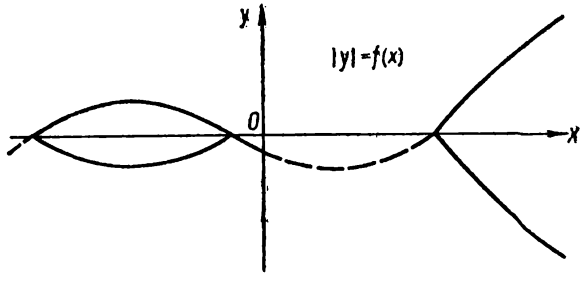



Рис. 73.

Чтобы построить графики $y = |f(|x|)|$, $|y| = |f(x)|$, $|y| = f(|x|)$, $|y| = f(|x|)$, достаточно последовательно применять преобразования А, Б, В.

Пример. Построить график $y = |x^2 - 4|x| + 3|$. Строим график $y = x^2 - 4|x| + 3$ (рис. 75).

Затем те части графика, где $y < 0$, отображаем симметрично относительно оси $Ox$ и получаем искомый график (рис. 76).

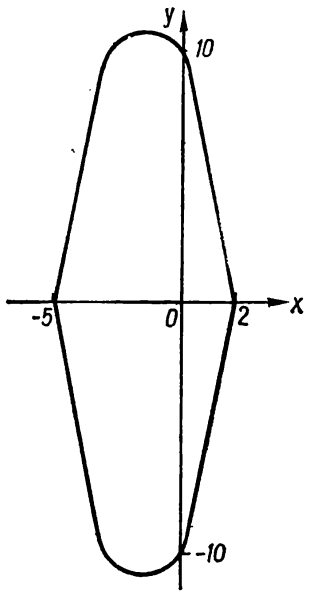



Рис. 74.

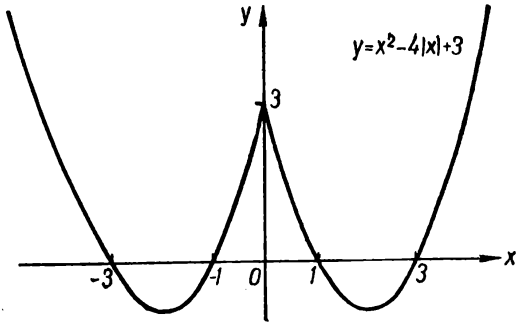



Рис. 75.

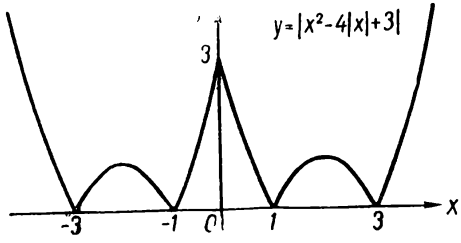



Рис. 76.

## § 8. Графические способы решения уравнений, неравенств и их систем

При решении уравнений, неравенств и их систем часто приходится прибегать к графическим способам их решения, используя графики функций. При этом, вообще говоря, получаются приближенные решения, зависящие от точности построения графиков.

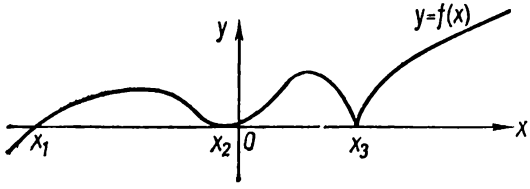



Рис. 77.

**Графическое решение уравнений.** Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0. \qquad (1)$$

Если построить график функции $y = f(x)$, то точки, в которых график функции пересекает ось $Ox$ или соприкасается с осью $Ox$, есть действительные корни уравнения, так как в этих точках $y = 0$, т. е. $f(x) = 0$ (рис. 77).

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 4x + 2 = 0$. Строим график функции $f(x) = x^2 - 4x + 2$ (рис. 78). По графику функции определяем $x_1 \approx 0{,}6$, $x_2 \approx 3{,}4$ (сравните с точными корнями).

Ответ. $x_1 \approx 0{,}6$, $x_2 \approx 3{,}4$.

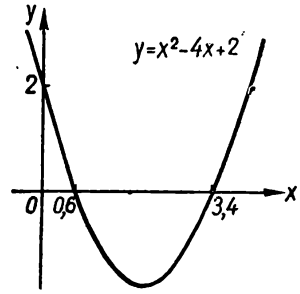


Рис. 78.

Часто бывает удобнее представить уравнение (1) в виде

$$f_1(x) = f_2(x). \qquad (2)$$

Иногда уравнение уже задано в таком виде. Чтобы решить графически уравнение (2), достаточно построить графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на одном чертеже. Абсциссы точек пересечения или соприкосновения графиков этих функций есть действительные корни уравнения (2) (рис. 79).

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - |x| - 2 = 0$.

Представим уравнение в виде $x^2 = |x| + 2$ и построим графики функций $y = x^2$ и $y = |x| + 2$ (рис. 80). По рисунку находим $x_1 \approx -2$, $x_2 \approx 2$. Подстановкой в уравнение убеждаемся, что эти корни точные.

Ответ. $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

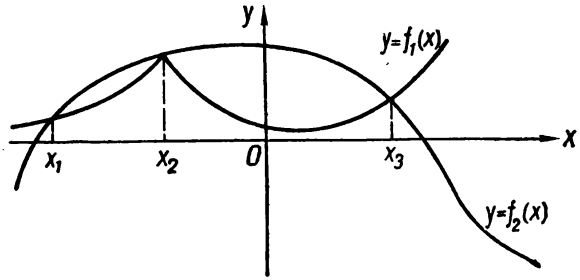


Рис. 79.

Пример 3. Решить уравнение $x^3 + x - 6 = 0$.

Представим уравнение в виде $x^3 = -x + 6$ и построим графики функций $y = x^3$ и $y = -x + 6$ (масштаб по оси $Ox$ удобно взять меньший, чем по оси $Oy$) (рис. 81). По рисунку находим $x \approx 1{,}6$.

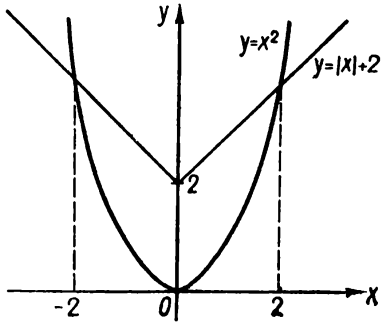


Рис. 80.

Ответ. $x \approx 1{,}6$.

**Графическое решение системы двух уравнений с двумя неизвестными.** Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

где $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ — заданные функции от $x$ и $y$.

Предположим, что каждое из уравнений системы можно решить

относительно одной из неизвестных, например $y$. Тогда, решив каждое из уравнений относительно $y$, получим систему

$$\begin{cases} y = f_1(x), \\ y = f_2(x). \end{cases}$$

Функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в общем случае не однозначные.

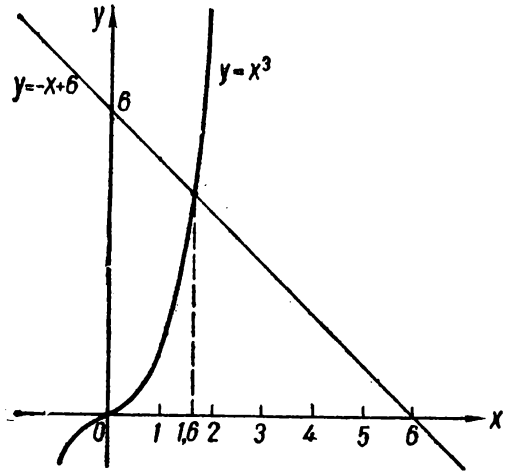



Рис. 81.

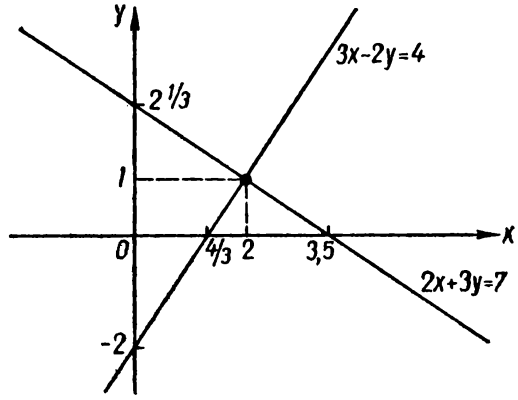



Рис. 82.

Построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, найдем координаты точек пересечения и точек соприкосновения графиков, которые и являются решениями данной системы.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0, \\ 3x - 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

Каждое из уравнений системы определяет $y$ как линейную функцию от $x$. Поэтому графики этих функций есть прямые линии (рис. 82).

По рисунку находим $x \approx 2$, $y \approx 1$. Проверкой убеждаемся, что это точное решение.

Ответ. $x = 2$, $y = 1$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 2y = 0, \\ y^2 - 4y - 2x = 0. \end{cases}$$

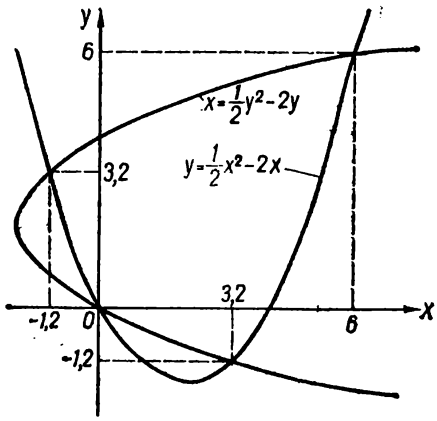



Рис. 83.

Первое уравнение решаем относительно $y$, а второе относительно $x$. Получим систему

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \\ x = \frac{1}{2}y^2 - 2y. \end{cases}$$

Строим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ и $x = \frac{1}{2}y^2 - 2y$ (рис. 83).

По рисунку находим

$$\begin{cases} x_1 \approx 1{,}2, \\ y_1 \approx 3{,}2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 \approx 3{,}2, \\ y_3 \approx -1{,}2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 \approx 6, \\ y_4 \approx 6. \end{cases}$$

Значения $x_2 = 0$ и $y_2 = 0$ точные (по построению). Проверка показывает, что значения $x_4 = 6$ и $y_4 = 6$ тоже точные.

Ответ.

$$\begin{cases} x_1 \approx -1{,}2, \\ y_1 \approx 3{,}2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 \approx 3{,}2, \\ y_3 \approx -1{,}2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 6, \\ y_4 = 6. \end{cases}$$

Точные значения двух остальных решений следующие:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{5}, \\ y_1 = 1 + \sqrt{5}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 1 + \sqrt{5}, \\ y_3 = 1 - \sqrt{5}. \end{cases}$$

Читателю предлагается найти все решения системы аналитически.

**Графическое решение неравенств и систем неравенств с одним неизвестным.** Рассмотрим два основных случая неравенств с одним неизвестным: $f(x) > 0$ и $f_1(x) > f_2(x)$. Неравенства $f(x) < 0$, $f_1(x) < f_2(x)$, $f(x) \geqslant 0$, $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, $f(x) \leqslant 0$ и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ решаются аналогично.

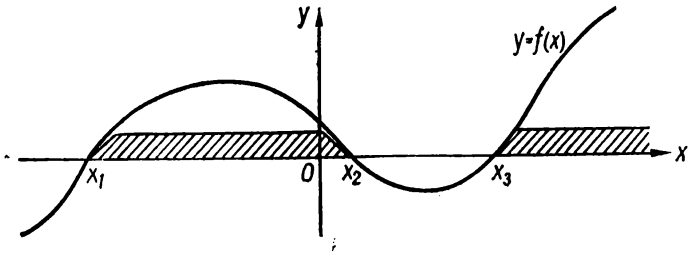



Рис. 84.

1. Решение неравенства $f(x) > 0$. Строим график функции $y = f(x)$ (рис. 84). Решениями неравенства будут все значения $x$, при которых график функции $y = f(x)$ находится над осью $Ox$. Следует помнить, что результат получается приближенный.

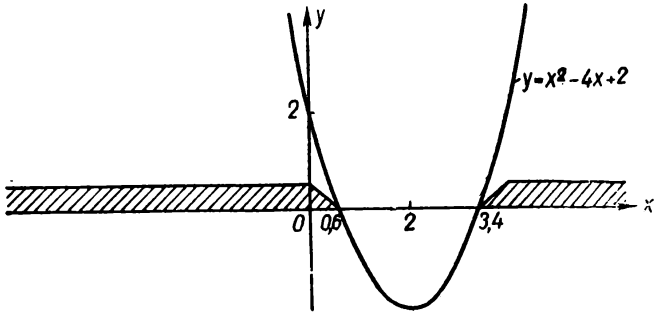



Рис. 85.

Пример 1. Решить неравенство $x^2 - 4x + 2 > 0$. Строим график функции $y = x^2 - 4x + 2$ (рис. 85). По графику находим $-\infty < x < 0{,}6$ и $3{,}4 < x < +\infty$.

Ответ. $-\infty < x < 0{,}6$ и $3{,}4 < x < +\infty$.

Читателю предлагается для сравнения найти точное решение.

Пример 2. Решить неравенство $x^2 - 5x + 4 < 0$.

Строим график функции $y = x^2 - 5x + 4$ (рис. 86). По графику находим $1 < x < 4$. Убедиться, что это решение точное.

Ответ. $1 < x < 4$.

2. Решение неравенства $f_1(x) > f_2(x)$. Строим графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (рис. 87). Решениями неравенства будут все значения $x$, при которых график функции $y = f_1(x)$ находится над графиком функции $y = f_2(x)$ (на рисунке интервал $x_1 < x < x_2$).

Пример 3. Решить неравенство $x^2 - x - 6 > \sqrt[3]{x^2}$.

Строим графики функций $y = x^2 - x - 6$ и $y = \sqrt[3]{x^2}$ (рис. 88). По рисунку находим $-\infty < x < -2{,}4$ и $3{,}5 < x < +\infty$.

Ответ. $-\infty < x < -2{,}4$ и $3{,}5 < x < +\infty$.

Пусть дана система двух неравенств с одним неизвестным

$$\begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0. \end{cases}$$

Для определения решений этой системы графическим способом строим

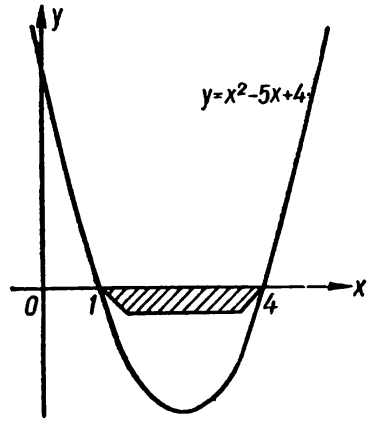



Рис. 86

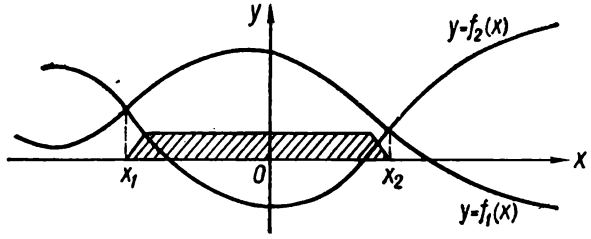



Рис. 87.

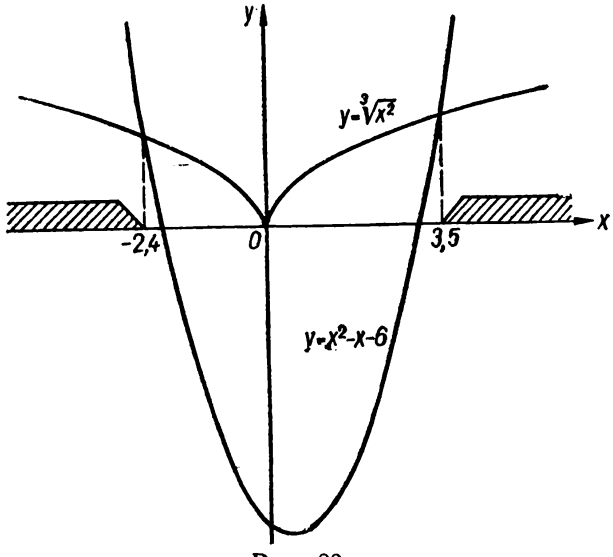



Рис. 88.

графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (рис. 89). Решениями будут все значения $x$, при которых графики обеих функций находятся над осью $Ox$ (на рисунке интервал $x_1 < x < x_2$). Аналогично решаются другие виды систем двух и большего числа неравенств с одним неизвестным.

Пример 4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geqslant 0, \\ 4 - x^2 > 0. \end{cases}$$

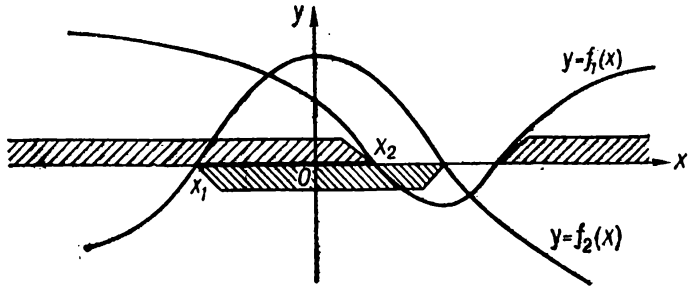



Рис. 89.

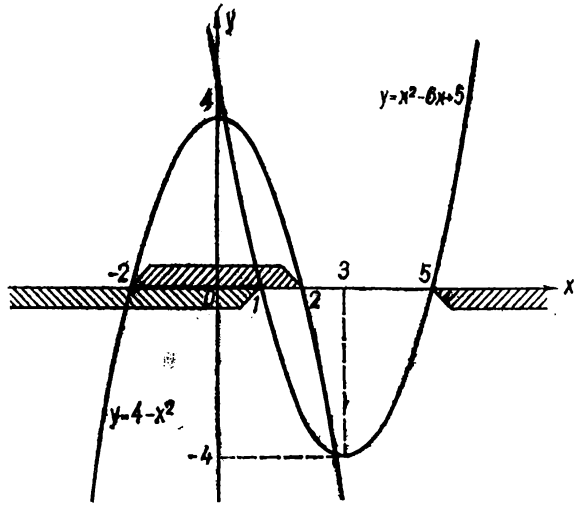



Рис. 90.

Строим графики функций $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = 4 - x^2$ (рис. 90). По рисунку находим $-2 < x < 1$.

Ответ. $-2 < x < 1$.

Пример 5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0, \\ x^2 - x - 6 < 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

Строим графики функций $y = x^2 + 2x - 3$, $y = x^2 - x - 6$ и $y = x + 1$ (рис. 91). По рисунку находим те значения $x$, при которых первые две функции отрицательные, а третья — положительная. Эти значения находятся в интервале $(-1; 1)$.

Ответ. $-1 < x < 1$.

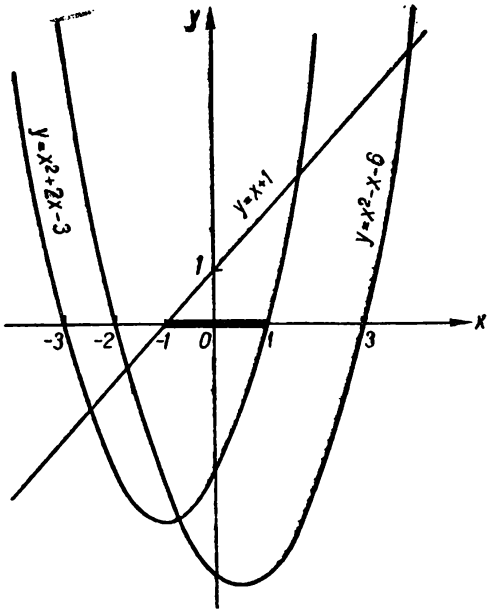



Рис. 91.

## § 9. Системы неравенств с двумя переменными

**Основные понятия.** Систему двух неравенств с двумя переменными можно привести к одному из видов

$$\begin{cases} f_1(x, y) \lessgtr 0, \\ f_2(x, y) \lessgtr 0, \end{cases} \tag{7.5}$$

где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — выражения, содержащие переменные $x$ и $y$ или хотя бы одну из них (функции от $x$ и $y$).

Решением системы двух неравенств (7.5) называется упорядоченная пара чисел $(\alpha; \beta)$, которая при подстановке вместо переменных $(x; y)$ обращает каждое неравенство данной системы в тождественное (верное) неравенство.

Например, для системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 > 5, \\ x + 2y \leqslant 8 \end{cases}$$

пара чисел (3; 1) является решением, так как при подстановке

$x = 3$ и $y = 1$ эта система обращается в систему числовых неравенств

$$\begin{cases} 7 > 5, \\ 5 \leqslant 8, \end{cases}$$

каждое из которых верно; пара чисел (2; 1) не является решением данной системы, так как при подстановке ее в неравенства системы получаем систему

$$\begin{cases} 3 > 5, \\ 4 \leqslant 8, \end{cases}$$

первое неравенство которой неверно.

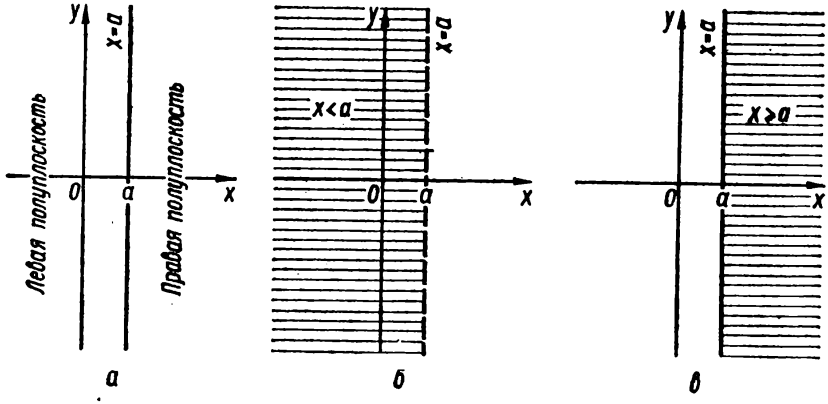



Рис. 92.

Решить систему неравенств с двумя переменными означает найти множество всех ее решений и показать, что она решений не имеет.

*Областью определения* системы двух неравенств с двумя переменными (7.5) называется множество пар чисел $(x; y)$, при которых существуют оба выражения $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$.

Если все решения одной системы неравенств с двумя переменными есть решения другой системы с теми же переменными, то вторая система неравенств называется следствием первой.

Две системы неравенств с двумя переменными называются *равносильными* (эквивалентными), если каждая из них есть следствием другой или если обе системы не имеют решений.

Теоремы о равносильности систем неравенств с двумя переменными аналогичны (и доказываются аналогично) соответствующим теоремам для систем уравнений с двумя переменными.

**Решение систем двух неравенств с двумя переменными, каждое из которых содержит только одну из переменных.** На координатной плоскости $xOy$ каждой паре чисел $(\alpha; \beta)$ соответствует точка с абсциссой $\alpha$ и ординатой $\beta$. Если эта пара чисел является решением системы (7.5), то говорят, что точка $(\alpha; \beta)$ удовлетворяет этой системе, или что точка $(\alpha; \beta)$ есть решение данной системы.

На координатной плоскости $xOy$ уравнению $x = a$ соответствует прямая линия, проходящая через точку $a$ оси $Ox$ параллельно оси

$Oy$. Эта прямая делит координатную плоскость на две полуплоскости: левую и правую (рис. 92, *а*).

Неравенству $x < a$ удовлетворяют все точки левой полуплоскости и не удовлет оряют все точки прямой $x = a$ и все точки правой полуплоскости (рис. 92, *б*). Неравенству $x \leqslant a$ удовлетворяют все точки левой полуплоскости и все точки прямой $x = a$ и не удовлетворяют все точки правой полуплоскости.

Аналогично, неравенству $x > a$ удовлетворяют все точки правой полуплоскости и не удовлетворяют все точки прямой $x = a$ и все точки левой полуплоскости, а неравенству $x \geqslant a$ удовлетворяют все точки правой полуплоскости и все точки прямой $x = a$ и не удовлетворяют все точки левой полуплоскости (рис. 92, *в*).

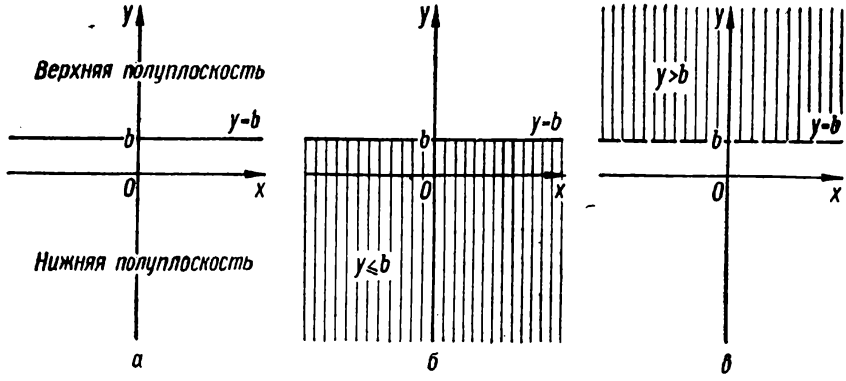



Рис. 93.

Уравнению $y = b$ в координатной плоскости $xOy$ соответствует прямая линия, проходящая через точку $b$ оси $Oy$ параллельно оси $Ox$. Эта прямая делит координатную плоскость на верхнюю и нижнюю полуплоскости (рис. 93, *а*).

Неравенству $y < b$ удовлетворяют все точки нижней полуплоскости и не удовлетворяют все точки прямой $y = b$ и все точки верхней полуплоскости. Неравенству $y \leqslant b$ удовлетворяют все точки нижней полуплоскости и все точки прямой $y = b$ и не удовлетворяют все точки верхней полуплоскости (рис. 93, *б*).

Неравенству $y > b$ удовлетворяют все точки верхней полуплоскости и не удовлетворяют все точки прямой $y = b$ и все точки нижней полуплоскости (рис. 93, *в*). Неравенству $y \geqslant b$ удовлетворяют все точки верхней полуплоскости и все точки прямой $y = b$ и не удовлетворяют все точки нижней полуплоскости.

Если точки прямой (или кривой) являются решениями неравенства, то ее на рисунке будем изображать сплошной линией, а если точки прямой (или кривой) не являются решениями соответствующего неравенства, то ее будем изображать пунктирной линией (рис. 92 и 93).

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0, \\ 2y - 6 \geqslant 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим отдельно каждое неравенство системы.

а) $x^2 - 5x + 4 < 0$. Разложив левую часть неравенства на множители, получим

$$(x - 1)(x - 4) < 0,$$

откуда находим $1 < x < 4$, т. е. решениями этого неравенства есть координаты точек (или точки) плоскости $xOy$, лежащие между прямыми $x = 1$ и $x = 4$ (рис. 94).

б) $2y - 6 \geqslant 0$. Решив это неравенство, находим $y \geqslant 3$ или $3 \leqslant y < +\infty$, т. е. решениями этого неравенства есть координаты всех точек (или точки), лежащих на прямой $y = 3$ и координаты всех точек, лежащих над этой прямой (верхняя полуплоскость). На область,

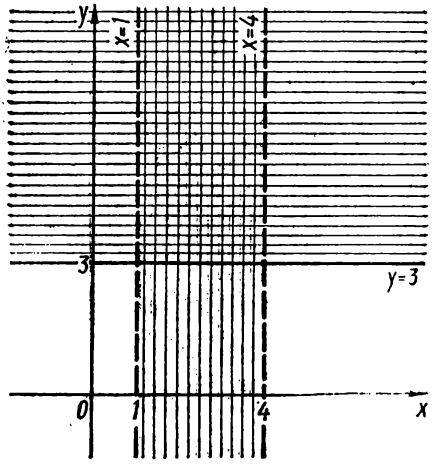



Рис. 94.

координаты точек которой являются решениями первого неравенства системы, нанесем штриховку вертикальными прямыми, а на область, точки которой являются решениями второго неравенства системы, нанесем штриховку горизонтальными прямыми (рис. 94).

Решениями системы есть точки (координаты точек) области, заштрихованной дважды (в клеточку).

Аналитически эти решения можно записать так:

$$\begin{cases} 1 < x < 4, \\ 3 \leqslant y < +\infty. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} 1 < x < 4, \\ 3 \leqslant y < +\infty. \end{cases}$

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 \leqslant 0, \\ y^4 - 10y^2 + 9 < 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. а) $x^4 - 5x^2 + 4 \leqslant 0$. Разложив левую часть неравенства на множители, получим

$$(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) \leqslant 0,$$

откуда по правилу «змейки» находим

$$-2 \leqslant x \leqslant -1, \text{ или } 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

б) $y^4 - 10y^2 + 9 < 0$. Аналогично решая это неравенство, получим

$$(y+3)(y+1)(y-1)(y-3) < 0,$$

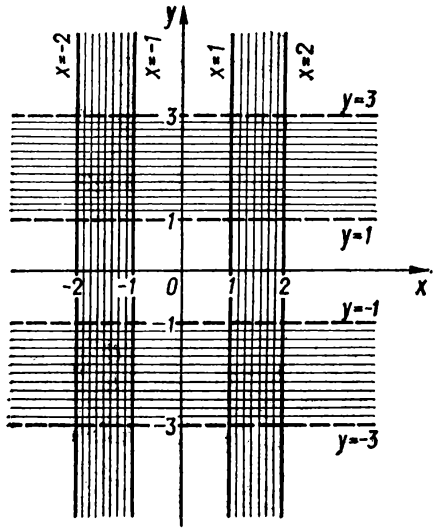



Рис. 95.

откуда

$$-3 < y < -1, \text{ или } 1 < y < 3.$$

Решения этой системы неравенств найдем графически на координатной плоскости $xOy$, как это показано на рис. 95.

Аналитически решения этой системы неравенств можно записать в виде совокупности следующих систем неравенств

$$\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ -3 < y < -1, \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ 1 < y < 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ -3 < y < -1, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1 < y < 3, \end{cases}$$

или, используя символ модуля, в виде

$$\begin{cases} 1 \leqslant |x| \leqslant 2, \\ 1 < |y| < 3. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} 1 \leqslant |x| \leqslant 2, \\ 1 < |y| < 3. \end{cases}$

**Решение систем двух линейных неравенств с двумя переменными.** Систему двух линейных неравенств с двумя переменными всегда можно привести к одному из видов

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 \lessgtr 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 \lessgtr 0, \end{cases} \tag{7.6}$$

где $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A_2$, $B_2$, $C_2$ — действительные числа (коэффициенты системы), а $x$ и $y$ — переменные.

Рассмотрим одно линейное неравенство с двумя переменными

$$Ax + By + C \lessgtr 0. \tag{7.7}$$

Если $B = 0$, то неравенство принимает вид

$$Ax + C \lessgtr 0, \text{ или } x \lessgtr -\frac{C}{A} \ (A \neq 0).$$

Обозначив $-\frac{C}{A} = a$, получим неравенства

$$x \lessgtr a,$$

которые были рассмотрены ранее.

Если $A = 0$, а $B \neq 0$, то неравенство (7.7) принимает вид

$$By + C \lessgtr 0, \text{ или } y \lessgtr -\frac{C}{B} \ (B \neq 0).$$

Обозначив $-\frac{C}{B} = b$, получим неравенства

$$y \lessgtr b,$$

рассмотренные ранее.

Будем рассматривать неравенство (7.7) при $AB \neq 0$. В этом случае его можно привести к одному из видов

$$y \lessgtr -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначив $-\frac{A}{B} = k$, а $-\frac{C}{B} = b$, получим

$$y \lessgtr kx + b.$$

Уравнению $y = kx + b$ на координатной плоскости $xOy$ соответствует прямая линия, которая делит эту плоскость на две полуплоскости: верхнюю и нижнюю (рис. 96, *а*).

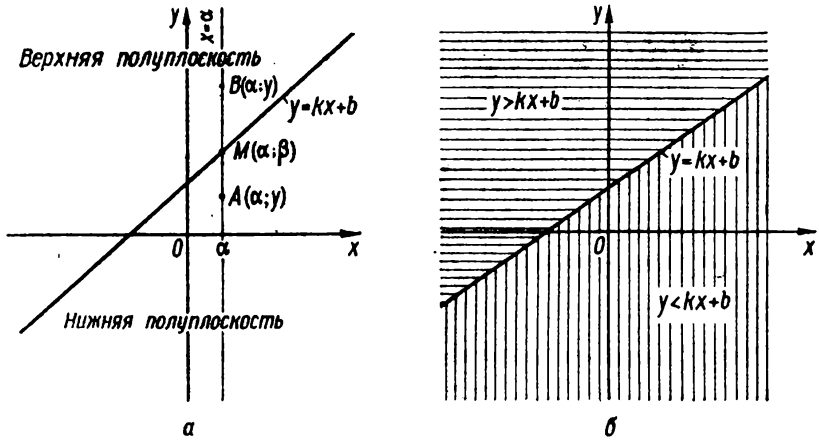
Возьмем на оси $Ox$ точку $\alpha$ и проведем через нее прямую $x = \alpha$. Точка $M$ пересечения прямых

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ y = kx + b \end{cases}$$

будет иметь координаты $M(\alpha; \beta)$, где $\beta \equiv k\alpha + b$. Если на прямой $x = \alpha$ взять точку $A$ с ординатой $y < \beta$, то она будет лежать под

данной прямой, т. е. в нижней полуплоскости, а если на прямой $x = a$ взять точку $B$ с ординатой $y > \beta$, то эта точка будет лежать над данной прямой, т. е. в верхней полуплоскости (рис. 96, *а*).

Таким образом, неравенству $y < kx + b$ удовлетворяют все точки плоскости $xOy$, лежащие под прямой $y = kx + b$ (в нижней полуплоскости) и не удовлетворяют все точки этой прямой и все точки верхней полуплоскости, а неравенству $y > kx + b$ удовлетворяют все точки, лежащие над прямой $y = kx + b$ (верхней полуплоскости) и не удовлетворяют все точки этой прямой и все точки нижней полуплоскости. Если неравенства нестрогие $y \leqslant kx + b$ или $y \geqslant kx + b$, то соответственно к решениям относятся все точки прямой $y = kx + b$ (рис. 96, *б*).




*а* *б*

Рис. 96.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x - y > 2, \\ x + 3y > 6. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Первый способ (геометрический). Преобразуем данную систему неравенств к виду

$$\begin{cases} y < x - 2, \\ y > -\frac{1}{3}x + 2. \end{cases}$$

Построим прямые $y = x - 2$ и $y = -\frac{1}{3}x + 2$. Для этого найдем точку их пересечения из системы уравнений

$$\begin{cases} y = x - 2, \\ y = -\frac{1}{3}x + 2. \end{cases}$$

Отсюда $x = 3$, $y = 1$, т. е. прямые пересекаются в точке (3; 1). Первая прямая пересекает ось ординат в точке (0; —2), а вторая — (0; 2). Теперь проводим прямые через известные две их точки. Данные прямые построены на рис. 97.

Решением первого неравенства системы есть все точки плоскости $xOy$, лежащие под прямой $y = x - 2$, а решениями второго неравенства системы — точки, лежащие над прямой $y = -\frac{1}{3}x + 2$ (рис. 97).

Решениями данной системы есть координаты точек области, заштрихованной дважды (в косую клеточку), за исключением точек прямых, ограничивающих эту область.

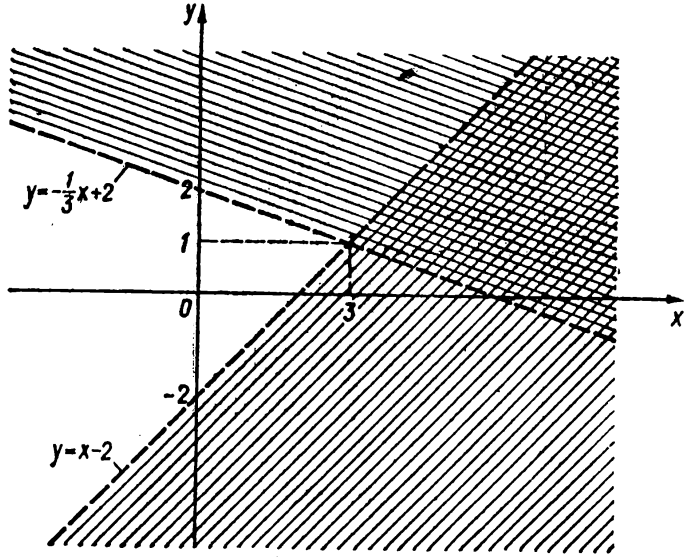



Рис. 97.

Аналитически множество решений данной системы можно записать так:

$$\begin{cases} 3 < x < +\infty, \\ y > -\frac{1}{3}x + 2, \\ y < x - 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3 < x < +\infty, \\ -\frac{1}{3}x + 2 < y < x - 2. \end{cases}$$

Второй способ (способ сравнения). Приведем данную систему неравенств (1) к виду

$$\begin{cases} y < x - 2, \\ y > -\frac{1}{3}x + 2. \end{cases}$$

Допуская, что система имеет решения, по транзитивному свойству получаем

$$-\frac{1}{3}x+2<y<x-2,$$

т. е.

$$-\frac{1}{3}x+2<x-2, \text{ или } -\frac{4}{3}x<-4;$$

отсюда $x>3$.

Таким образом, получаем

$$\begin{cases} 3<x<+\infty, \\ -\frac{1}{3}x+2<y<x-2. \end{cases}$$

Из найденного множества точек возьмем точку (6; 1). Подставив координаты этой точки в неравенства данной системы, убеждаемся, что она есть решение этой системы.

Ответ. $\begin{cases} 3<x<+\infty, \\ -\frac{1}{3}x+2<y<x-2. \end{cases}$

**Пример 2.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x-3y>2, \\ x+y<6. \end{cases} \tag{1}$$

**Решение.** Линейное уравнение с двумя переменными $x$ и $y$, если коэффициенты при переменных отличны от нуля, можно представить в виде

$$x=py+q.$$

Этому уравнению в плоскости $xOy$ соответствует прямая, которая делит плоскость на две полуплоскости: левую и правую. Точки левой полуплоскости есть решениями неравенства $x<py+q$, а точки правой полуплоскости — решениями неравенства $x>py+q$. Если неравенства $x\leqslant py+q$ или $x\geqslant py+q$ нестрогие, то к точкам указанных полуплоскостей следует отнести и точки прямой $x=py+q$.

Каждое неравенство системы (1) удобно решить относительно переменной $x$, т. е. систему (1) представить в виде

$$\begin{cases} x>3y+2, \\ x<6-y. \end{cases} \tag{2}$$

Из неравенств системы (2) по транзитивному свойству (предполагая, что система имеет решения) получаем

$$3y+2<x<6-y,$$

откуда

$$y<1.$$

Решениями системы (1), равносильной системе (2), могут быть только те точки, ординаты которых меньше 1, а абсциссы удовлетворяют системе неравенств $3y+2<x<6-x$.

На рис. 98 область плоскости $xOy$, точки которой являются решениями системы (1), заштрихованы дважды (в косую клеточку).

Ответ. $\begin{cases} -\infty < y < 1, \\ 3y + 2 < x < 6 - y. \end{cases}$

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - 2y \geqslant 4, \\ x - y > 1. \end{cases} \tag{1}$$

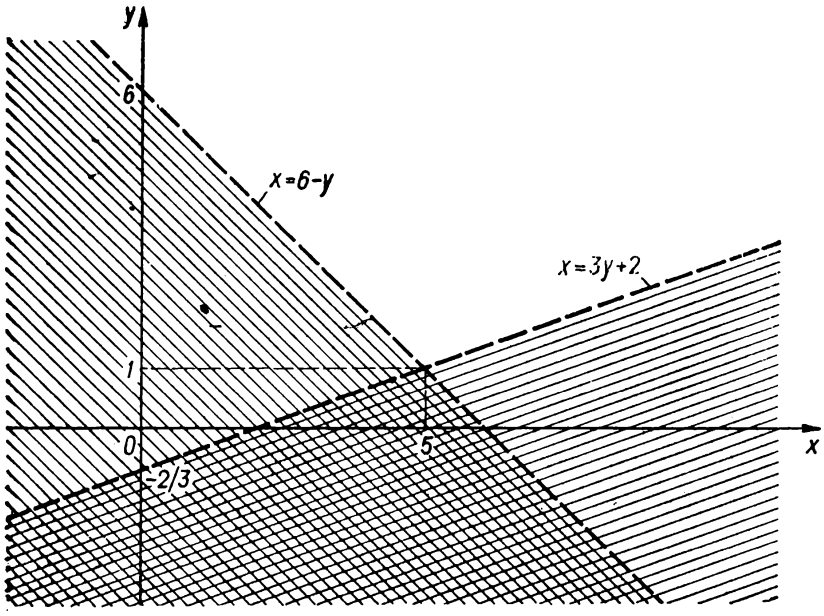



Рис. 98.

Решение. Если неравенства системы (1) представить в виде

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{2}{3}(y + 2), \\ x > y + 1, \end{cases} \tag{2}$$

или в виде

$$\begin{cases} y \leqslant \frac{3x - 4}{2}, \\ y < x - 1, \end{cases} \tag{3}$$

то способ сравнения не применим ни к системе (2), ни к системе (3).

Системы (2) и (3) на каждую из переменных $x$ или $y$ в отдельности никаких ограничений не накладывают. Такие системы неравенств называются неразрешимыми ни относительно $x$, ни относительно $y$.

Эта система показывает, что для решения систем неравенств с двумя переменными важно уметь пользоваться графическим методом решения.

Найдем графически решения системы (3), равносильной системе (1). Построим в плоскости $xOy$ прямые, определяемые уравнениями $y = \frac{3x-4}{2}$ и $y = x - 1$ (рис. 99).

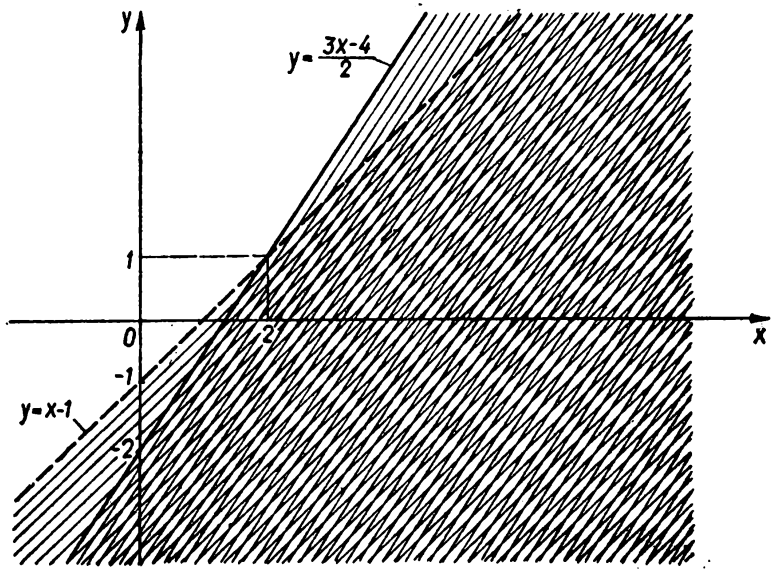



Рис. 99.

Из системы (3) следует, что ее решениями будут все точки плоскости $xOy$, лежащие ниже прямой $y = \frac{3x-4}{2}$, включая точки этой прямой при $-\infty < x < 2$, и точки, лежащие ниже прямой $y = x - 1$, за исключением точек этой прямой при $2 \leqslant x < +\infty$.

Ответ. $\begin{cases} -\infty < x < 2, \\ y \leqslant \frac{3x-4}{2}, \end{cases}$ или $\begin{cases} 2 \leqslant x < +\infty, \\ y < x - 1. \end{cases}$

Рассмотрим пример решения системы трех линейных неравенств с двумя переменными.

Пример 4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x + y - 3 \leqslant 0, \\ x - 4y + 7 \geqslant 0, \\ 2x + 7y - 1 \geqslant 0. \end{cases} \quad (1)$$

Р е ш е н и е. Представим неравенства системы (1) в виде

$$\begin{cases} y \leqslant 3 - x, \\ y \leqslant \frac{1}{4}(x + 7), \\ y \geqslant \frac{1}{7}(1 - 2x). \end{cases} \qquad (2)$$

Рассмотрим прямые $y = 3 - x$, $y = \frac{1}{4}(x + 7)$ и $y = \frac{1}{7}(1 - 2x)$.

Находим точки пересечения этих прямых попарно:

а) $\begin{cases} y = 3 - x, \\ y = \frac{1}{4}(x + 7), \end{cases}$ откуда (1; 2);

б) $\begin{cases} y = 3 - x, \\ y = \frac{1}{7}(1 - 2x), \end{cases}$ откуда (4; —1);

в) $\begin{cases} y = \frac{1}{4}(x + 7), \\ y = \frac{1}{7}(1 - 2x), \end{cases}$ откуда (—3; 1).

Зная по две точки на каждой прямой, строим эти прямые (рис. 100). На рис. 100 заштрихованы те части плоскости $xOy$, точки которых не являются решениями системы (2), т. е. области, лежащие над прямыми $y = 3 - x$, $y = \frac{1}{4}(x + 7)$ и под прямой $y = \frac{1}{7}(1 - 2x)$.

Решениями системы (2), равносильной системе (1), есть точки незаштрихованного треугольника, включая точки его сторон.

О т в е т. $\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{7}(1 - 2x) \leqslant y \leqslant \frac{1}{4}(x + 7), \end{cases}$ или

$\begin{cases} 1 < x \leqslant 4, \\ \frac{1}{7}(1 - 2x) \leqslant y \leqslant 3 - x. \end{cases}$

**Решение простейших систем нелинейных неравенств с двумя переменными.** Неравенство с двумя переменными $x$ и $y$ в общем случае можно привести к одному из видов

$$f(x;\ y) \lessgtr 0. \qquad (7.8)$$

Пусть это неравенство разрешимо относительно одной из переменных, например относительно $y$, тогда его можно представить в виде

$$y \lessgtr \varphi(x). \qquad (7.9)$$

Пусть функция $y = \varphi(x)$ определена в некоторой области $D$ (интервале, нескольких интервалах, всей числовой оси и т. д.).

Построим график функции $y = \varphi(x)$ и из области ее определения возьмем произвольное значение аргумента $x = \alpha$. Прямая $x = \alpha$ пересечет график функции $y = \varphi(x)$ в точке $M(\alpha; \beta)$, где $\beta \equiv \varphi(\alpha)$.

Если ордината точки $A(\alpha; y)$ прямой $x = \alpha$ меньше, чем $\beta$, то точка $A$ лежит под кривой и является решением неравенства $y < \varphi(x)$; если же ордината точки $B(\alpha; y)$ прямой $x = \alpha$ больше, чем $\beta$, то точка $B$ лежит над кривой $y = \varphi(x)$ и является решением неравенства $y > \varphi(x)$.

Таким образом, решениями неравенства $y < \varphi(x)$ являются все точки (пары чисел), лежащие под кривой $y = \varphi(x)$, а решениями неравенства $y > \varphi(x)$ есть все точки, лежащие над кривой $y = \varphi(x)$. Если неравенства нестрогие $-y \leqslant \varphi(x)$ или $y \geqslant \varphi(x)$, то к их решениям принадлежат все точки кривой $y = \varphi(x)$ (рис. 101).

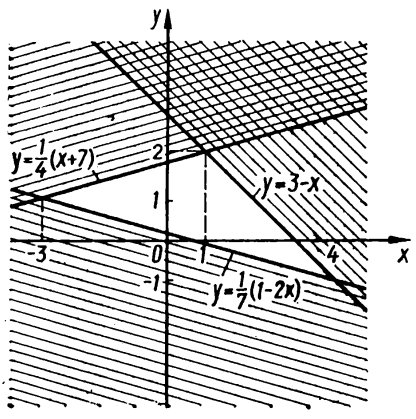



Рис. 100.

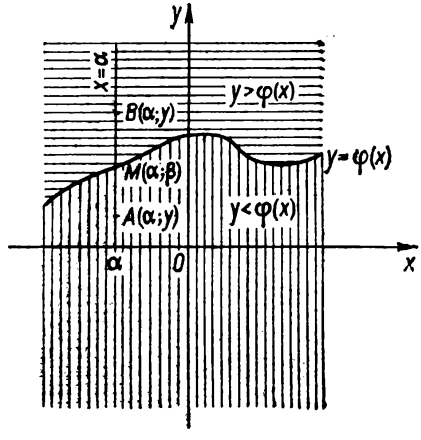



Рис. 101.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} y > x^2, \\ x + y - 2 \leqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Представим систему (1) в виде

$$\begin{cases} y > x^2, \\ y \leqslant 2 - x. \end{cases} \tag{2}$$

Из системы (2), при условии, что она имеет решения, по транзитивному свойству следует

$$x^2 < 2 - x, \text{ или } x^2 + x - 2 < 0,$$

откуда

$$-2 < x < 1.$$

Решениями системы (2), равносильной системе (1), будут

$$\begin{cases} -2 < x < 1, \\ x^2 < y \leqslant 2 - x \end{cases}$$

(рис. 102).

Ответ. $\begin{cases} -2 < x < 1, \\ x^2 < y \leqslant 2 - x. \end{cases}$

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant \dfrac{6}{x}, \\ x + y \leqslant 7. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Представим систему (1) в виде

$$\begin{cases} y \geqslant \dfrac{6}{x}, \\ y \leqslant 7 - x. \end{cases} \tag{2}$$

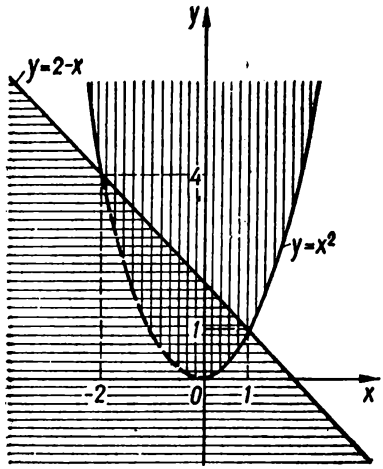



Рис. 102.

Построим кривые, соответствующие уравнениям $y = \dfrac{6}{x}$ и $y = 7 - x$ (рис. 103). Из рис. 103 графически находим решения

$$\begin{cases} -\infty < x < 0, \\ \dfrac{6}{x} \leqslant y \leqslant 7 - x, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 6, \\ \dfrac{6}{x} \leqslant y \leqslant 7 - x. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} -\infty < x < 0, \\ \dfrac{6}{x} \leqslant y \leqslant 7 - x \end{cases}$ или $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 6, \\ \dfrac{6}{x} \leqslant y \leqslant 7 - x. \end{cases}$

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y^2 < 5x + 6. \end{cases} \tag{1}$$

Р е ш е н и е. Из первого неравенства системы следует, что его решениями есть только те точки, ординаты которых неотрицательны. Поэтому систему (1) можно представить в виде

$$\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y < \sqrt{5x+6}. \end{cases} \tag{2}$$

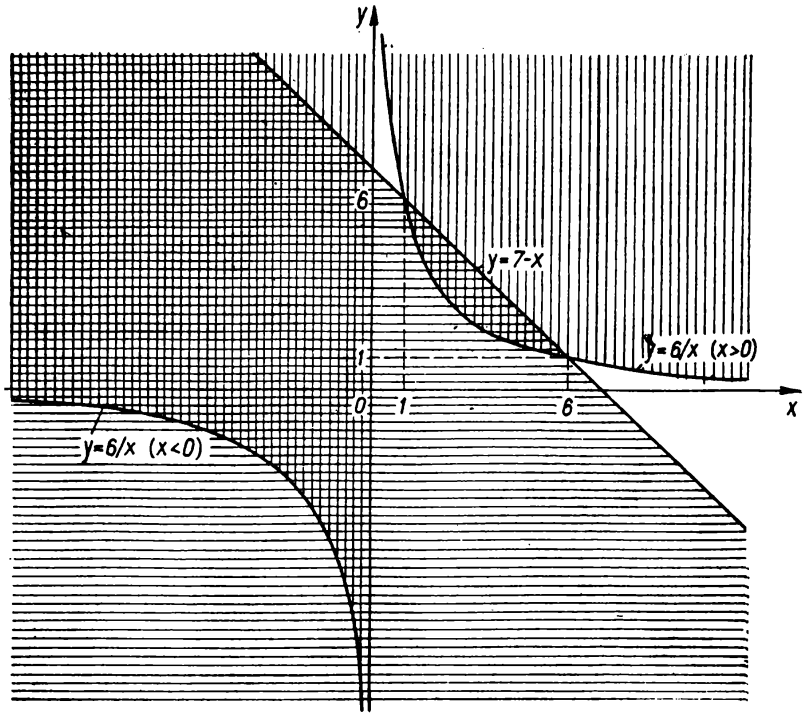



Рис. 103.

Построив кривые $y = x^2$ и $y = \sqrt{5x+6}$ (рис. 104), графически найдем решения системы

$$\begin{cases} -1 < x < 2, \\ x^2 \leqslant y < \sqrt{5x+6}. \end{cases}$$

О т в е т. $\begin{cases} -1 < x < 2, \\ x^2 \leqslant y < \sqrt{5x+6}. \end{cases}$

Рассмотрим неравенства вида

$$x^2 + y^2 \lessgtr R^2. \tag{7.10}$$

Найдем расстояние от начала координат до произвольной точки $M(x; y)$ плоскости $xOy$ (рис. 105).

Обозначим расстояние $OM = R\ (R > 0)$. Из прямоугольного треугольника $MAO\ (\angle MAO = 90°)$ по теореме Пифагора находим

$$AO^2 + AM^2 = OM^2,$$

так как $AO = |x|$, $AM = |y|$, то

$$|x|^2 + |y|^2 = R^2, \text{ или } x^2 + y^2 = R^2.$$

Искомое расстояние $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Координаты всех точек $(x; y)$ плоскости $xOy$, расстояние до которых от начала координат равно $R$, удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = R^2$. Все эти точки лежат на окружности радиуса $R$ с центром в начале координат.

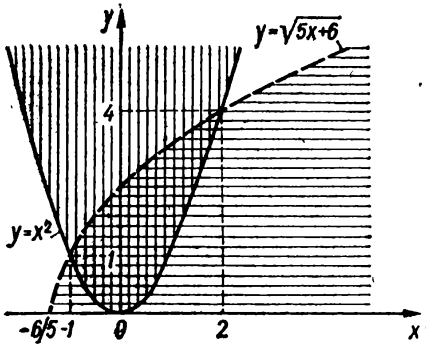



Рис. 104.

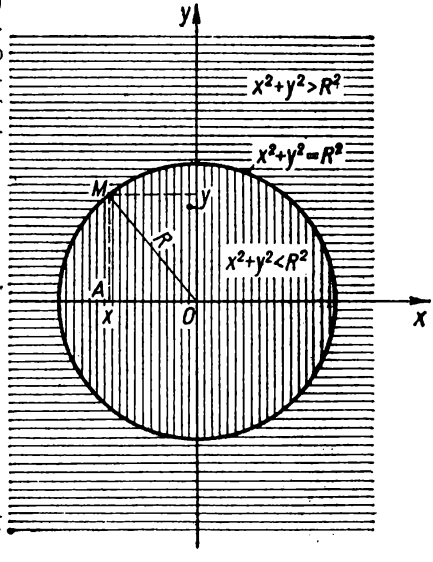



Рис. 105.

Наоборот, уравнению $x^2 + y^2 = R^2$ на плоскости $xOy$ соответствует окружность с центром в начале координат и радиусом, равным $R$ (рис. 105).

Если точка $A(x; y)$ лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью, то расстояние до этой точки $OA = \sqrt{x^2 + y^2} < R$, или $x^2 + y^2 < R^2$; если же точка $B(x; y)$ лежит вне круга, то расстояние $OB = \sqrt{x^2 + y^2} > R$, или $x^2 + y^2 > R^2$ (рис. 105).

Следовательно, решениями неравенства $x^2 + y^2 < R^2\ (R > 0)$ являются все внутренние точки круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = R^2$, а решениями неравенства $x^2 + y^2 > R^2$ являются все точки плоскости $xOy$, лежащие вне этого круга. В случае нестрогих неравенств к области решений присоединяются точки окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Пример 4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} xy \geqslant 60, \\ x^2 + y^2 < 169. \end{cases} \tag{1}$$

Р е ш е н и е. а) Если $x<0$ (при $x=0$ не удовлетворяется первое неравенство системы (1)), то систему (1) можно представить в виде системы

$$\begin{cases} y \leqslant \dfrac{60}{x}, \\ x^2+y^2<13^2, \end{cases} \tag{2}$$

которая равносильна системе (1). На рис. 106 построены гипербола

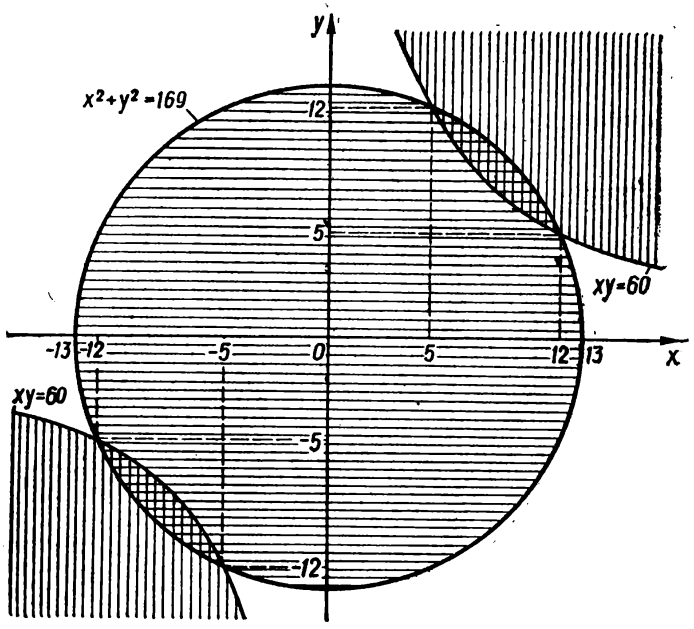



Рис. 106.

$xy=60$ и окружность $x^2+y^2=13^2$, которые (в рассматриваемом случае) пересекаются в точках (—12; —5) и (—5; —12).

Из рис. 106 находим решения системы (2)

$$\begin{cases} -12<x<-5, \\ -\sqrt{169-x^2}<y\leqslant\dfrac{60}{x}. \end{cases}$$

б) Если $x>0$, то система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} y \geqslant \dfrac{60}{x}, \\ x^2+y^2<13^2. \end{cases} \tag{3}$$

В этом случае гипербола $xy=60$ и окружность $x^2+y^2=13^2$

пересекаются в точках (5; 12) и (12; 5). Графически находим решения системы (3)

$$\begin{cases} 5 < x < 12, \\ \dfrac{60}{x} \leqslant y < \sqrt{169 - x^2}. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} -12 < x < -5, \\ -\sqrt{169 - x^2} < y \leqslant \dfrac{60}{x}, \end{cases}$ или $\begin{cases} 5 < x < 12, \\ \dfrac{60}{x} \leqslant y < \sqrt{169 - x^2}. \end{cases}$

### Упражнения

Найти область определения функций:

241. $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$.

242. $y = \dfrac{1 - x}{\sqrt[3]{3x - 6}}$.

243. $y = \sqrt[4]{\dfrac{|x - 4|}{x^2 - 8}}$.

244. $y = \dfrac{2}{|x| - 3} + \dfrac{1}{x}$.

245. $y = \sqrt{x - 1} + 2\sqrt{1 - x} + \sqrt{x^2 + 1}$.

246. $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$.

247. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}}$.

248. $y = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}} + \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$.

249. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} + \dfrac{1}{\sqrt{10 + 9x - x^2}}$.

250. $y = \sqrt{x^2 - 6x} + \sqrt{5x^2 + 2x}$.

Исследовать на четность и нечетность функции:

251. $y = x - 2|x|$.

252. $y = 3x^2 + 4|x| - 5$.

253. $y = \dfrac{2x}{x^2 + |x| + 1}$.

254. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}$.

255. $y = \dfrac{|x|}{x}$.

Найти промежутки, на которых функция принимает положительные значения:

256. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x + 6}$.

257. $y = \dfrac{1}{x - \sqrt{1 - x}}$.

Найти промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения:

258. $y = \dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{1}{x - 5}$.

259. $y = \sqrt{10 - x} - \sqrt{x - 2}$.

Найти нули функций:

260. $y = |x^2 - 6|x| + 5|$.

261. $y = \sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{2x(x - 1)} - \sqrt{x^2 - 15x}$.

Найти интервалы монотонности функций:

262. $y = x^2 - x$.

263. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

264. $y = \dfrac{x}{2 + \sqrt{x + 1}}$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций на указанных интервалах:

265 $y = x^2 - 4x + 5$ на $[0; 3]$.

266. $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 6}$ на $(-\infty, +\infty)$.

267. $y = \sqrt{x + 4} - x$ на $[-1, +\infty)$.

Построить графики функций:

268. $y = -x^2 + 3x - 2$.

269. $y = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$.

270. $y = \sqrt[3]{(x + 2)^2}$.

271. $y = \dfrac{4}{\sqrt{|x|}}$.

272. $|y| = x - 2$.

273. $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3|x| + 2$.

274. $y = |x - 1| + |x + 3|$.

275. $y = |x^2 - 6x + 5|$.

276. $y = \left| \frac{3 - |x|}{|x| - 1} \right|$.

277. $y = (x + 2)\,|\,3 - x\,|$.

Решить графическим способом уравнения:

278. $x^2 = 3x - 2$.

279. $x^3 + x - 10 = 0$.

280. $x^2 = |x| + 1$.

281. $|x - 2| = 2 - \sqrt[3]{x^2}$.

Решить графическим способом системы уравнений:

282. $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ x - 3y + 1 = 0. \end{cases}$

283. $\begin{cases} x - y = 0, \\ y = \frac{1}{x}. \end{cases}$

Решить графически неравенства:

284. $3x^2 - 4x + 1 < 0$.

285. $x^2 - 5x + 4 > 0$.

286. $\frac{1}{2} x^3 > 6 - x$.

287. $|x^2 - 2x| < 1 - x$.

Решить графически системы неравенств:

288. $\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ x^2 - 3x - 4 > 0. \end{cases}$

289. $\begin{cases} 2x^2 - 7x + 5 > 0, \\ x - 2 < 0. \end{cases}$

290. $1 < |x - 3| < 7$.

291. При каких значениях $a$ квадратный трехчлен $y = (a^2 + 6a - 4)\,x^2 - 2(a - 1)\,x - 1$ принимает отрицательные значения при всех действительных значениях $x$?

292. Найти все действительные значения $a$, при которых трехчлен $y = (a^2 - 1)\,x^2 + 2(a - 1)\,x + 1$ принимает положительные значения при всех действительных значениях $x$.

293. При каких значениях $m$ трехчлен $y = mx^2 + 4x + 3m + 1$ принимает положительные значения при всех положительных значениях $x$?

294. При каких значениях $m$ трехчлен $y = (6m - 5)\,x^2 - 5(m - 1)\,x + 2m - 6$ есть полный квадрат?

295. Найти коэффициенты трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, зная, что он обращается в нуль при $x = 6$ и что его наименьшее значение равно $-8$ при $x = 4$.

296. Найти радиус кругового сектора, периметр которого равен $2p$, если его площадь наибольшая.

**297.** Найти высоту треугольника, площадь которого равна $S$, если квадрат, вписанный в этот треугольник так, что две его вершины лежат на основании, а две другие — на боковых сторонах, имеет наибольшую площадь.

Решить системы неравенств:

**298.** $\begin{cases} 3x - y - 2 < 0, \\ 2x + y + 2 > 0, \\ x + 3y - 4 < 0. \end{cases}$

**299.** $\begin{cases} x^2 - y - 2 \leqslant 0, \\ 3x^2 - 4y - 4 \geqslant 0. \end{cases}$

**300.** $\begin{cases} 5x^2 - 16y - 32 < 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$

# Глава 8

# ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРОГРЕССИИ

## § 1. Понятие числовой последовательности

Числовой последовательностью называется множество чисел, занумерованных с помощью натуральных чисел и расположенных в порядке возрастания их номеров, т. е.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

или сокращенно

$$\{a_n\}.$$

Числа, из которых составлена последовательность, называются ее членами.

Задать числовую последовательность — это значит указать правило, с помощью которого по номеру члена можно найти этот член, т. е. задать функцию $a_n = f(n)$, где $f$ — правило соответствия между $n$ и $a_n$, а $n \in N$.

Общим членом последовательности называется ее $n$-й член $a_n$, записанный в виде функции от $n$, т. е. $a_n = f(n)$.

Если $a_n = f(n)$ задано, то последовательность имеет вид

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

Как и функцию, последовательность можно задать различными способами (формулой общего члена, таблицей, графиком и т. д.).

Чтобы записать последовательность, заданную формулой общего члена, надо в эту формулу последовательно подставить $n = 1, 2, 3, \ldots$ и соответственно получить $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Например, последовательность с общим членом $a_n = \sqrt{n}$ имеет вид

$$a_1 = \sqrt{1} = 1,\ a_2 = \sqrt{2},\ a_3 = \sqrt{3},\ a_4 = \sqrt{4} = 2, \ldots, a_n = \sqrt{n}, \ldots,$$

или $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \ldots, \sqrt{n}, \ldots$

Кратко это записывают $\{\sqrt{n}\}$.

График числовой последовательности состоит из изолированных точек, абсциссы которых — натуральные числа, а ординаты — значения членов последовательности с соответствующими этим числам номерами (рис. 107).

Последовательность может быть задана и другими способами. Например, если известно правило вычисления квадратного корня, то задана последовательность десятичных приближений (с недостатком) $\sqrt{3}$ с точностью до 1; 0,1; 0,01, ..., т. е. 1, 2, 3, ..., $n$-е, ... приближения: 1; 1,7; 1,73; 1,732, ...

Последовательности задаются также рекуррентными соотношениями. Этот способ задания последовательностей заключается в том, что указывается соотношение, позволяющее найти $n$-й член последовательности, если известны ее предыдущие члены.

Например, последовательность может быть задана так: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, а при $n \geqslant 4$ $a_n = a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1}$.

Эта последовательность имеет вид

$$1,\ 2,\ 3,\ 1+2+3,\ 2+3+(1+2+3),\ \ldots,$$

или

$$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 11,\ 20,\ 37,\ \ldots,\ \text{т. е.}$$

начиная с четвертого члена последовательности каждый последующий ее член равен сумме трех ему предыдущих.

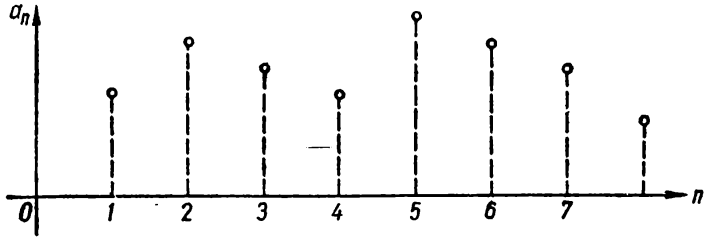



Рис. 107.

Последовательность не может быть задана указанием нескольких ее первых членов, так как можно составить бесчисленное множество соотношений, определяющих последующие ее члены через указанные предыдущие. Существует бесконечное множество последовательностей, у которых любое конечное число первых членов совпадает.

Числовая последовательность, у которой все члены равны между собой, называется *постоянной последовательностью* или просто *постоянной*.

Конечной числовой последовательностью называется последовательность, содержащая $n$ членов, т. е. функция $a_n = f(n)$, заданная на множестве $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

**Монотонные последовательности.** Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей*, если для всех ее членов выполняется неравенство

$$a_n \leqslant a_{n+1},\ n \in N,$$

и *строго возрастающей*, если для всех членов выполняется неравенство

$$a_n < a_{n+1},\ n \in N.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *убывающей*, если для всех ее членов выполняется неравенство

$$a_n \geqslant a_{n+1},\ n \in N,$$

и *строго убывающей*, если для всех ее членов выполняется неравенство

$$a_n > a_{n+1},\ n \in N.$$

Возрастающие, убывающие, строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями. Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *строго монотонными* последовательностями.

Пример 1. Показать, что последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ строго возрастающая.

Решение. В данной последовательности

$$a_n = \frac{n}{n+1};$$

тогда

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Найдем разность

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Поскольку разность положительна, то $a_{n+1} > a_n$, а это значит, что данная последовательность строго возрастающая.

Пример 2. Показать, что последовательность $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$ строго убывающая.

Решение. В данной последовательности

$$a_n = \frac{2n}{n^2+1},$$

тогда

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)^2+1} = \frac{2n+2}{n^2+2n+2}.$$

Найдем разность

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{n^2+2n+2} - \frac{2n}{n^2+1} = -\frac{2(n^2+n+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0,$$

откуда следует, что $a_n < a_{n+1}$, т. е. последовательность строго убывает.

Пример 3. Показать, что последовательность $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ убывающая.

Решение. Найдем разность

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \equiv \frac{n-1}{2^{n+1}} \geqslant 0.$$

Следовательно, $a_n \geqslant a_{n+1}$, т. е. последовательность убывающая.

Последовательности с общим членом $a_n = (-1)^n b_n$, где $b_n > 0$, называются колеблющимися. Например, последовательность $\{(-1)^n \cdot n^2\}$, т. е. $-1, 4, -9, 16, -25, \ldots$ — колеблющаяся.

**Ограниченные и неограниченные последовательности.** Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если все ее члены не больше некоторого числа $M$, т. е.

$$a_n \leqslant M \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если все ее члены не меньше некоторого числа $M$, т. е. $a_n \geqslant M$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Например:

а) последовательность $\left\{\dfrac{10 - n^2}{2n + 1}\right\}$ ограничена сверху, так как все ее члены не больше 3, т. е.

$$\frac{10 - n^2}{2n + 1} \leqslant 3 \text{ при всех } n;$$

б) последовательность $\left\{\dfrac{n^2}{n + 1}\right\}$ ограничена снизу, так как все ее члены не меньше $\dfrac{1}{2}$, т. е.

$$\frac{n^2}{n + 1} \geqslant \frac{1}{2} \text{ при всех } n.$$

Числовая последовательность называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. если все ее члены по абсолютной величине не больше некоторого положительного числа $M$: $|a_n| \leqslant M$ $(n = 1, 2, 3, \ldots; M > 0)$. Например, последовательность $\left\{(-1)^n \dfrac{1}{n}\right\}$ ограниченная, так как $\left|(-1)^n \dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \leqslant 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Числовая последовательность называется *неограниченной*, если для любого положительного числа $M$ найдется такой член последовательности, который по абсолютной величине больше $M$. Например, последовательность $\{n^2\}$ — неограниченная.

## § 2. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, у которой каждый последующий член равен своему предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, называемым разностью прогрессии.

Арифметическая прогрессия сокращенно обозначается символом $\div$. Разность арифметической прогрессии обозначается буквой $d$.

Например, $\div$ 3, 5, 7, 9, . . . — арифметическая прогрессия с разностью $d = 2$.

Если числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ есть арифметическая прогрессия, то для любого $n$, согласно определению, имеет место тождество $a_{n+1} = a_n + d$.

**Формула общего члена арифметической прогрессии.** Общий член арифметической прогрессии определяется формулой

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1), \tag{8.1}$$

т. е. любой член арифметической прогрессии равен первому ее члену, сложенному с произведением разности прогрессии на число предшествующих ему членов.

Доказательство. Пусть дана арифметическая прогрессия $\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \ldots$

По определению

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d, \\ a_4 &= a_3 + d, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d, \\ a_n &= a_{n-1} + d. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти $n-1$ равенств, получим

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + d(n-1),$$

откуда найдем $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Формулу (8.1) можно доказать методом математической индукции.

**Свойства членов арифметической прогресии.**

1. Каждый средний член арифметической прогрессии равен полусумме равноотстоящих от него членов, т. е.

$$a_k = \frac{a_{k-p} + a_{k+p}}{2} \quad (p < k). \tag{8.2}$$

Доказательство. По формуле общего члена

$$\begin{aligned} a_{k-p} &= a_1 + d(k-p-1), \\ a_{k+p} &= a_1 + d(k+p-1). \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получим

$$a_{k-p} + a_{k+p} = 2a_1 + 2d(k-1) = 2[a_1 + d(k-1)],$$

или

$$a_{k-p} + a_{k+p} = 2a_k,$$

откуда найдем

$$a_k = \frac{a_{k-p} + a_{k+p}}{2}.$$

2. В конечной арифметической прогрессии суммы членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны сумме крайних членов, т. е. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = a_k + a_{n-k+1} = \cdots = 2a_1 + d(n-1)$.

Доказательство. Достаточно показать, что $a_k + a_{n-k+1}$ не зависит от $k$.

Вычислим $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + d(k-1) + a_1 + d(n-k) = 2a_1 + d(n-1) = a_1 + [a_1 + d(n-1)] = a_1 + a_n$.

**Сумма $n$ первых членов арифметической прогрессии.** Сумма $n$ первых членов арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число членов, т. е.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n. \tag{8.3}$$

Доказательство. Пусть дано $n$ членов арифметической прогрессии $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_{n-2}$, $a_{n-1}$, $a_n$. Тогда $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ и $S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$, так как от перестановки слагаемых сумма не изменяется. Складывая эти равенства, получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

По предыдущему свойству, $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_n + a_1 = 2a_1 + d(n-1)$; поэтому $2S_n = (a_1 + a_n)n$, или $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

Учитывая, что $a_1 + a_n = 2a_1 + d(n-1)$, полученную формулу можно переписать в виде

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n. \tag{8.4}$$

Рассмотрим несколько примеров и задач на арифметическую прогрессию.

Пример 1. Доказать, что сумма $n$ первых нечетных чисел натурального ряда равна квадрату их количества.

Решение. Найдем сумму

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1).$$

Слагаемые этой суммы составляют конечную арифметическую прогрессию, у которой $d = 2$, $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$ и число членов $n$. По формуле (8.3) получаем

$$S_n = \frac{1 + 2n - 1}{2} n = n^2, \text{ т. е. } 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2.$$

Пример 2. Найти арифметическую прогрессию, сумма $n$ первых членов которой выражается формулой $S_n = 5n^2 + 6n$.

Решение. Найдем

$$S_{n-1} = 5(n-1)^2 + 6(n-1) \equiv 5n^2 - 4n - 1 \quad (n \geqslant 2).$$

Тогда $n$-й член искомой прогрессии

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (5n^2 + 6n) - (5n^2 - 4n - 1) = 10n + 1,$$

т. е.

$$a_n = 10n + 1.$$

Подставляя в формулу общего члена последовательно $n = 1, 2, 3, \dots$, получим

$$a_1 = 11, \ a_2 = 21, \ a_3 = 31, \dots$$

Ответ. $\div$ 11, 21, 31, ..., $10n + 1$, ...

Пример 3. Доказать, что если $a$, $b$, $c$ — три последовательных члена арифметической прогрессии, то между ними существует соотношение

$$a^2 + 8bc = (2b + c)^2.$$

Решение. По свойству членов арифметической прогрессии $2b = a + c$. Тогда данное равенство принимает вид $a^2 + 4(a + c)c = (a + c + c)^2$, или $(a + 2c)^2 = (a + 2c)^2$, т. е. является тождеством.

Пример 4. В арифметической прогрессии $a_n = \frac{1}{m}$, а $a_m = \frac{1}{n}$ $(m \neq n)$.

Найти сумму $mn$ ее первых членов.

Решение. По условию,

$$\begin{cases} a_n = a_1 + d(n-1) = \frac{1}{m}, \\ a_m = a_1 + d(m-1) = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a_1 = \frac{1}{mn}$, $d = \frac{1}{mn}$. Тогда по формуле (8.4)

$$S_{mn} = \frac{2\frac{1}{mn} + \frac{1}{mn}(mn-1)}{2} \cdot mn = \frac{mn+1}{2}.$$

Ответ. $S_{mn} = \frac{mn+1}{2}$.

Задача 1. Отец дарит каждому из своих сыновей в день его рождения, начиная с пяти лет, столько книг, сколько сыну лет. Возраст пяти сыновей составляет арифметическую прогрессию, разность которой равна 3. Сколько лет было каждому сыну, когда у них составилась библиотека в 325 книг?

Решение. Пусть самому младшему сыну было $x$ лет; тогда остальным было соответственно $x+3$, $x+6$, $x+9$ и $x+12$ лет. Первый раз каждый из них получил $a_1 = 5$ книг, а последующие разы получал на одну книгу больше ($d = 1$). Самый младший получал книги $x-4$ раза ($n = x-4$; четыре года он не получал книг), а старшие соответственно получали $x-1$, $x+2$, $x+5$ и $x+8$ раз. Самый младший сын получил книг

$$S_1 = \frac{2 \cdot 5 + 1(x-4-1)}{2}(x-4) = \frac{(5+x)(x-4)}{2}.$$

Аналогично, старшие сыновья получили книг

$$S_2 = \frac{(8+x)(x-1)}{2},$$

$$S_3 = \frac{(11+x)(x+2)}{2},$$

$$S_4 = \frac{(14+x)(x+5)}{2},$$

$$S_5 = \frac{(17+x)(x+8)}{2}.$$

По условию задачи, все сыновья получили $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 325$ книг или

$$\frac{(5+x)(x-4)}{2} + \frac{(8+x)(x-1)}{2} + \frac{(11+x)(x+2)}{2} + \frac{(14+x)(x+5)}{2} + \frac{(17+x)(x+8)}{2} = 325,$$

откуда найдем $x^2 + 13x - 90 = 0$. Решая это уравнение, получим $x_1 = -18$, $x_2 = 5$. Значение $x_1$ не подходит к решению задачи. Самому младшему сыну было 5 лет, а остальным соответственно 8, 11, 14 и 17.

Ответ. 5, 8, 11, 14, 17 лет.

Задача 2. Найти числа, составляющие арифметическую прогрессию, зная, что сумма ее первых четырех членов равна 40, сумма последних четырех членов равна 104, а сумма всех членов равна 216.

Решение. Пусть искомой прогрессией будет

$$-a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots,\ a_{n-4},\ a_{n-3},\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n.$$

По условию,

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 40, \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 104; \end{cases} \tag{1}$$

складывая эти равенства, получим

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + (a_4 + a_{n-3}) = 144.$$

Учитывая, что $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3}$, находим

$$4(a_1 + a_n) = 144,$$

или

$$a_1 + a_n = 36.$$

По формуле (8.3), $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 216$, или $\frac{36}{2} \cdot n = 216$; $n = 12$. Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 40, \\ a_{12} + a_{11} + a_{10} + a_9 = 104, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4a_1 + 6d = 40, \\ 4a_1 + 38d = 104, \end{cases}$$

откуда получим $a_1 = 7$, $d = 2$.

Ответ. $-7$, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29.

Задача 3. Найти четыре целых числа, составляющих арифметическую прогрессию, зная, что наибольшее из них равно сумме квадратов трех остальных.

Решение.

А. Пусть искомые числа составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Обозначим наименьшее из искомых чисел через $x - d$, где $d$ — разность прогрессии. Тогда остальными искомыми числами будут $x$, $x + d$ и $x + 2d$.

По условию

$$x + 2d = (x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2, \text{ или } d^2 - d = \frac{x - 3x^2}{2}.$$

Выделим в левой части последнего равенства точный квадрат

$$\left(d-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x-3x^2}{2}+\frac{1}{4},\ \text{или}\ \left(d-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2x-6x^2+1}{4}.$$

Это равенство в множестве действительных чисел имеет смысл, если $2x-6x^2+1\geqslant 0$, откуда следует $\frac{1-\sqrt{7}}{6}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{7}}{6}$. Так как по условию $x$ — целое число, то $x=0$. Тогда $d^2-d=0$; $d_1=0$, $d_2=1$.

При $d_1=0$ получаем, что искомыми числами будут нули, что не удовлетворяет условию задачи.

При $d_2=1$ искомыми числами будут $-1$; 0; 1; 2.

Б. Если искомые числа составляют убывающую прогрессию, то аналогично получим 2; 1; 0; $-1$.

Ответ. 2; 1; 0; $-1$ и $-1$; 0; 1; 2.

## § 3. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность, у которой каждый последующий член равен своему предыдущему, умноженному на одно и то же число, называемое знаменателем прогрессии.

Геометрическая прогрессия сокращенно обозначается символом $\div$. Знаменатель геометрической прогрессии обозначается буквой $q$.

Например, $\div$ 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ... — геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен 2.

Если числовая последовательность $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$, ... — геометрическая прогрессия, то для любого $n$, согласно определению, имеет место тождество $a_{n+1}\equiv a_nq$.

**Формула общего члена геометрической прогрессии.** Общий член геометрической прогрессии определяется формулой

$$a_n=a_1q^{n-1},\qquad (8.5)$$

т. е. любой член геометрической прогрессии равен первому ее члену, умноженному на степень знаменателя прогрессии, показатель которой равен числу предшествующих ему членов.

Доказательство. Пусть дана $\div$ $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_{n-1}$, $a_n$, $a_{n+1}$, ... По определению геометрической прогрессии,

$$\begin{aligned}a_2&=a_1q,\\ a_3&=a_2q,\\ a_4&=a_3q,\\ &\cdots\cdots\\ a_{n-1}&=a_{n-2}q,\\ a_n&=a_{n-1}q.\end{aligned}$$

Перемножив почленно эти $n-1$ равенств, получим $a_2a_3a_4\ldots a_{n-1}a_n=$ $=a_1a_2a_3\ldots a_{n-2}a_{n-1}q^{n-1}$, откуда найдем $a_n=a_1q^{n-1}$.

**Свойства членов геометрической прогрессии:**

1. Квадрат каждого среднего члена геометрической прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов, т. е.

$$a_k^2=a_{k-p}a_{k+p}\ (k>p).\qquad (8.6)$$

Доказательство. По формуле (8.5)

$$a_{k-p} = a_1 q^{k-p-1},$$
$$a_{k+p} = a_1 q^{k+p-1}.$$

Перемножив эти равенства, получим $a_{k-p}a_{k+p} = a_1^2 q^{2(k-1)}$, или $(a_1 q^{k-1})^2 = a_{k-p}a_{k+p}$, т. е. $a_k^2 = a_{k-p}a_{k+p}$.

2. В конечной геометрической прогрессии произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны произведению крайних членов, т. е. $a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = a_3 a_{n-2} = \ldots = a_k a_{n-k+1} = \ldots = a_1^2 q^{n-1}$.

Доказательство. Достаточно показать, что произведение

$$a_k a_{n-k+1} \quad (k \leqslant n)$$

не зависит от $k$ и равно $a_1 a_n$. Действительно,

$$a_k a_{n-k+1} = a_1 q^{k-1} a_1 q^{n-k} = a_1^2 q^{n-1} = a_1 a_n.$$

3. Произведение $n$ первых членов геометрической прогрессии с положительными членами равно корню квадратному из $n$-й степени произведения ее крайних членов, т. е.

$$P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}. \tag{8.7}$$

В общем случае

$$|P_n| = \sqrt{|a_1 a_n|^n}.$$

Доказательство. Пусть дано $\therefore$ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. Тогда

$$P_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-2} a_{n-1} a_n$$

и

$$P_n = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_3 a_2 a_1.$$

Перемножив эти равенства, найдем

$$P_n^2 = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) \ldots (a_{n-1} a_2)(a_n a_1),$$

или, учитывая, что $a_k a_{n-k+1} = a_1 a_n$ $(k \leqslant n)$,

$$P_n^2 = (a_1 a_n)^n.$$

Отсюда следует $P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$.
Учитывая, что $a_1 a_n = a_1^2 q^{n-1}$, получим

$$P_n = \sqrt{(a_1^2 q^{n-1})^n}. \tag{8.8}$$

**Сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии.** Сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии может быть вычислена по формуле

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} \quad (q \neq 1). \tag{8.9}$$

Доказательство. Пусть дано $\div\div\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ Тогда

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \qquad (1)$$

Умножив обе части равенства (1) на $q$, получим

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \cdots + a_{n-1} q + a_n q,$$

или

$$S_n q = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_n q. \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (1) почленно равенство (2), получим

$$S_n - S_n q = a_1 - a_n q, \text{ или } S_n (1 - q) = a_1 - a_n q,$$

откуда следует $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1 - q}$.

Учитывая, что $a_n = a_1 q^{n-1}$, получим

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}. \qquad (8.10)$$

Рассмотрим несколько задач на геометрическую прогрессию.

Задача 1. Найти три числа, составляющие геометрическую прогрессию, зная, что сумма их равна 26, а сумма квадратов этих чисел равна 364.

Решение. Пусть искомая прогрессия имеет вид $\div\div\ a_1,\ a_2,\ a_3$. По условию задачи

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 26, \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 364, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_1 (1 + q + q^2) = 26, \\ a_1^2 (1 + q^2 + q^4) = 364. \end{cases}$$

Найдем из первого уравнения $a_1$ и подставим во второе:

$$\frac{26^2}{(1 + q + q^2)^2} (1 + q^2 + q^4) = 364,$$

откуда

$$3q^4 - 7q^3 - 4q^2 - 7q + 3 = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на $q^2 \neq 0$, получим

$$3\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 7\left(q + \frac{1}{q}\right) - 4 = 0.$$

Обозначим $q + \dfrac{1}{q}$ через $t$; тогда

$$3(t^2 - 2) - 7t - 4 = 0,$$

или

$$3t^2 - 7t - 10 = 0.$$

А. $t_1 = -1$; тогда $q + \dfrac{1}{q} = -1$, или $q^2 + q + 1 = 0$. Это уравнение действительных решений не имеет.

Б. $t_2 = \dfrac{10}{3}$; тогда $q + \dfrac{1}{q} = \dfrac{10}{3}$, или $3q^2 - 10q + 3 = 0$; $q_1 = \dfrac{1}{3}$, $q_2 = 3$. Затем находим соответственно $a_1' = 18$ и $a_1'' = 2$.

Ответ. $\div\div\ 18,\ 6,\ 2;\ \div\div\ 2,\ 6,\ 18.$

Задача 2. Найти геометрическую прогрессию, если сумма первых трех ее членов равна 21, а произведение этих членов равно 64.

Решение. По условию, на основании формул (8.8) и (8.10) имеем

$$\begin{cases} \dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 21, \\ \sqrt{(a_1^2q^2)^3} = 64 \quad (q \neq 1). \end{cases}$$

Легко убедиться, что $a_1 q > 0$, поэтому $|a_1^3 q^3| = a_1^3 q^3$ и эта система приводится к виду

$$\begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 21, \\ a_1 q = 4. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $a_1 = 1$ и $q = 4$, или $a_1 = 16$ и $q = \dfrac{1}{4}$.

Ответ. 1, 4, 16 и 16, 4, 1.

Задача 3. В геометрической прогрессии известно, что $a_m = A$ и $a_n = B$.

Найти член $a_k$.

Решение. По условию задачи

$$\begin{cases} a_m = a_1 q^{m-1} = A, \\ a_n = a_1 q^{n-1} = B. \end{cases}$$

Решая систему уравнений относительно $a_1$ и $q$, находим

$$a_1 = A\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1-m}{m-n}}, \quad q = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{m-n}}.$$

Тогда

$$a_k = a_1 q^{k-1} = A\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1-m}{m-n}}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{k-1}{m-n}} = A\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{k-m}{m-n}}.$$

Ответ. $a_k = A\left(\dfrac{A}{B}\right)^{\frac{k-m}{m-n}}$.

Задача 4. Конечная геометрическая прогрессия содержит четное число членов. Сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найти знаменатель прогрессии.

Решение. Запишем искомую прогрессию в виде

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \ldots,\ a_1q^{2k-1}.$$

По условию

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{2k-2} + a_1q^{2k-1} = 3(a_1 + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{2k-2}),$$

или

$$\frac{a_1(1-q^{2k})}{1-q} = \frac{3a_1(1-q^{2k})}{1-q^2},$$

откуда следует $1 + q = 3$, $q = 2$.

Ответ. $q = 2$.

Задача 5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечная геометрическая прогрессия с положительными членами. Зная суммы $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A$ и $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = B$. Найти произведение $P_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$.

Решение. По формуле (8.10)

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = A \text{ и } S_n' = \frac{\frac{1}{a_1}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)}{1-\frac{1}{q}} = \frac{(1-q^n)\,q^{n-1}}{a_1(1-q)} = B,$$

откуда следует $a_1^2 q^{n-1} = \frac{A}{B}$. По формуле (8.8), произведение $P_n = \sqrt{(a_1^2 q^{n-1})^n}$; поэтому $P_n = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Ответ. $P_n = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Задача 6. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую, причем сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних равна 12.

Решение. Пусть искомыми числами будут $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$. По условию задачи $a_1$, $a_2$, $a_3$ составляют геометрическую прогрессию, а $a_2$, $a_3$, $a_4$ — арифметическую, причем

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 14, \\ a_2 + a_3 = 12. \end{cases}$$

Три первых числа запишем $a_1$, $a_1 q$, $a_1 q^2$; тогда три последних имеют вид $a_1 q$, $a_1 q^2$, $a_4$. По свойству членов арифметической прогрессии, $a_1 q + a_4 = 2a_1 q^2$, $a_4 = 2a_1 q^2 - a_1 q$. Тогда

$$\begin{cases} a_1 + (2a_1 q^2 - a_1 q) = 14, \\ a_1 q + a_1 q^2 = 12, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_1(1 + 2q^2 - q) = 14, \\ a_1(q + q^2) = 12. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a_1 = 2$ и $q = 2$ или $a_1 = \frac{25}{2}$ и $q = \frac{3}{5}$.

А. $a_1 = 2$, $a_2 = a_1 q = 4$, $a_3 = a_1 q^2 = 8$, $a_4 = 2a_1 q^2 - a_1 q = 12$.

Б. $a_1 = \frac{25}{2}$, $a_2 = a_1 q = \frac{15}{2}$, $a_3 = a_1 q^2 = \frac{9}{2}$, $a_4 = 2a_1 q^2 - a_1 q = \frac{3}{2}$.

Ответ. 2; 4; 8; 12 и 12,5; 7,5; 4,5; 1,5.

Задача 7. Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если из них вычесть соответственно 2, 1, 7 и 27, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Решение. Обозначим искомые числа $a$, $aq$, $aq^2$, $aq^3$. По условию задачи, числа $a - 2$, $aq - 1$, $aq^2 - 7$, $aq^3 - 27$ составляют арифметическую прогрессию. Тогда

$$\begin{cases} 2(aq - 1) = (a - 2) + (aq^2 - 7), \\ 2(aq^2 - 7) = (aq - 1) + (aq^3 - 27), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a(q-1)^2 = 7, \\ a(q-1)^2 q = 14, \end{cases}$$

откуда найдем $a = 7$, $q = 2$.

Ответ. 7, 14, 28, 56.

Задача 8. В городе проживает 2 000 000 человек. Сколько жителей будет в этом городе через 5 лет, если ежегодный прирост населения составляет 10%?

Решение. Поскольку ежегодный прирост населения составляет 10%, то отношение количества жителей последующего года к количеству жителей предыдущего равно 1,1.

Таким образом, решение задачи приводится к отысканию пятого члена геометрической прогрессии, у которой $a_1 = 2\,000\,000$, а $q = 1{,}1$.

По формуле (8.5) находим

$$a_5 = a_1 q^4 = 2\,000\,000 \cdot 1{,}1^4 = 2\,928\,200.$$

Ответ. 2 928 200 чел.

Задача 9. Доказать тождество $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Рассмотрим сумму $n$ членов геометрической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} =$$

$$= a_1 (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q},$$

откуда найдем $1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$ при $a_1 \neq 0$. Полагая $q = \frac{b}{a}$, получим

$$1 - \frac{b^n}{a^n} = \left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \cdots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right),$$

или, после умножения обеих частей на $a^n$,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

## § 4. Метод математической индукции

При доказательстве тождеств или тождественных неравенств, обе части которых зависят от натурального аргумента, часто пользуются методом математической индукции (полной индукции, совершенной индукции).

В основе этого метода лежит принцип математической индукции, который заключается в следующем: утверждение справедливо для всякого натурального $n$, если оно справедливо для $n = 1$, и из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n = k$ следует его справедливость для $n = k + 1$.

Таким образом, доказательство некоторого утверждения методом математической индукции состоит из доказательства двух теорем.

**Теорема 1.** *Утверждение справедливо для* $n = 1$.

**Теорема 2.** *Утверждение справедливо для* $n = k + 1$, *если оно справедливо для* $n = k$, *где* $k$ — *любое натуральное число.*

Если обе эти теоремы доказаны, то утверждение справедливо при любом натуральном значении $n$.

Если же утверждение надо доказать не для всех натуральных $n$, а лишь для $n \geqslant p$, где $p$ — некоторое натуральное число, то доказательство проводится аналогично.

**Теорема 3.** *Утверждение верно при* $n = p$.

**Теорема 4.** *Утверждение справедливо при* $n = k + 1$, *если оно справедливо при* $n = k$, *где* $k \geqslant p$ — *любое натуральное число.*

Пример 1. Доказать, что $S_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном $n$.

А. Доказываем теорему 1. При $n = 1$ получаем $S_1 = 11^3 + 12^3 = 23(11^2 - 11 \cdot 12 + 12^2) = 23 \cdot 133$, т. е. утверждение справедливо.

Б. Доказываем теорему 2. Если $S_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$ делится на 133, т. е. имеет вид

$$S_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133N,$$

где $N$ — некоторое натуральное число, то $S_{k+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3}$ делится на 133.

Для этого представим

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11^{k+2} \cdot 11 + 144 \cdot 12^{2k+1} = \\ &= 11^{k+2} \cdot 11 + 11 \cdot 12^{2k+1} + 133 \cdot 12^{2k+1} = \\ &= 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}; \end{aligned}$$

заменяя $11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133N$, получим

$$S_{k+1} = 11 \cdot 133N + 133 \cdot 12^{2k+1} = 133(11N + 12^{2k+2}),$$

т. е. $S_{k+1}$ делится на 133.

Следовательно, $S_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ при любом натуральном $n$ делится на 133.

Пример 2. Доказать, что при натуральном $n \geqslant 3$ справедливо неравенство $2^n > 2n + 1$.

А. При $n = 3$ получаем $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, или $8 > 7$, т. е. утверждение справедливо.

Б. Допустим, что при $n = k \geqslant 3$ неравенство верно, т. е. $2^k > 2k + 1$. Покажем, что оно будет верным при $n = k + 1$, т. е. $2^{k+1} > 2k + 3$.

По допущению $2^k > 2k + 1$; умножив обе части этого неравенства на 2, получим $2^{k+1} > 4k + 2$, или $2^{k+1} > 2k + (2k + 2)$. Поскольку $2k + 2 > 3$, то $2^{k+1} > 2k + 3$. Читателю рекомендуем доказать методом математической индукции формулы (8.1)—(8.10).

## § 5. Предел числовой последовательности

**Понятие предела переменной величины.** Постоянное число $a$ называется пределом переменной величины $x$, если для любого как угодно малого положительного числа $\varepsilon$ можно указать такой момент изменения переменной $x$, начиная с которого будет выполняться неравенство $|x - a| < \varepsilon$. О переменной $x$ говорят, что она имеет предел $a$ и записывают это

$$x \to a, \text{ или } \lim x = a$$

(читают: $x$ стремится к $a$, или предел $x$ равен $a$).

**Понятие предела последовательности (функции целочисленного аргумента).** Постоянное число $a$ называется пределом последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ можно указать такой номер $N$, начиная с которого все последующие члены последовательности удовлетворяют неравенству

$$|u_n - a| < \varepsilon \quad (n > N). \tag{8.15}$$

Записывают это так:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a$$

(читают: $u_n$ стремится к $a$ при $n$ стремится к бесконечности или предел $u_n$ при $n$ стремится к бесконечности равен $a$).

Неравенство (8.15) можно переписать в виде

$$-\varepsilon < u_n - a < \varepsilon,$$

или

$$a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon, \qquad (8.16)$$

Промежуток $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$ называется $\varepsilon$-окрестностью точки $a$ (рис. 108).

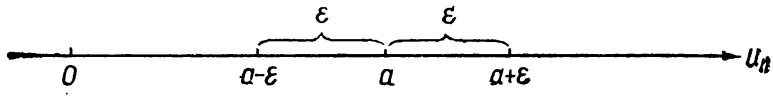



Рис. 108.

Пользуясь понятием $\varepsilon$-окрестности, определение предела числовой последовательности можно сформулировать следующим образом: число $a$ есть предел последовательности $\{u_n\}$, если можно указать такой номер $N$, что все члены последовательности с номерами, большими $N$, находятся в $\varepsilon$-окрестности точки $a$, где $\varepsilon$ — любое положительное число, т. е. все члены последовательности с номерами, большими $N$, на оси $Ou_n$ (рис. 108) изображаются точками, лежащими от точки $a$ на расстоянии, меньшем $\varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а не имеющая предела — *расходящейся*.

## § 6. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии

**Понятие суммы членов бесконечной последовательности.** В алгебре рассматриваются суммы конечного числа слагаемых. Но в математике часто приходится сталкиваться с суммами бесконечного числа слагаемых $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

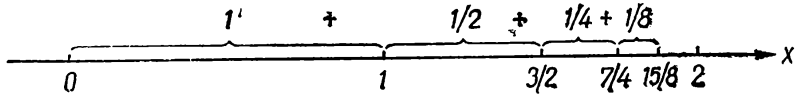



Рис. 109.

Пример. Пусть задана последовательность $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$, т. е. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$

Будем складывать (графически) члены этой последовательности (рис. 109). Первый член этой последовательности 1 отличается от 2 на 1. Сумма двух первых членов $\frac{3}{2}$ отличается от 2 на $\frac{1}{2}$ (второй

член последовательности). Сумма трех первых членов $\frac{7}{4}$ отличается от 2 на $\frac{1}{4}$ (третий член). Сумма четырех первых членов $\frac{15}{8}$ отличается от 2 на $\frac{1}{8}$ (четвертый член), т. е. можно предположить, что сколько бы мы ни складывали первых членов этой последовательности, то их сумма будет отличаться от 2 на число, равное последнему из прибавленных членов. Так как общий член этой последовательности неограниченно уменьшается с возрастанием $n$, то эта сумма с возрастанием $n$ будет неограниченно приближаться к 2. Поэтому естественно за сумму этих членов, по определению, принять число 2, хотя в обычном смысле эту сумму найти нельзя.

***Суммой** членов последовательности* $\{a_n\}$

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

называется предел (если он существует) суммы ее $n$ первых членов при $n \to +\infty$, т. е.

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Если этот предел не существует, то говорят, что и сумма членов последовательности не существует.

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \quad (a_1 \neq 0).$$

Найдем сумму ее членов (если сумма существует):

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

По определению,

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to+\infty} q^n\right).$$

Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \infty$, т. е. не существует.

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, тогда

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Если $q = 1$, то прогрессия имеет вид

$$a_1,\ a_1,\ \ldots,\ a_1,\ \ldots$$

и сумма ее $n$ первых членов равна $S_n = a_1 n$; тогда

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a_1 n = \infty$$

(не существует).

Если $q = -1$, то предел $S_n$ при $n \to \infty$ тоже не существует ($S_n$ колеблется).

Таким образом, сумма членов бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой по абсолютной величине меньше единицы, равна частному от деления первого ее члена на разность между единицей и знаменателем прогрессии, т. е.

$$S = \frac{a_1}{1-q}. \tag{8.22}$$

Если $|q| \geqslant 1$, то бесконечная геометрическая прогрессия суммы не имеет.

Пример 1. Найти сумму членов геометрической прогрессии

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

Решение. В данной прогрессии $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$; тогда

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Ответ, $S = 2$.

Пример 2. Сумма первых четырех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии составляет $\frac{9}{25}$ суммы всех ее членов. Определить первый член и знаменатель этой прогрессии, если второй член прогрессии равен 8, а первый положителен ($a_1 > 0$).

Решение. Обозначим первый член прогрессии через $a_1$, а знаменатель через $q$. Тогда по условию $S_4 = \frac{9}{25} S$, или

$$\frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{9}{25} \cdot \frac{a_1}{1-q} \quad (q \neq 1),$$

откуда находим $q^4 = \frac{16}{25}$, $q = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\left(q = -\frac{2}{\sqrt{5}}\right.$ не удовлетворяет условию задачи$\left.\right)$. Поскольку $a_2 = a_1 q = 8$, то $a_1 = \frac{8}{q} = \frac{8\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5}$.

Ответ. $a_1 = 4\sqrt{5}$; $q = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

Пример 3. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 56, а сумма квадратов ее членов равна 448. Найти эту прогрессию.

Решение. По условию задачи

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n + \cdots = \frac{a_1}{1-q} = 56$$

и

$$a_1^2 + a_1^2 q^2 + a_1^2 q^4 + \cdots + a_1^2 q^{2n} + \cdots = \frac{a_1^2}{1-q^2} = 448.$$

Решая систему

$$\begin{cases} a_1 = 56(1-q), \\ a_1^2 = 448(1-q^2), \end{cases}$$

находим $a_1 = 14$ и $q = \frac{3}{4}$ (решение $a_1 = 0$, $q = 1$ не удовлетворяет условию задачи).

Ответ. $\div 14; \frac{21}{2}; \frac{63}{8}; \ldots$

Пример 4. В круг радиуса $R$ вписан квадрат; в квадрат вписан круг, в этот круг вписан второй квадрат и т. д. до бесконечности (рис. 110). Определить предел суммы площадей $n$ первых кругов при $n \to \infty$.

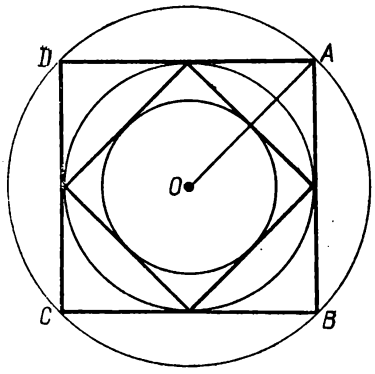


Рис. 110.

Решение. По условию $OA = R$; тогда площадь первого (наибольшего) круга равна $S_1 = \pi R^2$. Сторона квадрата, вписанного в этот круг, равна $AB = R\sqrt{2}$ и равна диаметру круга, вписанного в этот квадрат. Тогда радиус второго круга будет $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ и его площадь

$$S = \pi \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2}\pi R^2.$$

Следовательно, площади последовательных кругов

$$S_1 = \pi R^2, \quad S_2 = \frac{1}{2}\pi R^2, \quad S_3 = \frac{1}{4}\pi R^2, \ldots, \quad S_n = \frac{1}{2^{n-1}}\pi R^2, \ldots$$

составляют бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом $a_1 = \pi R^2$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

По формуле (7.22) находим

$$S = \frac{\pi R^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi R^2.$$

Ответ. $2\pi R^2$.

## § 7. Обращение десятичных периодических дробей в обыкновенные

**Теорема 1.** *Правильная чистая десятичная периодическая дробь равна такой обыкновенной дроби, числитель которой равен периоду, а знаменатель — числу, записанному столькими десятками, сколько цифр в периоде.*

Доказательство. Пусть дана правильная чистая периодическая десятичная дробь $0, (\overline{a_1 a_2 \ldots a_n})$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — цифры десятичной системы счисления, $a_1 a_2 \ldots a_n$ — период, $n$ — натуральное число (количество цифр в периоде). Заданную дробь можно представить в виде

$$0,\ (\overline{a_1a_2\ldots a_n}) = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^n} +$$
$$+\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^{2n}} + \cdots + \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^{mn}} + \cdots$$

Правая часть равенства представляет бесконечную убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^n}$ и знаменателем $\frac{1}{10^n}$. Поэтому, применяя формулу (8.19), получим

$$0,\ (\overline{a_1a_2\ldots a_n}) = \frac{\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^n}}{1-\frac{1}{10^n}} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^n-1} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ раз}}}.$$

**Теорема 2.** *Правильная смешанная периодическая десятичная дробь равна такой обыкновенной дроби, у которой числитель равен разности между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода, а знаменатель — число, записанное столькими девятками, сколько цифр в периоде, с дописанными столькими нулями, сколько цифр после запятой до первого периода.*

Доказательство. Пусть дана правильная смешанная периодическая десятичная дробь $0,\ \overline{a_1a_2\ldots a_n\,(b_1b_2\ldots b_n)}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — цифры десятичной системы счисления, $\overline{a_1a_2\ldots a_m}$ — число до первого периода, $b_1b_2\ldots b_n$ — период, $\overline{a_1a_2\ldots a_mb_1b_2\ldots b_n}$ — число до второго периода, $m$, $n$ — натуральные числа ($m$ — число цифр до периода, $n$ — число цифр в периоде). Тогда

$$0,\ \overline{a_1a_2\ldots a_m\,(b_1b_2\ldots b_n)} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{10^m} + \left(\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_n}}{10^{m+n}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\overline{b_1b_2\ldots b_n}}{10^{m+2n}} + \cdots + \frac{\overline{b_1b_2\ldots b_n}}{10^{m+kn}} + \cdots\right) =$$
$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{10^m} + \frac{\overline{b_1b_2\ldots b_n}}{10^{m+n}}\left(1 + \frac{1}{10^n} + \cdots + \frac{1}{10^{(k-1)n}} + \cdots\right).$$

В последних скобках заключена бесконечная убывающая геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем $\frac{1}{10^n}$. Поэтому

$$1 + \frac{1}{10^n} + \cdots + \frac{1}{10^{(k-1)n}} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{10^n}} = \frac{10^n}{10^n-1}$$

и

$$0,\ \overline{a_1a_2\ldots a_m\,(b_1b_2\ldots b_n)} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{10^m} + \frac{\overline{b_1b_2\ldots b_n}}{10^{m+n}} \cdot \frac{10^n}{10^n-1} =$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{10^m} + \frac{\overline{b_1b_2\ldots b_n}}{10^m(10^n-1)} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}\,(10^n-1) + \overline{b_1b_2\ldots b_n}}{10^m(10^n-1)} =$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}\cdot 10^n + \overline{b_1b_2\ldots b_n} - \overline{a_1a_2\ldots a_m}}{10^m(10^n-1)} =$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_mb_1b_2\ldots b_n} - \overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ раз}}\,\underbrace{00\ldots0}_{m\text{ раз}}}.$$

Пример 1. Обратить в обыкновенные дроби 0,(354) и 5,(27).
Решение. Применяя теорему 1 этого параграфа, получим

$$0,(354) = \frac{354}{999} = \frac{118}{333};$$

$$5,(27) = 5\frac{27}{99} = 5\frac{3}{11}.$$

Пример 2. Обратить в обыкновенные дроби 0,5(36) и 2,31(6).
Решение. Применяя теорему 2 этого параграфа, получим

$$0,5(36) = \frac{536-5}{990} = \frac{59}{110};$$

$$2,31(6) = 2\,\frac{316-31}{900} = 2\frac{19}{60}.$$

### Упражнения

301. Доказать, что последовательность с общим членом $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+2}$ возрастающая.

302. Доказать, что последовательность с общим членом $u_n = \dfrac{3n+5}{2n+1}$ убывающая.

303. Доказать, что последовательность с общим членом

$$a_n = \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdots(4n-3)}$$

убывающая.

304. Доказать, что последовательность с общим членом

$$a_n = \frac{n^2}{n!}\quad (n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n)$$

не монотонная.

305. Определить стороны треугольника, если они выражаются различными целыми числами, образующими арифметическую прогрессию, причем периметр треугольника равен 15.

306. Найти сумму $m+n$ членов арифметической прогрессии, в которой $m$-й член равен $n$, а $n$-й член равен $m$.

307. Найти числа, составляющие арифметическую прогрессию, зная, что сумма ее трех первых членов равна 15, сумма последних трех членов равна 39, а сумма всех членов равна 63.

308. Найти арифметическую прогрессию, если $a_5 = 18$ и $S_n = \frac{1}{4}S_{2n}$.

309. Первый член арифметической прогрессии равен 1; сумма $m$ первых членов ее относится к сумме $n$ первых членов, как $m^2 : n^2$. Найти эту прогрессию.

310. Найти геометрическую прогрессию, состоящую из семи членов, если сумма трех первых членов равна 26, а трех последних — 2106.

311. Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, у которой первый член больше второго на 36, а третий больше четвертого на 4.

312. Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, зная, что сумма крайних чисел равна 56, а произведение средних чисел равно 108.

313. Сумма трех чисел, составляющих убывающую геометрическую прогрессию, равна 42, а сумма их квадратов равна 756. Найти эти числа.

314. Найти сумму всех трехзначных чисел, кратных трем.

315. Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если из них вычесть соответственно 1, 2, 9, 28, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

316. Три целых числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе увеличить на 8, то прогрессия обратится в арифметическую, но если после этого увеличить последний член на 64, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

317. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найти эту прогрессию.

318. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, зная, что сумма первых ее шести членов в 7 раз больше суммы остальных членов этой прогрессии.

319. Доказать, что в геометрической прогрессии, члены которой — натуральные числа, сумма квадратов нечетного числа членов делится без остатка на сумму этих членов.

320. Доказать тождества (используя формулу суммы членов геометрической прогрессии):

а) $(a^{2n} - b^{2n}) \equiv (a + b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \ldots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$;

б) $(a^{2n+1} + b^{2n+1}) \equiv (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$.

# Глава 9

# ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

## § 1. Обобщение понятия степени

**Обобщение понятия о показателе.** В главе 2 было рассмотрено понятие степени с натуральным показателем. В этом параграфе вводятся понятия степени с любым действительным показателем. Понятия степени с нулевым, целым отрицательным, дробным и иррациональным показателями вводятся так, чтобы правила действий над степенями с натуральными показателями оставались бы пригодными для действий над степенями с любыми действительными показателями.

Определение 1. Нулевая степень числа, не равного нулю, равна единице, т. е.

$$a^0 \equiv 1. \tag{9.1}$$

Заметим, что $0^0$ не имеет смысла.

Определение 2. Целая отрицательная степень числа, не равного нулю, равна единице, деленной на степень того же числа с показателем, противоположным показателю данной степени, т. е.

$$a^{-n} \equiv \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0), \tag{9,2}$$

где $n$ — натуральное число.

Определение 3. Дробная положительная степень неотрицательного числа равна арифметическому корню, степень которого равна знаменателю дробного показателя, а подкоренное выражение — степени данного положительного числа, показатель которой равен числителю дробного показателя, т. е.

$$a^{\frac{m}{n}} \equiv \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geqslant 0), \tag{9.3}$$

где $m$ и $n$ — натуральные числа.

Определение 4. Дробная отрицательная степень положительного числа равна единице, деленной на степень того же числа, с показателем, противоположным показателю данной степени, т. е.

$$a^{-\frac{m}{n}} \equiv \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0), \tag{9.4}$$

где $m$ и $n$ — натуральные числа.

Определение 5. Степенью положительного числа с иррациональным показателем называется предел, к которому стремится после-

довательность рациональных степеней этого числа при условии, что последовательность показателей рациональных степеней стремится к иррациональному показателю

$$a^{\alpha} = \lim_{r_n \to \alpha} a^{r_n} \quad (a > 0), \tag{9.5}$$

где $\alpha$ — иррациональное число, а $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящихся к числу $\alpha$.

Например:

а) по определению 1, $(\sqrt{2})^0 \equiv \left(\frac{1}{3}\right)^0 \equiv (-5)^0 \equiv (0{,}001)^0 \equiv 1$;

б) по определению 2, $3^{-2} \equiv \frac{1}{9}$, $2^{-3} \equiv \frac{1}{8}$;

в) по определению 3, $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 2^3 = 8$;

г) по определению 4, $27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{9}$;

д) по определению 5, под степенью $5^{\sqrt{2}}$ понимается предел последовательности $5^1, 5^{1,4}, 5^{1,41}, 5^{1,414}, 5^{1,4142}, \ldots \to 5^{\sqrt{2}}$ $(\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots)$.

Любая положительная степень нуля равна нулю.

Некоторые свойства степеней с действительными показателями:

1. Величина степени положительного числа с положительным дробным показателем не изменится, если числитель и знаменатель показателя умножить на какое-нибудь натуральное число, т. е.

$$a^{\frac{m}{n}} \equiv a^{\frac{mk}{nk}} \quad (a > 0). \tag{9.6}$$

В определениях 3 и 4 основание степени предполагалось положительным. Для отрицательного основания можно дать такое определение степени с дробным показателем: дробная положительная степень отрицательного числа, показатель которой есть несократимая дробь с нечетным знаменателем, равна корню степени, равной знаменателю дробного показателя, а подкоренное выражение равно степени данного отрицательного числа, показатель которой равен числителю дробного показателя, т. е.

$$a^{\frac{m}{2n+1}} \equiv \sqrt[2n+1]{a^m} \quad (a < 0), \tag{9.7}$$

где $m$ и $2n + 1$ — натуральные взаимно простые числа.

Например:

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4,$$

$$(-125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-125} = -5.$$

Если в (9.6) $n$ — четное, то аналогичного определения дать нельзя, так как, например, $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$ в множестве действительных чисел не имеет смысла.

Для дробной степени с отрицательным основанием свойство (9.6) места не имеет.

Аналогично можно обобщить определение 4 для отрицательного основания: дробная отрицательная степень отрицательного числа, показатель которой есть несократимая дробь с нечетным знаменателем, равна единице, деленной на степень того же числа с показателем, противоположным показателю данной степени:

$$a^{-\frac{m}{2n+1}} \equiv \frac{1}{a^{\frac{m}{2n+1}}} \quad (a<0), \tag{9.8}$$

где $m$ и $2n+1$ — натуральные взаимно простые числа.

Заметим, что отрицательная степень нуля и дробная степень, показатель которой есть несократимая дробь с четным знаменателем, а также иррациональная степень отрицательного числа в множестве действительных чисел не имеют смысла.

2. Любая степень положительного числа положительна, т. е.

$$a^{\alpha} > 0 \quad (a>0), \tag{9.9}$$

где $\alpha$ — любое действительное число.

3. Если основание степени больше единицы, то любая положительная степень также больше единицы, а любая отрицательная степень того же числа меньше единицы, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } a>1 \text{ и } \alpha>0, \text{ то } a^{\alpha}>1; \\ \text{если } a>1 \text{ и } \alpha<0, \text{ то } a^{\alpha}<1. \end{array}\right\} \tag{9.10}$$

4. Если положительное основание меньше единицы, то любая положительная степень этого основания меньше единицы, а любая отрицательная — больше единицы, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } 0<a<1 \text{ и } \alpha>0, \text{ то } a^{\alpha}<1; \\ \text{если } 0<a<1 \text{ и } \alpha<0, \text{ то } a^{\alpha}>1. \end{array}\right\} \tag{9.11}$$

5. Любая степень единицы равна единице, т. е.

$$1^{\alpha} = 1. \tag{9.12}$$

где $\alpha$ — любое действительное число.

6. Если $a>0$ и $a \neq 1$, то для любого положительного числа $b$ существует и притом только одно действительное число $\alpha$ такое, что

$$a^{\alpha} = b \quad (b>0). \tag{9.13}$$

7. Если $a^{x_1} = a^{x_2}$ $(a>0$ и $a \neq 1)$, то $x_1 = x_2$. (9.14)

Правила действий над степенями с действительными показателями выражаются следующими теоремами:

**Теорема 1.** *Произведение степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей перемножаемых степеней, т. е.*

$$a^{\alpha}a^{\beta} \equiv a^{\alpha+\beta}. \tag{9.15}$$

**Теорема 2.** *Частное от деления степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, равным разности показателей делимого и делителя, т. е.*

$$a^{\alpha} : a^{\beta} \equiv a^{\alpha-\beta}. \tag{9.16}$$

**Теорема 3.** *Степень степени равна степени с тем же основанием и показателем, равным произведению показателей данных степеней, т. е.*

$$(a^{\alpha})^{\beta} \equiv a^{\alpha\beta}. \tag{9.17}$$

**Теорема 4.** *а) Степень произведения двух положительных чисел равна произведению тех же степеней сомножителей,* т. е.

$$(ab)^{\alpha} \equiv a^{\alpha}b^{\alpha} \quad (a>0,\ b>0).$$

*б) Степень произведения двух чисел, если оно положительно, равна произведению тех же степеней модулей этих чисел, т. е.*

$$(ab)^{\alpha} \equiv |a|^{\alpha} \cdot |b|^{\alpha} \quad (ab>0). \tag{9.18}$$

**Теорема 5.** *а) Степень частного двух положительных чисел равна частному от деления тех же степеней числителя и знаменателя,* т. е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} \equiv \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} \quad (a>0,\ b>0).$$

*б) Степень частного двух чисел, если это частное положительно, равна частному от деления тех же степеней модулей числителя и знаменателя,* т. е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} \equiv \frac{|a|^{\alpha}}{|b|^{\alpha}} \quad (ab>0). \tag{9.19}$$

Теоремы, обратные теоремам 1—5, также верны.

Теоремы 1—5 доказываются на основании определений 1—5 и соответствующих теорем для натуральных степеней. Докажем, например, теорему 1 для целых отрицательных степеней. Пусть $\alpha = -m$, $\beta = -n$, где $m$ и $n$ — натуральные числа. Покажем, что

$$a^{\alpha}a^{\beta} = a^{\alpha+\beta},$$

где $a$ — любое действительное число, не равное нулю.

По определению 2,

$$a^{\alpha}a^{\beta} = a^{-m}a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n}.$$

На основании правила умножения дробей и правила умножения натуральных степеней имеем

$$\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}.$$

По определению 2,

$$\frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m+(-n)};$$

заменяя $-m$ на $\alpha$ и $-n$ на $\beta$, получаем

$$a^{-m+(-n)} = a^{\alpha+\beta}, \text{ т. е. } a^{\alpha}a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}.$$

Рекомендуем читателю доказать теоремы 1—5 для степеней с нулевыми, дробными, отрицательными и любыми рациональными показателями.

Рассмотрим несколько примеров на тождественные преобразования степеней с действительными показателями.

Пример 1. Упростить

$$A = \left[\frac{4a - 9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2 \left(a > 0,\ a \neq 1,\ a \neq \frac{3}{2}\right).$$

Решение. Преобразуем данное выражение так:

$$A = \left[\frac{a^{-1}(4a^2 - 9)}{a^{-\frac{1}{2}}(2a - 3)} + \frac{a^{-1}(a^2 - 4a + 3)}{a^{-\frac{1}{2}}(a - 1)}\right]^2 \equiv$$

$$\equiv \left[a^{-\frac{1}{2}}(2a + 3) + a^{-\frac{1}{2}}(a - 3)\right]^2 \equiv \left[a^{-\frac{1}{2}} \cdot 3a\right]^2 = \left(3a^{\frac{1}{2}}\right)^2 \equiv 9a.$$

Ответ. $A \equiv 9a$.

Пример 2. Доказать тождество

$$\left[\frac{3a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{-\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1} - \left(\frac{1 - 2a}{3a - 2}\right)^{-1} = \frac{a^2}{2a - 1}$$

$$\left(a \neq 0,\ a \neq 1,\ a \neq \frac{1}{2},\ a \neq 2,\ a \neq \frac{2}{3}\right).$$

Решение.

Преобразуя левую часть тождества, получим

$$\left[\frac{3a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{-\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\frac{1-2a}{3a-2}\right)^{-1}\equiv$$

$$\equiv\left[\frac{3a^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}(a-2)}-\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}(a-1)}\right]^{-1}-\frac{3a-2}{1-2a}\equiv$$

$$\equiv\left(\frac{3}{a-2}-\frac{1}{a-1}\right)^{-1}+\frac{3a-2}{2a-1}\equiv\left[\frac{2a-1}{(a-1)(a-2)}\right]^{-1}+\frac{3a-2}{2a-1}\equiv$$

$$\equiv\frac{(a-1)(a-2)}{2a-1}+\frac{3a-2}{2a-1}\equiv\frac{a^2-3a+2+3a-2}{2a-1}\equiv\frac{a^2}{2a-1}.$$

Ответ. $\frac{a^2}{2a-1}$.

## § 2. Показательная функция

Показательной функцией независимой переменной $x$ называется функция

$$y=a^x,$$

где $a$ — данное число.

Если $a<0$, то функция $a^x$ определена только при целых (9.2) и при дробных (9.3а) значениях $x$ (если знаменатель дробного показателя — нечетное число). Если $a=0$, то выражение $0^x$ определено при $x>0$. Если $a>0$, то функция $a^x$ определена при всех действительных значениях $x$, причем при $a=1$ $1^x=1$, т. е. функция равна постоянному.

В дальнейшем показательную функцию $a^x$ будем рассматривать при $a>0$ и $a\neq 1$.

**Основные свойства показательной функции.**

$$y=a^x \text{ при } a>0,\ a\neq 1: \tag{9.20}$$

1. Показательная функция определена при всех значениях $x$.

2. Областью изменения показательной функции служит множество всех положительных чисел, т. е. $0<y<+\infty$.

3. При $a>1$ показательная функция строго возрастает, т. е. из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $a^{x_1}<a^{x_2}$. Причем, если $-\infty<x<0$, то $0<y<1$; если $x=0$, то $y=1$; если $0<x<+\infty$, то $1<y<+\infty$, т. е. если $-\infty<x<+\infty$, то $0<y<+\infty$; $y\to 0$ при $x\to-\infty$ и $y\to+\infty$ при $x\to+\infty$.

4. При $0<a<1$ показательная функция строго убывает, т. е. из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $a^{x_1}>a^{x_2}$. Причем, если $-\infty<x<0$, то $+\infty>y>1$; если $x=0$, то $y=1$; если $0<x<+\infty$, то $1>y>0$, т. е. если $-\infty<x<+\infty$, то $+\infty>y>0$; $y\to+\infty$ при $x\to-\infty$ и $y\to 0$ при $x\to+\infty$.

5. Так как при $x_1 \neq x_2$ $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ и среднее арифметическое двух положительных чисел больше их среднего геометрического, т. е.

$$\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2} > \sqrt{a^{x_1}a^{x_2}}, \text{ или } \frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2} > a^{\frac{x_1+x_2}{2}},$$

то график показательной функции везде вогнутый (см. гл. 7, § 2).

6. Характеристическое свойство: значение показательной функции от суммы равно произведению значений этой функции от слагаемых, т. е.

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}.$$

**График показательной функции** при $a > 1$ изображен на рис. 111, *а*, а при $0 < a < 1$ — на рис. 111, *б*.

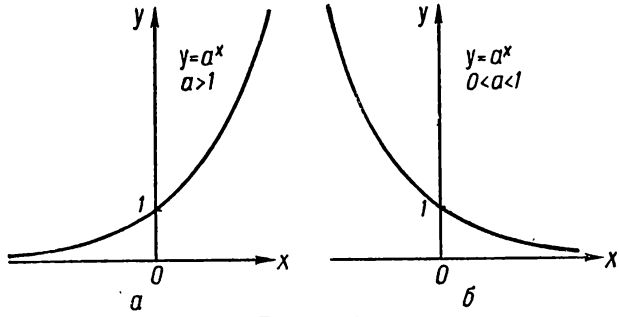



Рис. 111.

Пример. Построить графики функций

$$x = 2^{|x|} \text{ и } y = 0{,}5^{|x|}.$$

Решение. Функция $y = 2^{|x|}$ — четная и ее график симметричен относительно оси ординат. Так как $2^{|x|} = 2^x$ при $x \geqslant 0$, то строим график $y = 2^x$ при $x \geqslant 0$, а затем строим при $x < 0$ кривую, симметричную построенной относительно оси ординат (рис. 112). Аналогично строим график $y = 0{,}5^{|x|}$ (рис. 113). На рис. 114 изображены графики показательных функций $y = 2^x$; $y = 5^x$; $y = 10^x$; $y = 0{,}1^x$; $y = 0{,}2^x$; $y = 0{,}5^x$.

## § 3. Логарифмы и их свойства

Логарифмом числа $b$ по основанию $a$ называется показатель степени, в которую надо возвести число $a$, чтобы получить число $b$.

$$\log_a b = x, \text{ если } a^x = b,$$

или

$$a^{\log_a b} = b. \tag{9.21}$$

Например:

$$\log_2 16 = 4, \text{ так как } 2^4 = 16;$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3 \quad » \quad » \quad 2^{-3} = \frac{1}{8};$$

$$\log_2 1 = 0 \quad » \quad » \quad 2^0 = 1;$$

$$\log_{\sqrt{5}} 25 = 4 \quad » \quad » \quad (\sqrt{5})^4 = 25;$$

$$\log_{(-2)} (-8) = 3 \quad » \quad » \quad (-2)^3 = -8.$$

В дальнейшем основание логарифмов будем считать положительным и отличным от единицы ($a > 0$, $a \neq 1$).

Некоторые свойства логарифмов (при любом положительном основании, не равном единице):

1. Логарифм единицы равен нулю, т. е. $\log_a 1 = 0$.
2. Логарифм основания равен единице, т. е. $\log_a a = 1$.
3. Для любого положительного числа $b$ существует и притом только одно такое действительное число $\alpha$, что $\log_a b = \alpha$.
4. Из равенства $\log_a x_1 = \log_a x_2$ следует $x_1 = x_2$ (и наоборот).

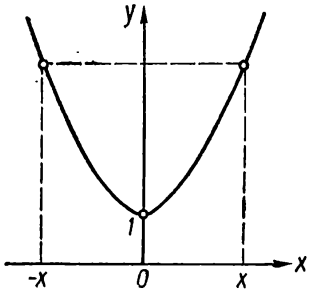



Рис. 112.

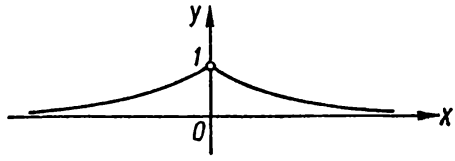



Рис. 113.

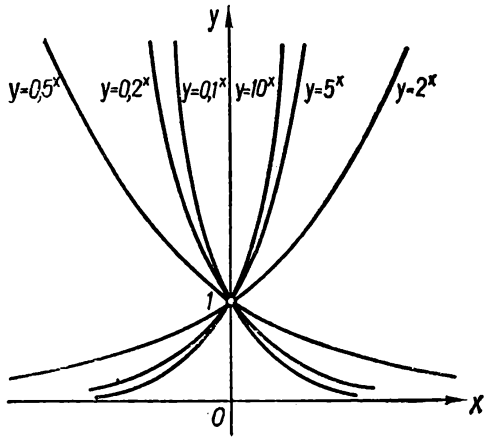



Рис. 114.

**Логарифмирование и потенцирование выражений.** Прологарифмировать данное выражение — значит выразить его логарифм через логарифмы компонентов. Задача, обратная логарифмированию, называется потенцированием.

Пропотенцировать логарифмическое выражение — значит по зависимости между логарифмами данных чисел найти зависимость между данными числами, т. е. найти выражение, логарифм которого равен данному логарифмическому выражению.

Основные правила логарифмирования и потенцирования:

1. Логарифм произведения двух или нескольких положительных

чисел равен сумме логарифмов этих чисел, взятых по тому же основанию, т. е.

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c \tag{9.22}$$

и, наоборот,

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc). \tag{9.23}$$

Доказательство. По определению логарифма,

$$b = a^{\log_a b} \text{ и } c = a^{\log_a c}.$$

Перемножив эти тождества, получим

$$bc = a^{\log_a b + \log_a c},$$

или

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Замечание. В общем случае правило 1 формулируется так: логарифм произведения нескольких чисел, произведение которых положительное, равен сумме логарифмов модулей этих чисел, взятых по тому же основанию, т. е.

$$\log_a (b_1 b_2 \ldots b_n) \equiv \log_a |b_1| + \log_a |b_2| + \cdots + \log_a |b_n| \quad (b_1 b_2 \ldots b_n > 0). \tag{9.22a}$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, взятых по тому же основанию, т. е.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \tag{9.24}$$

и, наоборот,

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}. \tag{9.25}$$

Замечание. Логарифм частного двух чисел, если оно положительно, равен разности логарифмов модулей делимого и делителя, взятых по тому же основанию, т. е.

$$\log_a \frac{b}{c} \equiv \log_a |b| - \log_a |c| \quad (bc > 0). \tag{9.24a}$$

3. Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм ее основания (логарифмы взяты по одному и тому же основанию), т. е.

$$\log_a b^c = c \log_a b \tag{9.26}$$

и, наоборот,

$$c \log_a b = \log_a b^c. \tag{9.27}$$

Доказательство. По определению логарифма,

$$b = a^{\log_a b}.$$

Возведем обе части этого тождества в степень $c$; получим

$$b^c = a^{c \log_a b},$$

или

$$\log_a b^c = c \log_a b.$$

Замечание. Логарифм положительной степени числа, отличного от нуля, равен произведению показателя степени на логарифм модуля ее основания, взятый по тому же основанию, т. е.

$$\log_a b^c \equiv c \log_a |b| \quad (b^c > 0). \tag{9.26a}$$

4. Логарифм корня из положительного числа равен логарифму подкоренного выражения, деленному на показатель корня (логарифмы берутся по одному и тому же основанию),

$$\log_a \sqrt[c]{b} = \frac{1}{c} \log_a b \tag{9.28}$$

и, наоборот,

$$\frac{1}{c} \log_a b = \log_a \sqrt[c]{b}. \tag{9.29}$$

Доказательство. Пользуясь правилом (9.26), получаем

$$\log_a \sqrt[c]{b} = \log_a b^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{c} \log_a b.$$

Заметим, что логарифм суммы и разности через логарифмы слагаемых или уменьшаемого и вычитаемого не выражаются.

Рассмотрим несколько примеров на логарифмирование выражений, в которых все числа и их разности предполагаются положительными. (При логарифмировании основание логарифмов писать не будем, подразумевая под основанием любое положительное число, отличное от 1.)

Пример 1. $x = 2a^3b$; $\log x = \log 2 + 3 \log a + \log b$.

Пример 2. $x = \frac{abc}{mn}$; $\log x = \log a + \log b + \log c - \log m - \log n$.

Пример 3. $x = \sqrt{\frac{ab}{c^3}}$; $\log x = \frac{1}{2}(\log a + \log b - 3 \log c) = \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{3}{2} \log c$.

Пример 4. $x = \sqrt{a \sqrt[3]{b}}$; $\log x = \frac{1}{2}\left(\log a + \frac{1}{3} \log b\right) = \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{6} \log b$.

Пример 5. $x = \sqrt[4]{\frac{(a-b)^2 c^3}{(m+n)^3 n^2}}$; $\log x = \frac{1}{4}[2 \log (a-b) + 3 \log c - 3 \log (m+n) - 2 \log n] = \frac{1}{2} \log (a-b) + \frac{3}{4} \log c - \frac{3}{4} \log (m+n) - \frac{1}{2} \log n$.

Рассмотрим примеры на потенцирование выражений.

Пример 1. $\log x = 2\log a + \frac{1}{2}\log b$; $x = a^2 b^{\frac{1}{2}} = a^2\sqrt{b}$.

Пример 2. $\log x = 2\log(a-b) - \frac{1}{3}\log(m+n) + \log c$; $x = \frac{(a-b)^2 c}{\sqrt[3]{m+n}}$.

Пример 3. $\log x = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\log(a-b) - \frac{1}{4}\log c\right] + \log(a+b)$;

$x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt[4]{c}}}(a+b) = (a+b)\sqrt[12]{\frac{(a-b)^2}{c}}$.

**Формулы перехода от одного основания логарифма к другому.**

1. Логарифм числа по данному основанию равен логарифму этого числа по новому основанию, деленному на логарифм данного основания по новому основанию, т. е.

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}. \tag{9.30}$$

Множитель $\frac{1}{\log_b a}$ называется модулем перехода.

Доказательство. Обозначим $\log_a N$ через $x$. Тогда $a^x = N$. Прологарифмировав это равенство по основанию $b$, получим

$$x \log_b a = \log_b N,$$

или

$$x = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Следовательно, $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$.

2. Из формулы (9.30) при $N = b$ получаем

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{9.31}$$

3. Часто в логарифмических преобразованиях пользуются тождествами

$$\log_{a^k} N \equiv \frac{1}{k}\log_{|a|} N \quad (a^k > 0) \tag{9.32}$$

и

$$\log_{ab} N \equiv \frac{\log_{|a|} N}{1 + \log_{|a|} |b|} \quad (ab > 0). \tag{9.33}$$

Доказать тождества (9.32) и (9.33) предлагаем читателю.

Пример 1. Вычислить

$$\log_2 5 \cdot \log_5 10 \cdot \log_{10} 16.$$

Решение. Пользуясь формулой (9.30), преобразуем все логарифмы в данном выражении к логарифмам по основанию 2. Тогда

$$\log_2 5 \cdot \log_5 10 \cdot \log_{10} 16 = \log_2 5 \cdot \frac{\log_2 10}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 16}{\log_2 10} = \log_2 16 = 4.$$

Ответ. 4.

Пример 2. Даны $\log_{30} 3 = a$ и $\log_{30} 5 = b$. Найти $\log_{30} 8$.

Решение. Представим $\log_{30} 8$ через логарифмы по основанию 2:

$$\log_{30} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 30} = \frac{3}{1 + \log_2 3 + \log_2 5}.$$

По условию

$$\log_{30} 3 = \frac{\log_2 3}{1 + \log_2 3 + \log_2 5} = a, \quad \log_{30} 5 = \frac{\log_2 5}{1 + \log_2 3 + \log_2 5} = b,$$

откуда находим $\log_2 3 = \frac{a}{1-a-b}$ и $\log_2 5 = \frac{b}{1-a-b}$.

Тогда $\log_{30} 8 = \dfrac{3}{1 + \dfrac{a}{1-a-b} + \dfrac{b}{1-a-b}} = 3(1-a-b)$.

Ответ. $\log_{30} 8 = 3(1-a-b)$.

Замечание. Если учесть, что $8 = \left(\frac{30}{5 \cdot 3}\right)^3$, то

$$\log_{30} 8 = 3(\log_{30} 30 - \log_{30} 5 - \log_{30} 3) = 3(1-a-b).$$

Пример 3. Доказать, что $\log_a b = \log_M N$, если $\log_a M = \log_b N$.

Решение. По формуле (9.30)

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}; \text{ поэтому } \log_a M = \frac{\log_a N}{\log_a b},$$

откуда следует $\log_a b = \dfrac{\log_a N}{\log_a M} = \log_M N$.

Пример 4. Доказать, что

$$\log_a N \log_b N + \log_b N \log_c N + \log_a N \log_c N = \frac{\log_a N \log_b N \log_c N}{\log_{abc} N},$$

где $N$, $a$, $b$, $c$ — положительные числа, не равные 1.

Решение. На основании формулы (9.31) имеем:

$$\log_a N \log_b N + \log_b N \log_c N + \log_a N \log_c N =$$

$$= \frac{1}{\log_N a \log_N b} + \frac{1}{\log_N b \log_N c} + \frac{1}{\log_N a \log_N c} =$$

$$= \frac{\log_N c + \log_N a + \log_N b}{\log_N a \log_N b \log_N c} = \frac{\log_N abc}{\log_N a \log_N b \log_N c} =$$

$$= \frac{\log_a N \log_b N \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

5. Доказать, что $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Доказательство. Прологарифмировав равенство $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ по основанию $c$, получим

$$\log_a b \log_c a = \log_c a \log_c b,$$

откуда следует

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}.$$

## § 4. Логарифмическая функция, ее свойства и график

Логарифмической функцией называется функция вида

$$y = \log_a x,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$ и $x$ — независимая переменная.

По определению логарифма выражение $y = \log_a x$ означает то же, что и выражение $a^y = x$, т. е. логарифмическая функция $y = \log_a x$ есть обратная функция по отношению к показательной $y = a^x$ (см. понятие обратной функции в § 2, гл. 7).

**Основные свойства логарифмической функции.**

1. Логарифмическая функция определена при всех положительных значениях $x$ (нуль и отрицательные числа при положительном основании логарифмов не имеют).

2. Областью изменения логарифмической функции служит множество всех действительных чисел $-\infty < y < +\infty$.

3. При $a > 1$ логарифмическая функция возрастает, т. е. если $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Причем, если $0 < x < 1$, то $-\infty < y < 0$; если $x = 1$, то $y = 0$; если $1 < x < +\infty$, то $0 < y < +\infty$, т. е. если $0 < x < +\infty$, то $-\infty < y < +\infty$; $y \to -\infty$ при $x \to 0$ и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

4. При $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает, т. е. если $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Причем, если $0 < x < 1$, то $+\infty > y > 0$; если $x = 1$, то $y = 0$, если $1 < x < +\infty$, то $0 > y > -\infty$, т. е. если $0 < x < +\infty$, то $+\infty > y > -\infty$; $y \to -\infty$ при $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$ при $x \to 0$.

5. Если $a > 1$, то график логарифмической функции выпуклый, т. е. имеет место неравенство

$$\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} < \log_a \frac{x_1 + x_2}{2},$$

а если $0 < a < 1$, то график логарифмической функции вогнутый, т. е.

$$\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} > \log_a \frac{x_1 + x_2}{2},$$

где $0 < x_1 < x_2$.

6. Характеристическое свойство. Значение логарифмической функции от произведений двух положительных чисел равно сумме значений функции от каждого из чисел:

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

**График логарифмической функции.** Так как логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$ взаимно обратны, то их графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

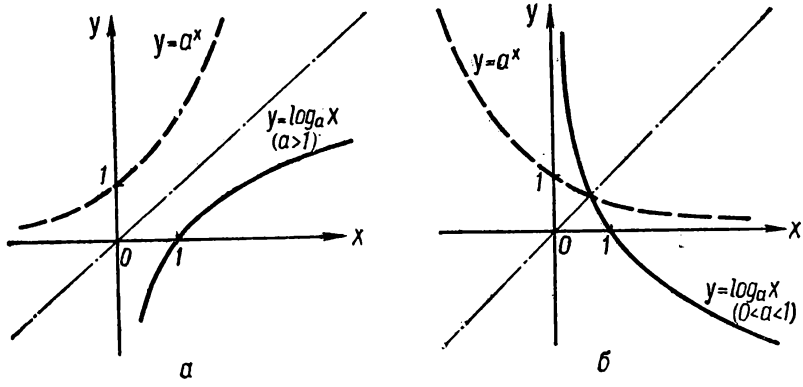



Рис. 115.

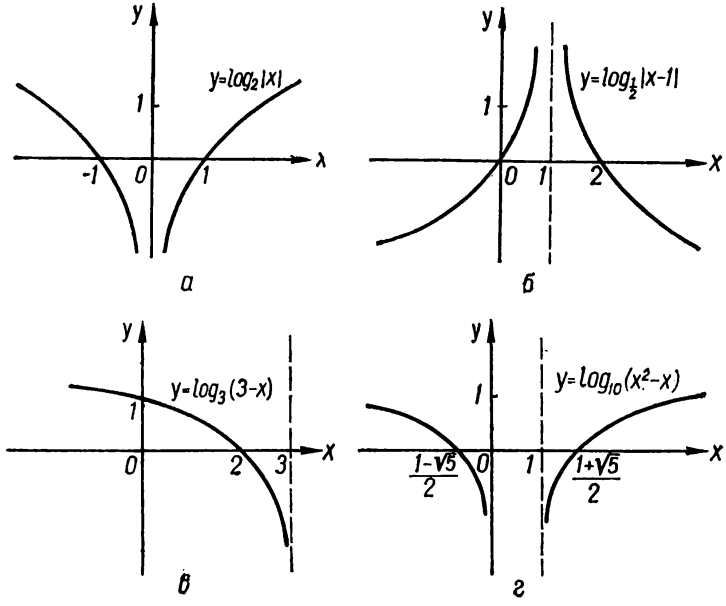



Рис. 116.

На рис. 115*а* изображен график логарифмической функции при $a > 1$, а на рис. 115, *б* — при $0 < a < 1$.

Несколько графиков сложных логарифмических функций $y = \log_2 |x|$, $y = \log_{\frac{1}{2}} |x - 1|$, $y = \log_3 (3 - x)$ и $y = \log_{10} (x^2 - x)$ представлены соответственно на рис. 116, *а*, *б*, *в*, *г*.

## § 5. Десятичные логарифмы и их основные свойства

**Логарифмы по основанию 10 называются десятичными логарифмами.** Обозначаются $\log_{10} N = \lg N$.

Основные свойства десятичных логарифмов:

1. Десятичный логарифм целого числа, изображенного единицей с последующими нулями, есть целое положительное число, равное числу нулей в записи данного числа.

Например: $\lg 10 = 1$, $\lg 100 = 2$, $\lg 1000 = 3$, $\lg 10000 = 4$.

2. Десятичный логарифм правильной десятичной дроби, изображаемой единицей с предшествующими нулями, равен целому отрицательному числу, содержащему столько единиц, сколько нулей в изображении данной дроби, считая и 0 целых.

Например: $\lg 0{,}1 = -1$, $\lg 0{,}01 = -2$, $\lg 0{,}001 = -3$, $\lg 0{,}0001 = -4$.

3. Десятичный логарифм рационального числа, не равного целой или нулевой степени десяти, есть число иррациональное.

Например: $\lg 3$, $\lg 5$, $\lg 0{,}25$, $\lg 7$, $\lg 12$ — числа иррациональные.

Заметим, что десятичный логарифм иррационального числа может быть числом как рациональным, так и иррациональным. Например, $\lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ — число рациональное.

Определение. Целая часть логарифма называется его характеристикой, а дробная — мантиссой.

4. Характеристика десятичного логарифма числа, большего единицы, на единицу меньше числа цифр его целой части.

Например: $\lg 56{,}35 = 1$, ... ; $\lg 6{,}36 = 0$, ... ; $\lg 104{,}01 = 2$, ...

5. Характеристика десятичного логарифма числа, меньшего единицы, содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей в десятичной записи этого числа до первой значащей цифры, считая нуль целых (мантисса логарифма положительная).

Например: $\lg 0{,}012 = \bar{2}$, ... ; $\lg 0{,}0000128 = \bar{5}$, ...

6. От умножения (деления) числа на натуральную степень десяти мантисса десятичного логарифма не меняется, а характеристика увеличивается (уменьшается) на показатель степени десяти.

Например: $\lg 2 = 0{,}3010...$; $\lg 200 = 2{,}3010...$; $\lg 0{,}02 = \bar{2}{,}3010...$

**Преобразование отрицательного логарифма к логарифму с положительной мантиссой.** Десятичные логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательные. Такие логарифмы всегда можно представить логарифмом с отрицательной характеристикой и положительной мантиссой.

Например: $-1{,}0281 = -1 - 0{,}0281 = -1 - 1 + 1 - 0{,}0281 = -2 + 0{,}9719 = \bar{2}{,}9719$. Кратко это записывают $-1{,}0281 = \bar{2}{,}9719$. Чтобы преобразовать логарифм с отрицательной мантиссой в логарифм с положительной мантиссой, надо к характеристике прибавить $-1$, а к мантиссе $+1$.

**Значение логарифмов для вычислений.** Логарифмирование и потенцирование дает возможность заменить вычисление произведения двух чисел сложением их логарифмов, деление — вычитанием логарифмов, возведение в степень — умножением показателя степени на логарифм основания, извлечение корня — делением логарифма подкоренного выражения на показатель корня, а затем по найденному логарифму результата действия найти искомое число.

С помощью логарифмов более трудные действия над числами заменяются более легкими действиями над их логарифмами.

На практике для вычислений применяются десятичные логарифмы.

## § 6. Логарифмическая линейка

Логарифмическая, или счетная, линейка предназначена для быстрого выполнения различных математических действий (умножения, деления, возведения в степень и др.) в тех случаях, когда не требуется большая точность.

Логарифмическая линейка состоит из корпуса (линейки), движка и бегунка; на бегунке имеется визирная линия (рис. 117). Бывают также и круглые логарифмические линейки (рис. 118). На корпусе и движке нанесены числовые шкалы (рис. 119, *а*). Шкалы *A* и *B* называются основными; с помощью этих шкал производится большинство вычислений, которые можно выполнять на линейке. В частности, шкалы *A* и *B* предназначены для выполнения действий умножения и деления чисел, а также для решения пропорций. Шкалой *L* пользуются для нахождения логарифмов чисел. По шкале *C* определяются квадраты, а по шкале *K* — кубы чисел. Применяя обе шкалы вместе, можно находить и другие натуральные степени чисел. Кроме того,

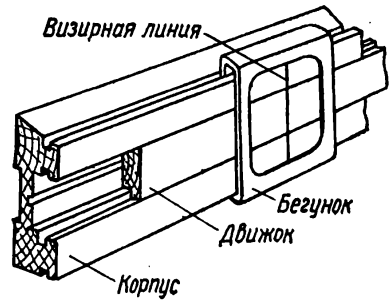
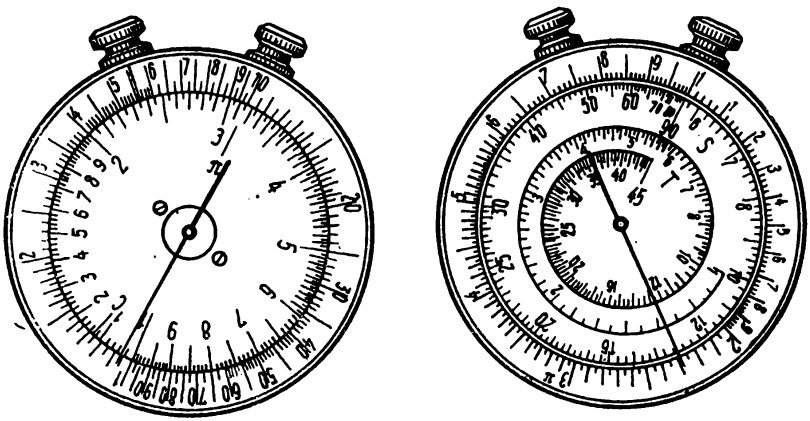



Рис. 117.



*а* *б*

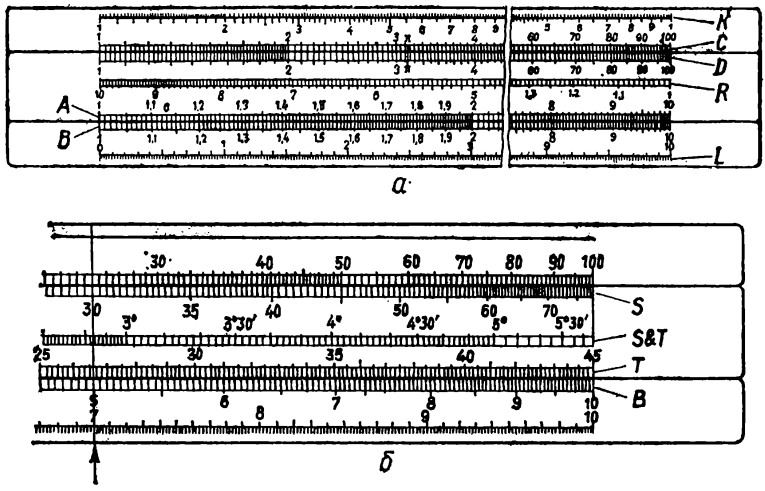
Рис. 118.

с помощью шкал *C* и *K* извлекаются квадратные и кубические корни из чисел. Шкала *R* предназначена для нахождения чисел, обратных данным. На оборотной стороне движка имеются шкалы *S*, *T* и *S* & *T*, которые называются тригонометрическими и служат для нахождения

значений тригонометрических и обратных тригонометрических функций (рис. 119, *б*).

Все шкалы логарифмической линейки, кроме шкалы $L$, имеют неравномерные деления и называются логарифмическими, а шкала $L$ имеет равномерные деления. Так как шкалы линейки (за исключением шкалы $L$) — логарифмические, то и линейку называют логарифмической.

Шкалы $A$ и $B$, а также $C$ и $D$ — попарно одинаковые. Против каждого числа $x$ на шкале $B$ находится его десятичный логарифм $y = \lg x$ на шкале $L$, а против каждого числа $y$ на шкале $L$ находится число $x = 10^y$ на шкале $B$. Чтобы найти произведение $x_0 = x_1 x_2$ двух чисел $x_1$ и $x_2$, устанавливают движок так, чтобы левая единица шкалы $A$ совместилась с отметкой числа $x_1$ на шкале $B$. Против




*а*

*б*

Рис. 119.

отметки числа $x_2$ шкалы $A$ на шкале $B$ находим произведение $x_0 = x_1 x_2$. На шкале $L$ против отметки числа $x_1$ шкалы $B$ находится число $y_1 = \lg x_1$, против отметки числа $x_2$ шкалы $A$ (с выдвинутым движком) — число $y = \lg x_1 + \lg x_2$; поэтому на шкале $B$ против числа $y = \lg x_1 + \lg x_2$ шкалы $L$ находится число $x_0 = x_1 x_2$.

Аналогично объясняется принцип выполнения на логарифмической линейке действия деления чисел.

Чтобы найти частное $x_0 = \frac{x_1}{x_2}$ от деления двух чисел $x_1$ и $x_2$ при $x_1 > x_2$, устанавливаем движок так, чтобы отметка числа $x_2$ шкалы $A$ находилась против отметки числа $x_1$ на шкале $B$. Против левой единицы шкалы $A$ на шкале $B$ находим частное $x_0 = \frac{x_1}{x_2}$ ($\lg x_0 = \lg x_1 - \lg x_2$, $\lg x_1 = \lg x_0 + \lg x_2$).

Шкалы $A$ и $B$ обладают следующими важными свойствами: при любом смещении шкал $A$ и $B$ все числа шкалы $A$ пропорциональны расположенным против них числам шкалы $B$. Например, если против чисел $a_1$ и $a_2$ шкалы $A$ находятся числа $b_1$ и $b_2$ шкалы $B$, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Это свойство шкал $A$ и $B$ используется для выполнения действий умножения и деления чисел, для решения пропорций и других вычислений.

Принцип использования других шкал следующий:

1) против каждого числа $x_0$ шкалы $B$ находятся числа:

$$u_0 = x_0^2 \text{ на шкале } C;$$

$$v_0 = x_0^3 \text{ на шкале } K;$$

$$w_0 = \frac{10}{x_0} \text{ на шкале } R$$

(при несмещенном движке; или против числа $x_0$ шкалы $A$ при любом положении движка);

2) против каждого из чисел $u_0$ (шкалы $C$) или $v_0$ (шкалы $K$) на шкале $B$ находится число $x_0$, соответственно равное $x_0 = \sqrt{u_0}$ или $x_0 = \sqrt[3]{v_0}$;

3) против каждого числа $x_0$ шкалы $B$ находятся числа (на оборотной стороне движка при невыдвинутом движке)

$$S_0 = \arcsin(x_0 \cdot 10^{-1}) \text{ (на шкале } S);$$

$$t_0 = \operatorname{arctg}(x_0 \cdot 10^{-1}) \text{ (на шкале } T);$$

$$S_0 = \arcsin(x_0 \cdot 10^{-2}) \approx t_0 = \operatorname{arctg}(x_0 \cdot 10^{-2}) \text{ (на шкале } S\&T);$$

4) против каждого из чисел $S_0$ (шкалы $S$ или $S\&T$) или $t_0$ (шкалы $T$ или $S\&T$) на шкале $B$ находится число $x_0$, соответственно равное $x_0 = 10 \sin S_0$ (или $x_0 = 10^2 \sin t_0$) или $x_0 = 10 \operatorname{tg} t_0$ (или $x_0 = 10^2 \operatorname{tg} t_0$).

Более подробно остановиться на правилах вычислений с помощью логарифмической линейки здесь нет возможности.

Следует отметить, что умение хорошо пользоваться логарифмической линейкой значительно ускоряет решение задач, связанных с вычислениями.

## § 7. Показательные и логарифмические уравнения

**Показательные уравнения.** Показательным называется уравнение, неизвестное которого входит только в показатель степени.

Например: $2^{3x} = 4^x$, $10^{x^2-5x+1} = 5^x + 1$, $3^x = 5$, $9^x - 3^x - 2 = 0$.

Общего метода решения показательных уравнений в элементарной математике не существует. Поэтому рассмотрим несколько типов показательных уравнений, решаемых методами элементарной математики. Показательные уравнения рассматриваются в множестве действительных чисел. Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения при решении показательных уравнений в общем случае обязательна.

1. Уравнение вида

$$a^x = b \tag{9.34}$$

называется простейшим показательным.

Рассмотрим уравнение (9.34) при $a > 0$ и $a \neq 1$. Если $b > 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \log_a b$. Если $b \leqslant 0$, то уравнение решений не имеет.

Пример 1. Решить уравнение $36^x = \frac{1}{216}$.

Решение. Решим это уравнение двумя способами.

Первый способ. $36^x = 216^{-1}$, или $6^{2x} = 6^{-3}$, откуда находим

$$2x = -3,\ x = -\frac{3}{2}.$$

Второй способ. $x = \log_{36} \frac{1}{216} = -\log_{36} 216 = -\frac{1}{2}\log_6 216 = -\frac{3}{2}$.

Ответ. $-\frac{3}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $4^{x+2} - 10 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x+3} - 11 \cdot 2^{2x}$.

Решение. Приведем уравнение к виду (9.34)

$$4^{x+2} + 11 \cdot 2^{2x} = 2 \cdot 3^{x+3} + 10 \cdot 3^x, \text{ или } 4^x(4^2 + 11) = 3^x(2 \cdot 3^3 + 10),$$

$$4^x \cdot 3^3 = 3^x \cdot 4^3,\ \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3,$$

откуда находим $x = 3$.

Ответ. $x = 3$.

2. Показательное уравнение вида $a^{f(x)} = b$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, заменой $f(x)$ на $t$ приводится к виду (9.34).

Пример. Решить уравнение $5^{x^2-1} = 125$.

Решение. Введем замену $x^2 - 1 = t$. Уравнение примет вид $5^t = 125$, или $5^t = 5^3$, откуда найдем $t = 3$; $x^2 - 1 = 3$; $x^2 = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Однако замену производить не обязательно; можно решать непосредственно:

А. $5^{x^2-1} = 5^3$, или $x^2 - 1 = 3$, $x^2 = 4$; $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Б. $x^2 - 1 = \log_5 125$, или $x^2 - 1 = 3$; $x^2 = 4$; $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Ответ. $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

3. Показательное уравнение вида

$$a^{f_1(x)} = b^{f_2(x)}, \tag{9.35}$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, а $f_1(x)$, $f_2(x)$ — заданные элементарные функции, логарифмированием приводится к виду

$$f_1(x) \log_c a = f_2(x) \log_c b.$$

Если последнее уравнение решается методами элементарной математики, то тем самым решается уравнение (9.35).

Пример. Решить уравнение $5^x = 3^{x+1}$.

Решение. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3; получим

$$x \log_3 5 = x + 1,$$

откуда найдем

$$x = \frac{1}{\log_3 5 - 1} = \frac{1}{\log_3 \frac{5}{3}} = \log_{\frac{5}{3}} 3.$$

Ответ. $x = \log_{\frac{5}{3}} 3$.

4. Показательное уравнение вида

$$F(a^{f(x)}) = 0, \tag{9.36}$$

где $F(t)$ и $f(x)$ — заданные алгебраические функции относительно переменных $t$ и $x$, заменой $a^{f(x)} = t$ сначала приводится к уравнению $F(t) = 0$, а затем к совокупности уравнений $a^{f(x)} = t_1$, $a^{f(x)} = t_2$, ..., $a^{f(x)} = t_n$, где $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$ — корни уравнения $F(t) = 0$. Если все эти уравнения разрешимы, то и уравнение (9.36) также разрешимо.

Пример 1. Решить уравнение

$$3^{x^2+1} + 3^{x^2-1} = 270.$$

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$3^{x^2} \cdot 3 + 3^{x^2} \cdot \frac{1}{3} = 270$$

и обозначим $3^{x^2} = t$. Тогда относительно $t$ оно примет вид $3t + \frac{1}{3}t = 270$, или $\frac{10}{3}t = 270$, $t = 81$; поэтому $3^{x^2} = 81$, или $3^{x^2} = 3^4$, откуда найдем $x^2 = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Ответ. $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Пример 2. Решить уравнение $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $8^x > 0$, получим $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$.

Обозначим $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$; тогда относительно $t$ уравнение примет вид $t^3 + t - 2 = 0$.

В результате решения находим, что уравнение имеет один действительный корень $t = 1$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1; \quad x = \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0.$$

Ответ. $x = 0$.

5. Уравнение вида

$$[\varphi(x)]^{f_1(x)} = [\varphi(x)]^{f_2(x)} \tag{9.37}$$

(показательно-степенное) сводится к решению следующих четырех:

А. $\varphi(x) = -1$. Корни этого уравнения являются корнями данного, если значения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ от этих корней — целые числа одинаковой четности или дробные несократимые с нечетными знаменателями и одинаковой четности числителями.

Б. $\varphi(x) = 0$. Корни этого уравнения являются корнями данного, если значения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ от этих корней положительны.

В. $\varphi(x) = 1$. Корни этого уравнения являются корнями данного, если существуют функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ от этих корней.

Г. $f_1(x) = f_2(x)$. Корни этого уравнения являются корнями данного, если при значениях $x$, равных этим корням, уравнение (9.37) имеет смысл.

Пример 1. Решить уравнение $x^{x+1} = x^{x^2-1}$.

Решение. А. $x = -1$. Проверка: $(-1)^0 = (-1)^0$, или $1 = 1$; $x_1 = -1$.

Б $x = 0$. Проверка: $0^1 = 0^{-1}$ не имеет смысла.

В $x = 1$. Проверка: $1^2 = 1^0$, или $1 = 1$; $x_2 = 1$.

Г. $x + 1 = x^2 - 1$, или $x^2 - x - 2 = 0$, откуда $x = 2$ и $x = -1$; $x = -1$ — найденный корень уравнения.

Проверим $x = 2$:

$$2^{2+1} = 2^{4-1}, \text{ или } 2^3 = 2^3; \; x_3 = 2.$$

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Пример 2. Решить уравнение $(x-2)^{x^2+2x} = (x-2)^{11x-20}$.

Решение. А. $x - 2 = -1$; $x = 1$. Проверка: $(-1)^3 = (-1)^9$, или $-1 = -1$; $x_1 = 1$.

Б $x - 2 = 0$; $x = 2$. Проверка: $0^{4+4} = 0^{22-20}$, или $0 = 0$; $x_2 = 2$.

В. $x - 2 = 1$, или $x = 3$. Проверка: $1^{9+6} = 1^{33-20}$, или $1 = 1$; $x_3 = 3$.

Г. $x^2 + 2x = 11x - 20$, или $x^2 - 9x + 20 = 0$; $x = 4$, $x = 5$. Проверка: $x = 4$; $2^{16+8} = 2^{44-20}$, или $2^{24} = 2^{24}$; $x_4 = 4$; $x = 5$; $3^{25+10} = 3^{55-20}$, или $3^{35} = 3^{35}$; $x_5 = 5$.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$.

При решении показательных уравнений часто пользуются искусственными приемами.

Пример 1. Решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $5^x$, получим

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Замечаем очевидный корень $x_1 = 2$, так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. Покажем, что данное уравнение больше корней не имеет.

А. Пусть $x < 2$; тогда $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2$ (показательная функция при основании, меньшем единицы, убывает). Складывая эти неравенства, получаем $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$, или $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$, а это значит, что среди чисел $x < 2$ корней уравнения нет.

Б. Пусть $x > 2$; тогда $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2$. Складывая, находим $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$, или $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1$, а это значит, что среди чисел $x > 2$ корней уравнения нет.

Ответ. $x = 2$.

Пример 2. Решить уравнение $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$.

Решение. Замечая, что $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 1$, обозначим $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = t$; тогда относительно $t$ уравнение примет вид $t + \frac{1}{t} = 10$, откуда найдем $t_1 = 5 - 2\sqrt{6}$, $t_2 = 5 + 2\sqrt{6}$.

А. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 5-2\sqrt{6}$, или $(5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = \frac{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}{5+2\sqrt{6}} = (5+2\sqrt{6})^{-1}$; $\frac{x}{2} = -1$, $x_1 = -2$.

Б. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 5+2\sqrt{6}$, или $(5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = (5+2\sqrt{6})^1$; $\frac{x}{2} = 1$, $x_2 = 2$.

Ответ. $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\left(2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}}\right) - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\left(2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}}\right) - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) - 1 = 0.$$

Обозначим $2^x - \frac{2}{2^x}$ через $t$; тогда

$$2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} = \left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)\left(2^{2x} + 2 + \frac{4}{2^{2x}}\right) =$$

$$= \left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)\left[\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^2 + 6\right] = t(t^2+6).$$

Относительно $t$ уравнение примет вид $t(t^2+6)-6t-1=0$, или $t^3=1$, откуда находим $t=1$. Поэтому $2^x - \frac{2}{2^x} = 1$, или $2^{2x} - 2^x - 2 = 0$; $2^x = 2$, или $2^x = -1$.

Из первого уравнения находим $x = 1$; второе уравнение решений не имеет.

Ответ. $x = 1$.

**Логарифмические уравнения.** Логарифмическими уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестное только под знаком логарифма.

Например: $\lg x = 10$; $\log_2(x^2 - 5x + 3) - \log_2 x = 2$; $\log_{x^2}(x-1) + \log_{x-1} x^2 = 2$.

Общего метода решения логарифмических уравнений в элементарной математике не существует. Поэтому рассмотрим несколько типов логарифмических уравнений, решаемых методами элементарной математики. Логарифмические уравнения, как и показательные, рассматриваются только в множестве действительных чисел. Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения в общем случае является обязательной.

1. Уравнение вида

$$\log_a x = b, \tag{9.38}$$

где $x$ — неизвестное, а $a$ и $b$ — заданные числа, называется простейшим логарифмическим.

Если $a>0$ и $a\neq 1$, то такое уравнение при любом действительном значении $b$ имеет единственное решение

$$x=a^b. \tag{9.39}$$

Пример 1. Решить уравнение $\log_2 x=-1$.

Решение. Потенцируя, получим

$$x=2^{-1}=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $x=\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $\log_4 x^2=3$.

Решение. Потенцируя, получим

$$x^2=4^3=64,$$

откуда найдем

$$x_1=-8,\ x_2=8.$$

Ответ. $x_1=-8,\ x_2=8$.

Замечание. При доказательстве правил логарифмирования и потенцирования выражений предполагалось, что основание логарифмов положительное и отличное от единицы, а все подлогарифмические выражения положительные.

Рассмотрим равенство $\log_a x^2=2\log_a x$ при $a>0$, $a\neq 1$. Левая часть его существует при всех значениях $x\neq 0$, а правая — только при $x>0$. При решении уравнения $\log_4 x^2=3$ способом логарифмирования получили бы $2\log_4 x=3$, или $\log_4 x=\frac{3}{2}$; $x=4^{\frac{3}{2}}=\sqrt{64}=8$, т. е. одно решение потеряли. Поэтому при решении уравнений и вообще при логарифмировании надо выполнять тождественные преобразования, стараясь по возможности не изменять область определения данного выражения. Например, в последнем примере следует поступить так:

$$\log_a x^2=\log_a |x|^2=2\log_a |x|.$$

Вообще формулы (9.22), (9.24), (9.26), если не указано, что $b>0$ и $c>0$, должны применяться в виде

$$\log_a (bc)=\log_a |b|+\log_a |c|, \tag{9.40}$$

где $bc>0$ (т. е. $b>0$ и $c>0$ или $b<0$ и $c<0$);

$$\log_a \frac{b}{c}=\log_a |b|-\log_a |c|, \tag{9.41}$$

где $bc>0$ (т. е. $b>0$ и $c>0$ или $b<0$ и $c<0$);

$$\log_a b^c=c\log_a |b|, \tag{9.42}$$

где $b\neq 0$ и $b^c>0$ (если $b<0$, то $c$ — четное целое число или несократимая дробь с нечетным знаменателем и четным числителем; если $b>0$, то $c$ — произвольное действительное число).

Пример 3. Решить уравнение $\lg (x-5)^2+\lg (x+6)^2=2$.

Решение. Прологарифмируем слагаемые левой части уравнения:

$$2\lg |x-5|+2\lg |x+6|=2,$$

или

$$\lg |x-5|+\lg |x+6|=1.$$

(Можно сразу потенцировать: $(x-5)^2(x+6)^2=100$. $(x-5)(x+6)=-10$; $(x-5)(x+6)=10$ и т. д.)
Потенцируя, получим

$$|x-5|\,|x+6|=10, \text{ или } |x^2+x-30|=10.$$

А. Если $x^2+x-30<0$, то $x^2+x-30=-10$, или $x^2+x-20=0$, откуда $x_1=-5$, $x_2=4$.

Б. Если $x^2+x-30\geqslant 0$, то $x^2+x-30=10$, или $x^2+x-40=0$, откуда $x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{161}}{2}$.

После проверки убеждаемся, что $x_1=-5$, $x_2=4$,

$$x_3=\frac{-1-\sqrt{161}}{2},\quad x_4=\frac{-1+\sqrt{161}}{2}$$ — корни уравнения.

Ответ. $x_1=-5$, $x_2=4$, $x_3=\dfrac{-1-\sqrt{161}}{2}$, $x_4=\dfrac{-1+\sqrt{161}}{2}$.

2. Логарифмические уравнения вида

$$\log_a f_1(x)=\log_a f_2(x), \tag{9.43}$$

где $a>0$ и $a\neq 1$, после потенцирования приводятся к виду

$$f_1(x)=f_2(x). \tag{9.44}$$

Корнями уравнения (9.43) будут только те корни уравнения (9.44), при которых $f_1(x)>0$ и $f_2(x)>0$, т. е. корни, принадлежащие к области определения уравнения (9.43).

Пример 1. Решить уравнение $\lg(152+x^3)=3\lg(x+2)$.

Решение. Область определения уравнения найдем, решив систему неравенств

$$\begin{cases} 152+x^3>0,\\ x+2>0, \end{cases}$$

откуда $x>-2$.

Потенцируя данное уравнение, получим $152+x^3=(x+2)^3$, или, после упрощений, $x^2+2x-24=0$, откуда найдем $x_1=-6$, $x_2=4$.

$x_1=-6<-2$ не принадлежит к ОДЗН данного уравнения и корнем не является.

Ответ. $x=4$.

Пример 2. Решить уравнение $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18$.

Решение. Найдем область определения данного уравнения, решив систему неравенств

$$\begin{cases} 5x-4>0,\\ x+1>0, \end{cases}$$

откуда $x>\dfrac{4}{5}$.

Потенцируя данное уравнение, получим $\sqrt{5x-4}\sqrt{x+1}=100\times 0{,}18$, или $\sqrt{(5x-4)(x+1)}=18$. После упрощений получаем $5x^2+x-328=0$; $x_1=-\dfrac{41}{5}$, $x_2=8$.

$x_1 = -\frac{41}{5} < \frac{4}{5}$ не принадлежит к ОДЗН данного уравнения. Проверкой убеждаемся, что $x = 8$ — корень уравнения.

Ответ. $x = 8$.

3. Логарифмические уравнения вида

$$f(\log_a \varphi(x)) = 0, \tag{9.45}$$

где $f(t)$ и $\varphi(x)$ — некоторые заданные функции, заменой $\log_a \varphi(x) = t$ приводятся к уравнению

$$f(t) = 0. \tag{9.46}$$

Пример 1. Решить уравнение $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$.

Решение. Найдем ОДЗН: $x > 0$; $5 - \lg x \neq 0, 1 + \lg x \neq 0$; откуда $0 < x < 0{,}1$; $0{,}1 < x < 100000$; $100000 < x < +\infty$.

Заменим $\lg x$ на $t$; тогда относительно $t$ уравнение примет вид

$$\frac{1}{5 - t} + \frac{2}{1 + t} = 1.$$

В результате решения находим $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, или $\lg x = 2$ и $\lg x = 3$; $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$.

Ответ. $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$.

Пример 2. Решить уравнение $\lg(10x) \cdot \lg(0{,}1x) = \lg x^3 - 3$.

Решение. Допустимые значения неизвестного: $x > 0$. Преобразуем уравнение к виду $(1 + \lg x)(-1 + \lg x) = 3 \lg x - 3$ и заменим $\lg x$ на $t$; тогда относительно $t$ получим

$$(1 + t)(t - 1) = 3t - 3.$$

В результате решения находим $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, или $\lg x = 1$ и $\lg x = 2$; $x_1 = 10$, $x_2 = 100$.

Ответ. $x_1 = 10$, $x_2 = 100$.

Пример 3. Решить уравнение $\log_2(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1) - 2\log_4(\sqrt{\lg x} + 1) = 1$.

Решение. Допустимые значения неизвестного: $x > 1$. Пользуясь формулой (9.32), перепишем уравнение в виде

$$\log_2(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1) - \log_2(\sqrt{\lg x} + 1) = 1.$$

Потенцируя, получим

$$\frac{\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1}{\sqrt{\lg x} + 1} = 2, \text{ или } \sqrt{\lg x} + 1 = 2;\ \sqrt{\lg x} = 1;\ x = 10.$$

Ответ. $x = 10$.

Пример 4. Решить уравнение $\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$.

Решение. Допустимые значения неизвестного найдем из системы

$$\begin{cases} 3x \neq 1, \\ x > 0, \text{ откуда следует } 0 < x < \frac{1}{3},\ x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Применяя формулу (9.33), перепишем уравнение в виде

$$\frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x}+\log_3^2 x=1$$

и заменим $\log_3 x$ на $t$; тогда

$$\frac{1-t}{1+t}+t^2=1;\ t_1=0,\ t_2=1,\ t_3=-2,$$

или

$$\log_3 x=0,\ \log_3 x=1 \text{ и } \log_3 x=-2;\ x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=\frac{1}{9}.$$

Ответ. $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=\frac{1}{9}$.

**Показательно-логарифмические уравнения.** Если неизвестные уравнения входят в показатель степени и под знак логарифма, то такое уравнение называют показательно-логарифмическим.

Показательно-логарифмические уравнения чаще всего решают, логарифмируя обе части уравнения, и приводят их к логарифмическим уравнениям.

Пример 1. Решить уравнение $x^{\log_2 x^3-\log_2^2 x-3}=\frac{1}{x}$.

Решение. Допустимые значения неизвестного: $x>0$. Прологарифмировав обе части уравнения, получим

$$(\log_2 x^3-\log_2^2 x-3)\log_2 x=-\log_2 x,$$

или

$$3\log_2^2 x-\log_2^3 x-3\log_2 x+\log_2 x=0,$$

$$\log_2^3 x-3\log_2^2 x+2\log_2 x=0,$$

откуда найдем $\log_2 x=0$, $\log_2 x=1$, $\log_2 x=2$; $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$. После проверки получаем $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$.

Пример 2. Решить уравнение $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(3^{\log_3 x})^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162,$$

или, пользуясь тождеством (9.21),

$$x^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162,$$

откуда найдем $x^{\log_3 x}=81$.

Логарифмируя, получим $\log_3^2 x=4$, откуда найдем

$$\log_3 x=-2 \text{ и } \log_3 x=2;\ x_1=\frac{1}{9} \text{ и } x_2=9.$$

Ответ. $x_1=\frac{1}{9}$, $x_2=9$.

Пример 3. Решить уравнение $14^{\log_7 2} \cdot x^{\log_7 4x+1} = 1$.

Решение. Прологарифмируем обе части данного уравнения по основанию 7:

$$\log_7 2\,(1 + \log_7 2) + (2\log_7 2 + \log_7 x + 1)\log_7 x = 0,$$

или

$$\log_7^2 x + (2\log_7 2 + 1)\log_7 x + \log_7 2 + \log_7^2 2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_7 x$, находим $\log_7 x = -\log_7 2 - 1$ и $\log_7 x = -\log_7 2$, или $x_1 = \frac{1}{14}$ и $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{14}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим решение логарифмических уравнений с параметрами.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{\log_x (ax)}\,\log_a x = -\sqrt{2}$.

Решение. Допустимыми значениями неизвестного и параметра являются значения, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ a > 0, \\ a \neq 1, \\ \log_x (ax) \geqslant 0, \end{cases}$$

или $x > 0$ и $x \neq 1$; $a > 0$ и $a \neq 1$; причем, если $0 < x < 1$, то $0 < ax < 1$, а если $x > 1$, то $ax > 1$.

Так как правая часть уравнения отрицательна, то решениями уравнения могут быть только те значения $x$ и при тех значениях $a$, при которых $\log_a x < 0$, т. е. если $a > 1$, то $0 < x < 1$, а если $0 < a < 1$, то $x > 1$.

Преобразуем данное уравнение:

$$\sqrt{\frac{\log_a x + 1}{\log_a x}}\,\log_a x = -\sqrt{2}.$$

Так как уравнение может иметь решение только при $\log_a x < 0$, то $-\sqrt{\log_a^2 x + \log_a x} = -\sqrt{2}$, или $\log_a^2 x + \log_a x - 2 = 0$, откуда найдем $\log_a x = -2$ и $\log_a x = 1$; $\log_a x = 1 > 0$ уравнению не удовлетворяет.

Исследуем $\log_a x = -2$; $x = \frac{1}{a^2}$. Если $0 < x < 1$, то $0 < ax < 1$, или $0 < a \cdot \frac{1}{a^2} < 1$; откуда $a > 1$. Если $x > 1$, то $ax > 1$, или $a \cdot \frac{1}{a^2} < 1$; откуда $0 < a < 1$.

Ответ. $x = \frac{1}{a^2}$, если $0 < a < 1$, $a > 1$.

Пример 2. Решить уравнение $1+\log_x \frac{4-x}{100} = (\lg\lg a - 2) \times \log_x 10$.

Решение. Допустимые значения неизвестного и параметра найдем, решив систему неравенств

$$\begin{cases} 4-x>0, \\ x>0, \\ x\neq 1, \\ \lg a>0, \end{cases}$$

или $0<x<1$, $1<x<4$ и $a>1$.

Потенцируя, получим

$$x\cdot\frac{4-x}{100} = 10^{\lg\lg a-2}, \text{ или } \frac{4x-x^2}{100} = \frac{10^{\lg\lg a}}{100},$$

откуда (по формуле (9.21) следует

$x^2-4x+\lg a=0$, $x_1 = 2-\sqrt{4-\lg a}$ и $x_2 = 2+\sqrt{4-\lg a}$. Эти корни действительные, если $4-\lg a\geqslant 0$, или $a\leqslant 10000$. Учитывая, что $a>1$, имеем $1<a\leqslant 10000$.

При $a=1000$ $x_1=1$ — недопустимое значение неизвестного, т. е. при $a=1000$ уравнение имеет один корень $x_2=3$.

При $a=10000$ $x_1=x_2=2$.

Ответ. $x_{1,2} = 2\pm\sqrt{4-\lg a}$, если $1<a<1000$ и $1000<a<10000$; $x=3$, если $a=1000$; $x=2$, если $a=10000$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}+\log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a.$$

Решение. Допустимые значения: $x>0$, $x\neq 1$ и $a>0$, $a\neq 1$. Преобразуя подкоренные выражения, получим

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1+\log_a x)+\frac{1}{4}(1+\log_x a)} + \sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x-1)+\frac{1}{4}(\log_x a-1)} = a,$$

или

$$\sqrt{\log_a x+2+\frac{1}{\log_a x}} + \sqrt{\log_a x-2+\frac{1}{\log_a x}} = 2a,$$

$$\sqrt{\frac{(\log_a x+1)^2}{\log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x-1)^2}{\log_a x}} = 2a,$$

$$|\log_a x+1| + |\log_a x-1| = 2a\sqrt{\log_a x} \quad (\log_a x>0).$$

А. Если $0<\log_a x<1$, то $2=2a\sqrt{\log_a x}$, или $\log_a x=\frac{1}{a^2}$ и $x=a^{\frac{1}{a^2}}$. Это значение $x$ удовлетворяет уравнению, если $0<\frac{1}{a^2}<1$, т. е. при $a>1$.

Б. Если $\log_a x = 1$, т. е. при $x = a$, получаем $2 = 2a$, или $a = 1$— недопустимое значение параметра. Следовательно, $x \neq a$.

В. Если $\log_a x > 1$, то $2\log_a x = 2a\sqrt{\log_a x}$, или $\log_a x = a^2$ и $x = a^{a^2}$. Это значение $x$ удовлетворяет уравнению, если $\log_a a^{a^2} > 1$, откуда следует $a^2 > 1$, или $a > 1$.

Ответ. $x_1 = a^{a^{-2}}$, $x_2 = a^{a^2}$, если $a > 1$. Если $0 < a < 1$, то уравнение решений не имеет.

## § 8. Системы показательных и логарифмических уравнений

При решении систем показательных и логарифмических уравнений в основном применяются те же способы, что и при решении систем алгебраических уравнений (подстановки, алгебраического сложения, введения новых неизвестных и др.).

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{x+y} = 56, \\ 3 \cdot 2^x + 3^{x+y+1} = 87. \end{cases}$$

Решение. Заменим $2^x = u$ и $3^{x+y} = v$; система примет вид

$$\begin{cases} u + 2v = 56, \\ 3u + 3v = 87. \end{cases}$$

В результате решения находим $u = 2$, $v = 27$. Тогда $\begin{cases} 2^x = 2, \\ 3^{x+y} = 27, \end{cases}$ откуда следует $\begin{cases} x = 1, \\ x + y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

Ответ. (1; 2),

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt[x]{8^y}, \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt[y]{9^{1-y}}. \end{cases}$$

Решение. Представим данную систему в виде

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^5 \cdot 2^{\frac{3y}{x}}, \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3 \cdot 3^{\frac{2(1-y)}{y}}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x}, \\ \frac{x}{y} = 1 + \frac{2(1-y)}{y}. \end{cases}$$

В результате решения находим

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2}, \\ y_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Проверка показывает, что найденные решения удовлетворяют заданной системе.

Ответ. (—2; 4), (1,5; 0,5).

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы найдем $y = x^{-2}$ и подставим его в первое уравнение; получим $x^{x+x^{-2}} = x^{-2(x-x^{-2})}$, или $x^{x+\frac{1}{x^2}} = x^{-2x+\frac{2}{x^2}}$.

Решаем полученное уравнение.

А. $x = -1$; проверяем $(-1)^{-1+1} = (-1)^{2+2}$; $1 = 1$; $x_1 = -1$.

Б. $x = 0$; проверяем $0^{0+\frac{1}{0}} = 0^{0+\frac{2}{0}}$ — не имеет смысла.

В. $x = 1$; $1^2 = 1^0$, $1 = 1$; $x_2 = 1$.

Г. $x + \dfrac{1}{x^2} = -2x + \dfrac{2}{x^2}$, или $3x^3 - 1 = 0$, $x_3 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Зная $x$, находим соответствующие значения $y$ из уравнения $y = x^{-2}$: $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = \sqrt[3]{9}$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения $x$ и $y$ есть решения системы.

Ответ. (—1; 1); (1; 1); $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}; \sqrt[3]{9}\right)$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)^{\lg(x+1,5)} = 0{,}2, \\ \sqrt[\lg(x-y)]{2x+3} = 0{,}1. \end{cases}$$

Решение. Прологарифмировав оба уравнения системы, получим

$$\begin{cases} \lg(x+1,5)\lg(x-y) = \lg 2 - 1, \\ \dfrac{1}{\lg(x-y)} \lg(2x+3) = -1. \end{cases}$$

Обозначим $\lg(x+1,5) = u$, а $\lg(x-y) = v$; тогда $\lg(2x+3) = \lg 2 + \lg(x+1,5) = \lg 2 + u$ и относительно $u$ и $v$ система принимает вид

$$\begin{cases} uv = \lg 2 - 1, \\ \dfrac{\lg 2 + u}{v} = -1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $v = -\lg 2 - u$; подставив в первое, получим

$$u^2 + \lg 2 \cdot u + \lg 2 - 1 = 0,$$

$$u_{1,\,2} = -\frac{1}{2}\lg 2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}\lg^2 2 - \lg 2 + 1},$$

$$u_{1,\,2} = -\frac{1}{2}\lg 2 \pm \frac{1}{2}(2 - \lg 2),$$

$$u_1 = -\lg 2 + 1 = \lg 5;\ u_2 = -1.$$

Тогда $v_1 = -1$, $v_2 = -\lg 2 + 1 = \lg 5$.

Решение заданной системы приводится к решению двух систем

$$\begin{cases} \lg(x + 1{,}5) = \lg 5, \\ \lg(x - y) = -1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \lg(x + 1{,}5) = -1, \\ \lg(x - y) = \lg 5. \end{cases}$$

Решая их, находим

$$\begin{cases} x_1 = 3{,}5, \\ y_1 = 3{,}4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1{,}4, \\ y_2 = -6{,}4. \end{cases}$$

Проверкой устанавливаем, что найденные значения $x$ и $y$ есть решения заданной системы.

Ответ. (3,5; 3,4), (—1,4; —6,4).

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = a^2, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \frac{5}{2}\lg^2 a^2. \end{cases}$$

Решение. Допустимые значения неизвестных и параметра: $x > 0$, $y > 0$ и $a \neq 0$. Логарифмируя первое уравнение, получим $\lg x + \lg y = \lg a^2$. Обозначим $\lg x = u$, $\lg y = v$; тогда относительно $u$ и $v$ система примет вид

$$\begin{cases} u + v = \lg a^2, \\ u^2 + v^2 = \frac{5}{2}\lg^2 a^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $v = \lg a^2 - u$; подставляя его во второе, получим

$$2u^2 - 2\lg a^2 \cdot u - \frac{3}{2}\lg^2 a^2 = 0,$$

откуда следует

$$u_{1,\,2} = \frac{\lg a^2 \pm 2\lg a^2}{2};\ u_1 = \frac{3}{2}\lg a^2,\ u_2 = -\frac{1}{2}\lg a^2.$$

$$v_1 = -\frac{1}{2}\lg a^2,\ v_2 = \frac{3}{2}\lg a^2.$$

Следовательно, решение данной системы приводится к решению двух систем

$$\begin{cases} \lg x = \frac{3}{2}\lg a^2, \\ \lg y = -\frac{1}{2}\lg a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lg x = -\frac{1}{2}\lg a^2, \\ \lg y = \frac{3}{2}\lg a^2. \end{cases}$$

Решая их и проверяя полученные решения по условию заданной системы, находим

$$\begin{cases} x_1 = |a|^3, \\ y_1 = \frac{1}{|a|}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{|a|}, \\ y_2 = |a|^3. \end{cases}$$

Ответ. Если $a < 0$, то решениями системы есть $(-a^3;\ -a^{-1})$, $(-a^{-1};\ -a^3)$.

Если $a > 0$, то решениями системы являются $(a^3;\ a^{-1})$, $(a^{-1};\ a^3)$.

## § 9. Показательные и логарифмические неравенства

При решении показательных неравенств используются следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Если* $a > 1$, *то неравенства*

$$a^{f_1(x)} \lessgtr a^{f_2(x)} \tag{9.47}$$

*равносильны соответственно неравенствам*

$$f_1(x) \lessgtr f_2(x). \tag{9.48}$$

**Теорема 2.** *Если* $0 < a < 1$, *то неравенства*

$$a^{f_1(x)} \lessgtr a^{f_2(x)} \tag{9.49}$$

*равносильны соответственно неравенствам*

$$f_1(x) \gtrless f_2(x). \tag{9.50}$$

Пример 1. Решить неравенство

$$4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x.$$

Решение. Разделим обе части данного неравенства на $10^x > 0$; получим

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x < 1.$$

Обозначим $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$ при $t > 0$; тогда относительно $t$ неравенство примет вид

$$t - 2 \cdot \frac{1}{t} < 1, \text{ или } \frac{t^2 - t - 2}{t} < 0.$$

Учитывая, что $t>0$, получаем

$$\begin{cases} t^2-t-2<0, \\ t>0, \end{cases}$$

откуда следует $0<t<2$. Тогда $0<\left(\frac{2}{5}\right)^x<2$, или, на основании теоремы 2, $+\infty>x>\log_{0,4}2$. Так как $\log_{0,4}2=-\frac{\lg 2}{1-2\lg 2}$, то $-\frac{\lg 2}{1-2\lg 2}<x<+\infty$.

Ответ. $x>-\frac{\lg 2}{1-2\lg 2}$.

Пример 2. Решить неравенство

$$0{,}6^{\left|\frac{x}{x-1}\right|}<0{,}6^x.$$

Решение. По теореме 2 данное неравенство равносильно неравенству $\left|\frac{x}{x-1}\right|>x$, решение которого приводится к решению двух систем

$$\begin{cases} \frac{x}{x-1}\geqslant 0, \\ \frac{x}{x-1}>x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x}{x-1}<0, \\ \frac{x}{1-x}>x, \end{cases}$$

откуда найдем $x<0$, $0<x<1$ и $1<x<2$.

Ответ. $x<0$, $0<x<1$ и $1<x<2$.

При решении логарифмических неравенств используются следующие теоремы.

**Теорема 3.** *Если* $a>1$, *то неравенства*

$$\log_a f_1(x) \lessgtr \log_a f_2(x) \tag{9.51}$$

*в области их определения равносильны соответственно неравенствам*

$$f_1(x) \lessgtr f_2(x). \tag{9.52}$$

**Теорема 4.** *Если* $0<a<1$, то неравенства

$$\log_a f_1(x) \lessgtr \log_a f_2(x) \tag{9.53}$$

*в области их определения равносильны соответственно неравенствам*

$$f_1(x) \gtrless f_2(x). \tag{9.54}$$

При решении логарифмических неравенств надо найти область определения неравенства (ОДЗН); при потенцировании по основанию, большему единицы, знак неравенства сохраняется, а при потенцировании по положительному основанию, меньшему единицы, знак неравенства меняется на противоположный.

Пример 1. Решить неравенство

$$\log_{0,5}(5x+10) < \log_{0,5}(x^2+6x+8).$$

Решение. Область определения данного неравенства найдем, решив систему неравенств

$$\begin{cases} 5x+10>0, \\ x^2+6x+8>0, \end{cases}$$

откуда следует $x>-2$, т. е. ОДЗН $-2<x<+\infty$. Так как основание логарифмов $a=0{,}5<1$, то, по теореме 4, заданное неравенство равносильно неравенству $5x+10>x^2+6x+8$, или $x^2+x-2<0$, откуда следует $-2<x<1$. Эти значения принадлежат области определения заданного неравенства.

Ответ. $-2<x<1$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{(x+1)^2}(x+3)>1$.

Решение. Область определения неравенства найдем, решив систему неравенств

$$\begin{cases} x+3>0, \\ (x+1)^2 \neq 0, \\ (x+1)^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда следует $-3<x<-2$, $-2<x<-1$, $-1<x<0$, $x>0$.

А. Если $0<(x+1)^2<1$, т. е. $-2<x<-1$ и $-1<x<0$, то данное неравенство принимает вид $x+3<(x+1)^2$, или $x^2+x-2>0$, $x<-2$ и $x>1$. Найденные значения $x$ не принадлежат к рассматриваемым.

Б. Если $(x+1)^2>1$ и $x>-3$, т. е. $-3<x<-2$ и $x>0$, то неравенство принимает вид $x+3>(x+1)^2$, или $x^2+x-2<0$; $-2<x<1$. Из найденных значений $x$ рассматриваемым принадлежат $0<x<1$.

Ответ. $0<x<1$.

3. Решить неравенство $x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}>\frac{1}{x}$.

Решение. Допустимые значения неизвестного: $x>0$.

А. Если $0<x<1$, то неравенство, по теореме 2, принимает вид

$$2-\log_2^2 x-\log_2 x^2<-1,$$

или

$$\log_2^2 x+2\log_2 x-3>0.$$

Раскладывая левую часть на множители, получаем $(\log_2 x+3)\times(\log_2 x-1)>0$, откуда следует $\log_2 x<-3$ и $\log_2 x>1$, или

$x < \frac{1}{8}$ и $x > 2$. Из найденных значений $x$ к рассматриваемым принадлежат $0 < x < \frac{1}{8}$.

Б. Если $x > 1$, то заданное неравенство принимает вид $2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > -1$, или $\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 < 0$, $(\log_2 x + 3)(\log_2 x - 1) < 0$, откуда следует $-3 < \log_2 x < 1$, или $\frac{1}{8} < x < 2$. Из найденных значений $x$ к рассматриваемым принадлежат $1 < x < 2$.

В. Если $x = 1$, то заданное неравенство принимает вид $1 > 1$. Следовательно, $x \neq 1$.

Ответ. $0 < x < \frac{1}{8}$ и $1 < x < 2$.

## § 10. Графическое решение уравнений, неравенств и их систем

Рассмотрим примеры графического решения уравнений, неравенств и их систем, в которых неизвестное входит в показатель степени или под знак логарифма.

Пример 1. Решить уравнение $2^{x+1} - x2^x - 1 = 0$.

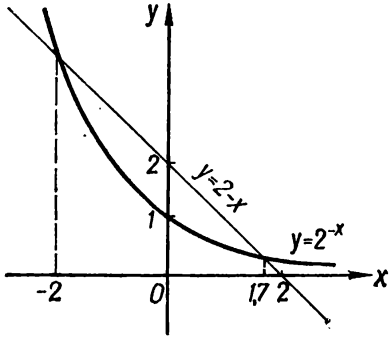



Рис. 120.

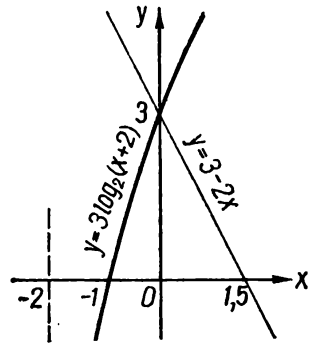



Рис. 121.

Решение. Строить график функции $y = 2^{x+1} - x2^x - 1$ сложно, поэтому приведем данное уравнение к виду $f(x) = \varphi(x)$.

Представим его сначала так: $2^{x+1} - x2^x = 1$, а затем разделим обе части на $2^x \neq 0$; получим $2 - x = 2^{-x}$.

Строим графики функций $y = 2 - x$ и $y = 2^{-x}$ (рис. 120) и находим абсциссы точек пересечения $x_1 \approx -2$, $x_2 \approx 1{,}7$. Подстановкой этих значений $x$ в уравнение убеждаемся, что первый корень точный, а второй приближенный.

Ответ. $x_1 = -2$, $x_2 \approx 1{,}7$.

Пример 2. Решить уравнение $3\log_2(x + 2) + 2x - 3 = 0$.

Решение. Представим уравнение в виде $3\log_2(x + 2) = 3 - 2x$. Строим графики функций $y = 3\log_2(x + 2)$ и $y = 3 - 2x$ (рис. 121).

Графики этих функций имеют одну общую точку, абсцисса которой $x \approx 0$. Проверка показывает, что это точное значение корня.

Ответ. $x = 0$.

Пример 3. Определить графически число действительных корней уравнения

$$\lg|x| = x^2 - 5.$$

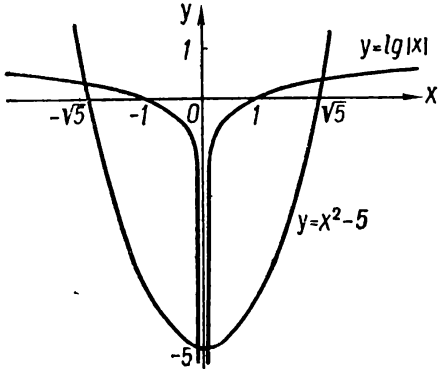



Рис. 122.

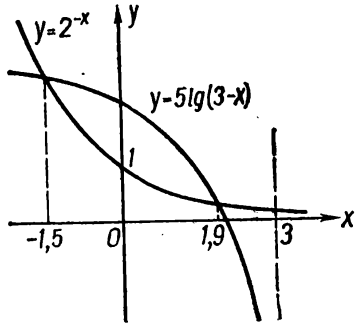



Рис. 123.

Решение. Строим графики функций $y = \lg|x|$ и $y = x^2 - 5$ (рис. 122). Графики этих функций имеют четыре общие точки, поэтому данное уравнение имеет четыре действительных корня.

Ответ. 4.

Пример 4. Решить уравнение

$$2^{-x} = 5\lg(3 - x).$$

Решение. Строим графики функций $y = 2^{-x}$ и $y = 5\lg(3-x)$ (рис. 123). Находим абсциссы точек пересечения этих графиков

$$x_1 \approx -1{,}5; \quad x_2 \approx 1{,}9.$$

Ответ. $x_1 \approx -1{,}5$; $x_2 \approx 1{,}9$.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0, \\ x - \log_2(y + 1) = 0. \end{cases}$$

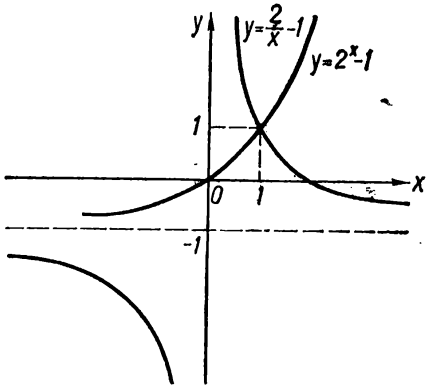



Рис. 124.

Решение. Преобразуем данную систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 2 - x, \\ \log_2(y + 1) = x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{2 - x}{x}, \\ y + 1 = 2^x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} - 1, \\ y = 2^x - 1. \end{cases}$$

Строим графики функций $y = \dfrac{2}{x} - 1$ и $y = 2^x - 1$ (рис. 124). По

рисунку находим $x \approx 1, y \approx 1$. Проверка показывает, что значения $x=1$ и $y = 1$ являются точными решениями системы.

Ответ. $x = 1$, $y = 1$.

Пример 6. Графически решить неравенство

$$x + 5 < 2^x.$$

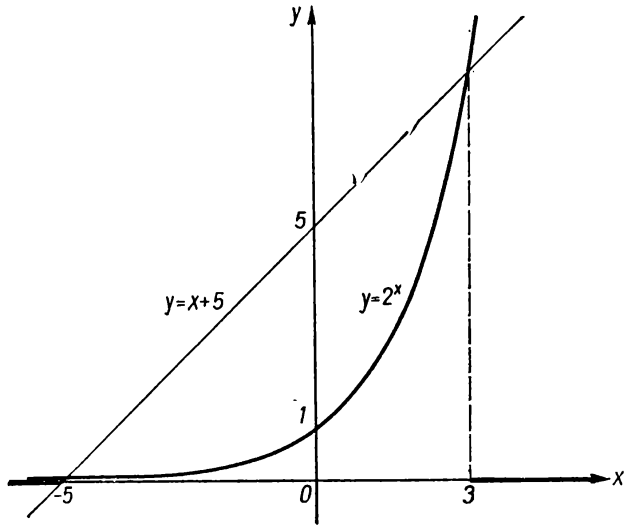



Рис. 125.

Решение. Строим графики функций $y = x + 5$ и $y = 2^x$ (рис. 125). Решениями данного неравенства есть все значения $x$, при которых график функции $y = x + 5$ расположен ниже графика функции $y = 2^x$. По рисунку находим (приближенно) $x < -5$ или $x > 3$.

Ответ. $-\infty < x < -5$; $3 < x < +\infty$.

Пример 7. Решить графически неравенство

$$\lg |x + 1| > x^2 - 3x.$$

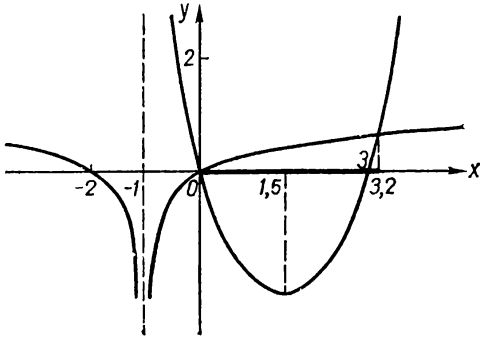



Рис. 126.

Решение. Строим графики функций $y = \lg |x + 1|$ и $y = x^2 - 3x$ (рис. 126). По рисунку (приближенно) находим

$$0 < x < 3{,}2.$$

Ответ. $0 < x < 3{,}2$.

Пример 8. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} \log_3 (x + 5) > 0, \\ 3^{2-|x|} - 1 > 0, \\ x - 1 < 0. \end{cases}$$

Решение. Строим графики функций $y=\log_3(x+5)$, $y=3^{2-|x|}-1$ и $y=x-1$ (рис. 127).

По рисунку находим

$$-2<x<1.$$

Ответ. $-2<x<1$.

Пример 9. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\log_4(x^2+y^2)\leqslant 2{,}5-\log_4 2,\\ 0{,}5^{2+y}\leqslant 4\cdot 0{,}5^{x^2}.\end{cases} \tag{1}$$

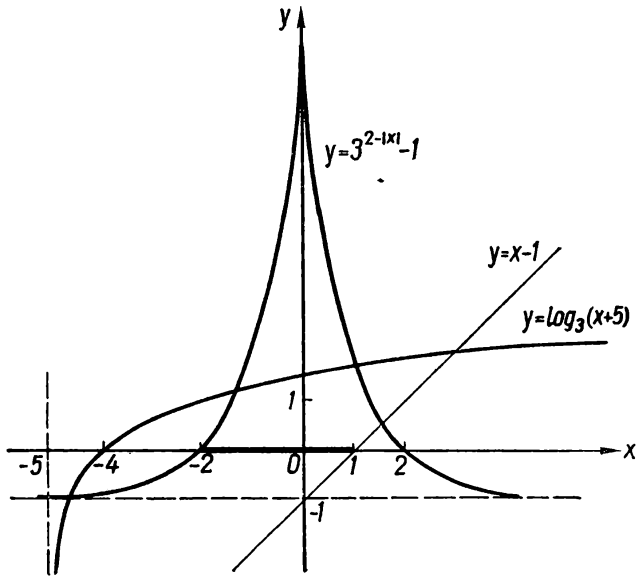



Рис. 127.

Решение. Данная система неравенств определена при $x^2+y^2\neq 0$, или $x\neq 0$ и $y\neq 0$, т. е. во всех точках координатной плоскости, кроме ее начала.

Преобразуем систему (1) к виду

$$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant\dfrac{4^{2,5}}{2},\\ 0{,}5^{y+2}\leqslant 0{,}5^{x^2-2},\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 16,\\ y\geqslant x^2-4.\end{cases} \tag{2}$$

Построим окружность $x^2+y^2=16$ и параболу $y=x^2-4$ (рис. 128). Эти линии пересекаются в точках $(-\sqrt{7};\ 3)$ и $(\sqrt{7};\ 3)$.

По рис. 128 находим, что решениями первого неравенства системы (2) будут все точки окружности $x^2+y^2=16$ и все точки, лежащие

внутри круга, ограниченного этой окружностью, кроме центра круга. Решениями второго неравенства системы (2) есть все точки координатной плоскости, лежащие над параболой $y = x^2 - 4$.

Аналитически решения системы (2), которые являются решениями системы (1), можно записать так:

$$\begin{cases} -\sqrt{7} \leqslant x \leqslant \sqrt{7}, \\ x^2 - 4 \leqslant y \leqslant \sqrt{16 - x^2}, \\ x \neq 0 \text{ и } y \neq 0 \ (x^2 + y^2 \neq 0). \end{cases}$$

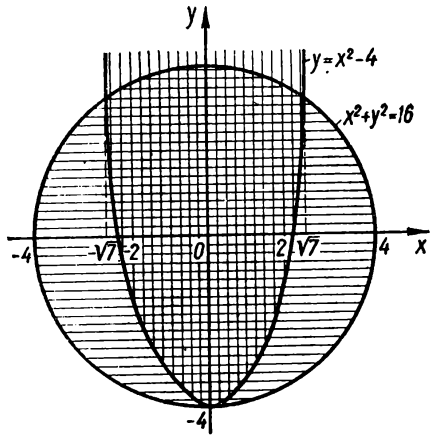



Рис. 128.

Ответ.

$$\begin{cases} -\sqrt{7} \leqslant x \leqslant \sqrt{7}, \\ x^2 - 4 \leqslant y \leqslant \sqrt{16 - x^2}, \\ x^2 + y^2 \neq 0. \end{cases}$$

Пример 10. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x-1}(y + 1) < 2, \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) < \lg 2. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Область определения системы неравенств (1) найдем, решив систему неравенств

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x - 1 \neq 1, \\ y + 1 > 0, \\ x + y > 0, \\ x - y > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ y > -1, \\ y > -x, \\ y < x. \end{cases} \tag{2}$$

Графически находим решения системы (2) — область определения системы (1) (рис. 129). На рис. 129 область определения системы (1) отмечена штриховкой.

Аналитически область определения системы (1) можно записать так:

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ -1 < y < x, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 < x < +\infty, \\ -1 < y < x. \end{cases}$$

Преобразуем систему (1) (в области ее определения) к виду:

а) при $1 < x < 2$ имеем

$$\begin{cases} y + 1 > (x - 1)^2, \\ \dfrac{x + y}{x - y} < 2, \end{cases}$$

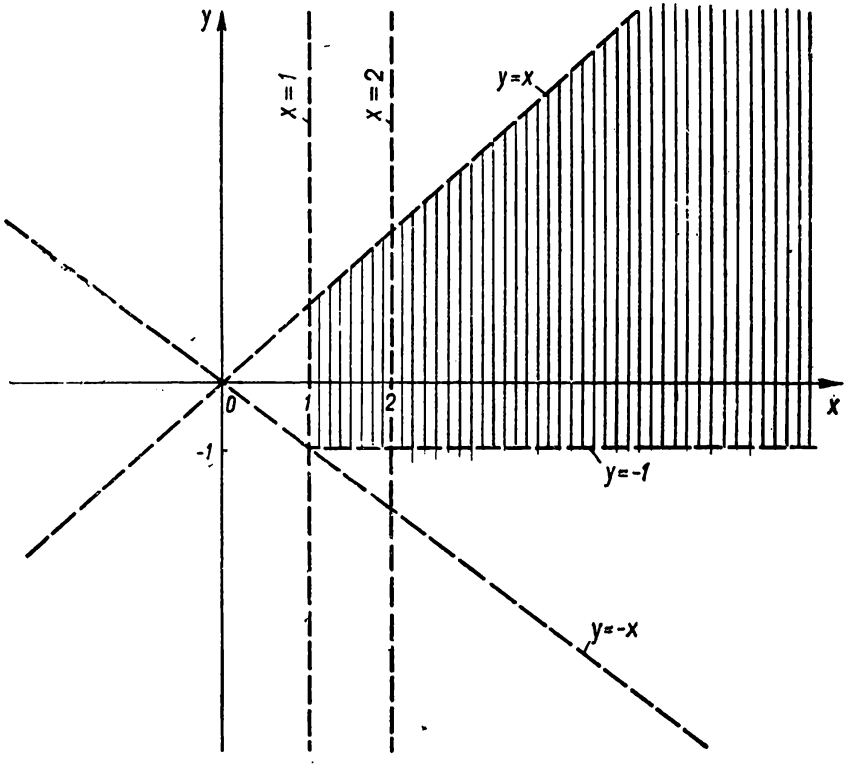



Рис. 129.

или

$$\begin{cases} y > x^2 - 2x, \\ y \leqslant \dfrac{1}{3} x; \end{cases} \tag{3}$$

б) при $2 < x < +\infty$ получаем

$$\begin{cases} y + 1 < (x - 1)^2, \\ \dfrac{x + y}{x - y} < 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y < x^2 - 2x, \\ y \leqslant \dfrac{1}{3} x. \end{cases} \tag{4}$$

На рис. 130, с учетом области определения системы неравенств (1), построены графики функций $y = x^2 - 2x$ и $y = \frac{1}{3}x$, которые пересекаются в точках (0; 0) и $\left(2\frac{1}{3};\ \frac{7}{9}\right)$. На этом рисунке области, точки которых есть решениями систем неравенств (3) и (4), заштрихованы в клеточку. Аналитически решения системы (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x^2 - 2x < y \leqslant \frac{1}{3}x, \end{cases}$$

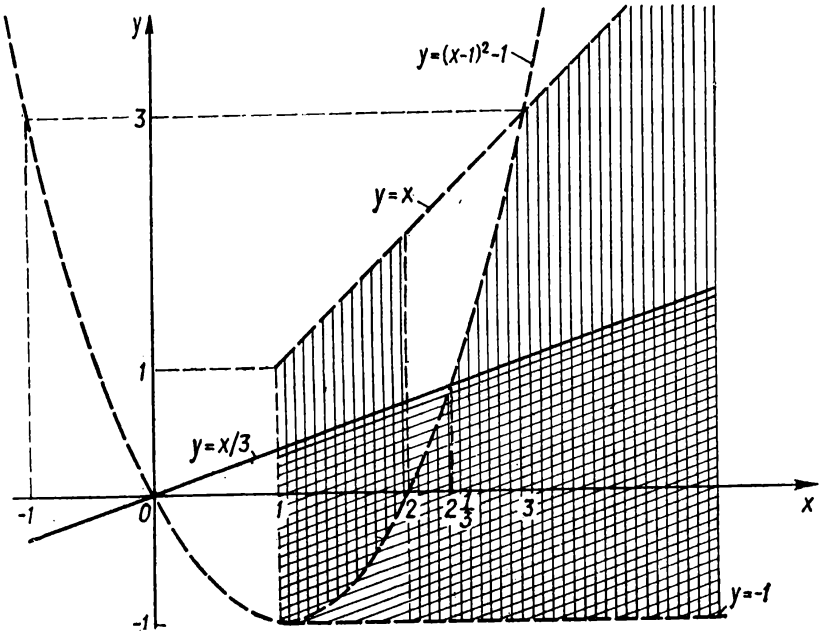



Рис. 130.

а решения системы (4) — в виде

$$\begin{cases} 2 < x \leqslant 2\frac{1}{3}, \\ -1 < y < x^2 - 2x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\frac{1}{3} < x < +\infty, \\ -1 < y \leqslant \frac{1}{3}x, \end{cases}$$

Ответ.

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x^2 - 2x < y \leqslant \frac{1}{3}x, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 < x \leqslant 2\frac{1}{3}, \\ -1 < y < x^2 - 2x, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\frac{1}{3} < x < +\infty, \\ -1 < y \leqslant \frac{1}{3}x. \end{cases}$$

## Упражнения

321. Упростить

$$\left[a(1-a)^{-\frac{2}{3}}+\frac{a^2}{(1-a)^{\frac{5}{3}}}\right]:\left[(1-a)^{\frac{1}{3}}\cdot(1-2a+a^2)^{-1}\right],\quad a\neq 1.$$

322. Доказать

$$\frac{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}-\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}=$$

$$=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}},\quad 0\leqslant b<a.$$

323. Доказать, что если $a^2+b^2=14ab$, где $a>0$ и $b>0$, то $2\log_2(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$.

324. Найти $\log_9 20$, зная, что $\lg 2=a$, $\lg 3=b$.

Найти область определения функций:

325. $y=10^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}$.

326. $y=\lg|x-3|$.

327. $y=\log_2\left(\frac{2x}{x+1}-1\right)$.

328. $y=\lg(2x-x^2+15)$.

329. $y=10^{\lg(x+4)}$.

330. $y=\lg\log_2(x-3)$.

331. $y=\lg\log_{0,3}|x-1|$.

Построить графики функций:

332. $y=2^{1-x}$.

333. $y=0{,}5^{-|x|}$.

334. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+3|}$.

335. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

336. $y=10^{\lg x}$.

337. $y=\lg|x^2-1|$.

338. $y=\lg\lg|x|$.

339. $y=|\lg(x-3)|$.

340. $y=|\lg|x||$.

341. $y=\lg|x-3|-1$.

342. $y = \lg_2\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

343. $y = \lg(2^x + 2^{-x})$.

Решить уравнения:

344. $\left[2\left(2^{\sqrt{x}}+3\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$.

345. $2^{x+1} + 1 = 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}x}$.

346. $5^{2x-1} + 4^x = 5^{2x} - 4^{x+1}$.

347. $8^{\frac{x-9}{3x-21}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[x-3]{0{,}5^{3(x-1)}}} = 1$.

348. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{x^2} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{x^2} = 10$.

349. $4 \cdot 81^x - 12 \cdot 36^x + 9 \cdot 16^x = 0$.

350. $4 \cdot 2^{3x-5} + 0{,}75 \cdot 2^{x-1} + 6 \cdot 2^{x-4} + 2^{-3(x+1)} = 1$.

351. $8^x + 27^x = 125^x$.

352. $(x-1)^x = \sqrt[3]{x-1}$.

353. $(x-3)^{x^2-3x} = (x-3)^{8x-30}$.

354. $(2x-5)^{2x^2-x} = (2x-5)^{14x-28}$.

355. $0{,}5\lg(2x-1) + \lg\sqrt{x-9} = 1$.

356. $\log_2^2 x^3 - 5\log_4 x^4 + \log_8(512x^3) = 57$.

357. $\log_3 8^{x-1} \cdot \log_2 27 = x + 7$.

358. $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - \frac{9}{4} = (\log_x \sqrt{5})^2$.

359. $\log_x 8 - \log_{4x} 8 = \log_{2x} 16$.

360. $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$.

361. $\log_{x+4}(x^4 + x^2 + 2x)\log_{x+1}(x+4) = 2$.

362. $|\log_2(x-4) - 2\log_2 3| = |\log_2 12 - \log_2(30-x)|$.

363. $3\log_{a^2 x} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2$.

364. $x^{\log_2 x^3 - \log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3} = x^{-1}$.

365. $(\sqrt[4]{x})^{\lg x+7} = 10^{\lg x+1}$.

366. $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$.

367. $(x+1)^{\log_3(x-2)} + 2(x-2)^{\log_3(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3$.

Решить системы уравнений:

368. $\begin{cases} 2^x \cdot (x+y) = 10, \\ \sqrt[x]{x+y} = 5. \end{cases}$

369. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648, \\ 3^x \cdot 2^y = 432. \end{cases}$

370. $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^3 = y^5. \end{cases}$

371. $\begin{cases} \log_{0,5}(y-x) - \log_2 \dfrac{1}{y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

372. $\begin{cases} 20x^{\log_3 y} + 7y^{\log_3 x} = 81\sqrt[3]{3}. \\ xy = 9\sqrt[3]{9}. \end{cases}$

373. $\begin{cases} 10^{3-\lg(x-y)} = 250. \\ \sqrt{x-y} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x+y} = \dfrac{26-y}{\sqrt{x-y}}. \end{cases}$

374 $\begin{cases} (x^2+y)\,2^{y-x^2} = 1, \\ \sqrt[x^2-y]{9\,(x^2+y)} = 6. \end{cases}$

375. $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 675, \\ \log_{\sqrt{5}}(3x-2y) = 2. \end{cases}$

376. $\begin{cases} x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}} = y^{\frac{8}{3}}, \\ y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}} = x^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$

377. $\begin{cases} (1+y)^x = 100, \\ (y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} = \dfrac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}. \end{cases}$

378. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1 \end{cases}$

Решить неравенства:

379. $0{,}2^{2-\frac{x-3}{x+2}} < 0{,}2^{\frac{x-2}{x+1}}$.

380. $2^{2x+2} - 0{,}75 \cdot 2^{x+2} < 1$.

381. $\log_{0,(3)}(x^2+2x-1) \leqslant 1$.

382. $\dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{\log_2 x - 1} < 1$.

383. $\log_{0,1}(x^2+1) < \log_{0,1}(2x+9)$.

384. $\log_x |x^2 - x| > 1$.

385. $(0{,}8)^{\log_{0,8}\frac{2x+1}{2x-3}} < 1$

386. $x^{\log_{0,6}x+1} > 0{,}36x$.

387 $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$.

388. $\log_x \frac{3}{8-2x} \geqslant -2.$

389. $\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} - \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1} < 0.$

390. $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1.$

391. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10.$

392. $\log_{25}(3x+4) \cdot \log_{\sqrt{x}} \sqrt{5} > 1.$

Решить системы неравенств:

393. $\begin{cases} \sqrt[(x-2)^2]{(0,5)^{(x-3)^2-1}} \geqslant 1, \\ 3^{\log_3 \frac{x-1}{x+1}} < 1. \end{cases}$

394. $\begin{cases} |1-\log_5(x-1)| < 1, \\ 3 \cdot 5^{x-6} - 0,4 \cdot 5^{\frac{x-5}{2}} < 0,2. \end{cases}$

395. $\begin{cases} \frac{2^x+10}{4} < \frac{36}{2^x}, \\ 2\log_{\frac{1}{3}} |x-4| > \log_{\frac{1}{3}}(x+4) - 1. \end{cases}$

396. $0,36 \leqslant \sqrt{0,6^{x^2-7x+10}} < 1.$

397. $\begin{cases} \sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^{\log_2 \sqrt{x}-1}} > 2, \\ 0,2^x \leqslant 0,04^{x^2}. \end{cases}$

398. $\begin{cases} \log_2^2 x^2 + \log_2 x > 5, \\ \log_{x-1}(x+1) > 2. \end{cases}$

399. $\begin{cases} |\log_2 x| > \left|\log_2 \frac{x}{4}\right|, \\ (x-2)^{2x^2-11x+9} < 1. \end{cases}$

400. $(0,3)^{34x^2} < (0,3)^{x^4+225} \leqslant (0,3)^{30x^2}.$

Решить графически уравнения:

401. $\log_2(x+3) = 3-x.$

402. $2^{x^2} = 5-3x.$

403. $2^x - x - 4 = 0.$

404. $3\lg(x+2) + 2x - 1 = 0.$

Определить графически число корней уравнений:

405. $3^x = 2\lg|x+5|.$

406. $|\lg|x|| = 4-x^2.$

407. $2^x - 5\log_3|x-2| + 3 = 0.$

Решить графически системы уравнений:

408. $\begin{cases} xy = 2 - y, \\ y = \log_3 (x + 2). \end{cases}$

409. $\begin{cases} 3x - 2^y + 2 = 0, \\ 2 \log_3 (x + 7) - y - 1 = 0. \end{cases}$

Решить графически неравенства:

410. $2^{|x|} - \log_3 x^2 - 6 > 0.$

411. $3 \,|\lg |x + 5|\,| > x - 2.$

Решить графически системы неравенств:

412. $\begin{cases} 2 \log_5 (|x| + 4) - 3^x + 1 < 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$

413. $\begin{cases} \log_9 (x + 11) > \log_3 (x - 1), \\ 0{,}3^{\sqrt{x^2 - 4x}} < \left(\dfrac{10}{3}\right)^{3-x}. \end{cases}$

414. $\begin{cases} \lg (x + y) - \lg (x - y) < \lg 3, \\ \log_2 |x| + \log_2 y < 0. \end{cases}$

415. $\begin{cases} \log_x y < 1, \\ 2^{|x^2 - y|} > 4. \end{cases}$

# Глава 10

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

## § 1. Обобщение понятия дуги и угла. Измерение дуг и углов. Общее определение дуги и угла

Как в случае направленных отрезков различают начальную и конечную точки, так и при обобщении понятия дуги окружности или угла различают соответственно начальную и конечную точки дуги и начальную и конечную стороны угла. Дуги окружностей в дальнейшем будем называть круговыми дугами.

В плоскости зафиксируем положение луча $\vec{OA}$ (рис. 131) и назовем его начальной стороной угла, а точку $A$ — начальной точкой дуги. Будем вращать этот луч вокруг точки $O$ до тех пор, пока он не перейдет в положение $\vec{OB}$; при этом точка $A$ опишет круговую дугу $\overset{\smile}{AB}$. Конечное положение $\vec{OB}$ вращающегося луча назовем конечной стороной угла, а точку $B$ — конечной точкой дуги $\overset{\smile}{AB}$.

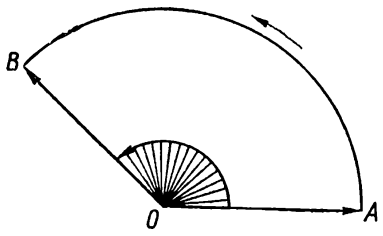


Рис. 131.

*Обобщенной круговой дугой* называется фигура, описываемая точкой, совершающей круговое движение с указанием направления движения точки, а также ее начального (начальной точки дуги) и конечного (конечной точки дуги) положения.

Будем записывать обобщенную круговую дугу двумя буквами с дугой над ними, причем на первом месте будем писать букву, обозначающую начало дуги, например, $\overset{\smile}{AB}$.

Заметим, что дуги $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{BA}$ различны, так как их направления противоположны.

*Обобщенным углом* называется плоская фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки, называемой вершиной угла, причем указано, какой из этих лучей считается первым (начальной стороной угла) и как его вращать до совпадения со вторым (конечной стороной угла).

При таком определении угла его величина рассматривается как мера поворота конечной стороны относительно начальной.

Положительным направлением вращения в плоскости называется вращение против часовой стрелки (рис. 132, *а*), а отрицательным — по движению часовой стрелки (рис. 132, *б*).

**Измерение круговых дуг и углов.** Для непосредственного измерения круговых дуг и углов, как и отрезков, принимают некоторую определенную круговую дугу (угол) за единицу измерения, с помощью которой измеряют остальные дуги (углы).

Существуют различные единицы измерения дуг и углов: градус, радиан, большое и малое деления, полный оборот, румб и т. д.

Дугой в один градус называется круговая дуга, длина которой равна $\frac{1}{360}$ части длины ее окружности.

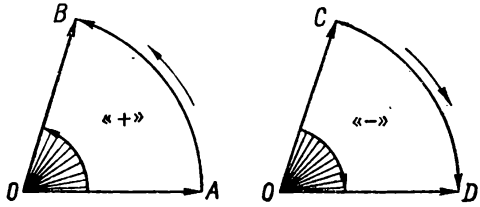
Углом в один градус называется центральный угол, опирающийся на дугу в один градус.

Дугой в один радиан называется круговая дуга, длина которой равна длине радиуса ее окружности.

Углом в один радиан называется центральный угол, опирающийся на дугу в один радиан.

Один градус и один радиан соответственно записываются: 1° и 1 рад.

Можно показать, что как градусная, так и радианная мера круговых дуг и углов не зависит от величины радиуса окружности, а зависит только от величины соответствующего центрального угла.




а б

Рис. 132.

Угол в полный оборот, которому соответствует длина окружности, содержит 360° или $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ рад. При радианном измерении круговых дуг и углов слово радиан, как правило, не пишут. Например, говорят «прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$», а подразумевают, что угол равен $\frac{\pi}{2}$ рад.

Таким образом, 360° соответствует $2\pi$ рад. Отсюда получаем формулы перехода от градусной меры дуг и углов к радианной и наоборот:

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha}{180}\pi \text{ рад}; \tag{10.1}$$

$$\alpha_{\text{рад}} = \frac{\alpha}{\pi}\,180^\circ. \tag{10.2}$$

В частности,

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ\,17'\,44'',\ 8 \approx 57^\circ,\ 2958 \quad (\pi \approx 3{,}14159);$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0{,}01745 \text{ рад}.$$

С помощью формул (10.1) и (10.2) легко перейти от градусной меры дуг и углов к радианной и наоборот.

Приведем градусные и соответствующие радианные меры часто встречающихся углов:

| Градусы | 0 | 15 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 270 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Радианы | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

**Круговые дуги и углы произвольной величины.** Если луч (см. рис. 132, *а*) вращается в плоскости вокруг точки $O$ в положительном направлении, то дуга $\overset{\smile}{AB}$, описанная концом луча $A$, и соответствующий этому вращению $\angle AOB$ называются положительными; если вращение луча $\overrightarrow{OC}$ (см. рис. 132, *б*) отрицательное, то соответствующую дугу $\overset{\smile}{CD}$ и $\angle COD$ называют отрицательными.

Круговая дуга (угол) измеряется действительным числом, абсолютная величина которого равна величине круговой дуги (угла), взятым со знаком плюс, если дуга (угол) положительна, и со знаком минус, если дуга (угол) отрицательна. Если начало и конец дуги (угла) совпадают и при этом не было осуществлено никакого вращательного движения, то величина такой дуги (угла) равна нулю.

Если горизонтальную полуось $\overrightarrow{Ox}$ зафиксировать (рис. 133) и считать начальной стороной $\angle AOB$, а подвижный вектор $\overrightarrow{OB}$ — конечной стороной этого угла, то вектор $\overrightarrow{OB}$, вращаясь в плоскости вокруг своего начала, образует углы любой величины, а его конец (точка $B$) опишет дуги любой величины (здесь и в дальнейшем предполагается, что вместе с вектором вращается и луч, на котором расположен вектор, причем их начальные точки совпадают).

Положение вектора $\overrightarrow{OB}$ не определяет однозначно величину $\angle AOB$ и дуги $\overset{\smile}{AB}$. Так, если вектор $\overrightarrow{OB}$, вращаясь вокруг точки $O$ в положительном направлении, не сделал полного оборота, то $\angle AOB = \alpha°$, где $0° < \alpha < 360°$ (рис. 133). Если же вектор $\overrightarrow{OB}$ сделал 5 оборотов и еще поворот на угол $\alpha°$, то

$$\angle AOB = \alpha° + 360° \cdot 5 = \alpha° + 1800°.$$

Если о числе оборотов ничего не сказано, то

$$\angle AOB = \alpha° + 360° \cdot n,$$

или

$$\angle AOB = a + 2\pi n \text{ при } a \text{ рад} = \alpha°,$$

где $n$ может быть любым целым числом $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Таким образом, если специально не оговорено, то обобщенная круговая дуга и обобщенный угол задаются с точностью до произвольного целого числа полных оборотов.

Для нахождения суммы нескольких углов (положительных или отрицательных) приводят углы к общей вершине и располагают их на

плоскости так, чтобы конечная сторона первого угла совместилась с начальной стороной второго, конечная сторона второго — с начальной стороной третьего и т. д.; тогда суммой данных углов будет угол, начальная сторона которого совпадает с начальной стороной первого, а конечная — с конечной стороной последнего.

Если слагаемые определены однозначно, т. е. указаны количества оборотов при образовании углов, то и сумма определяется однозначно.

Аналогично выполняется алгебраическое сложение круговых дуг одного и того же радиуса (дуги откладываются на окружности, радиус которой равен радиусу дуг).

Алгебраическая сумма круговых дуг и углов всегда существует и притом однозначная, если однозначно заданы слагаемые, и обладает переместительным и сочетательным свойствами.

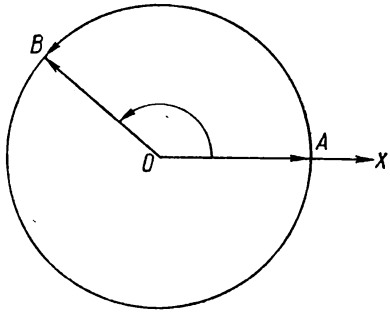



Рис. 133.

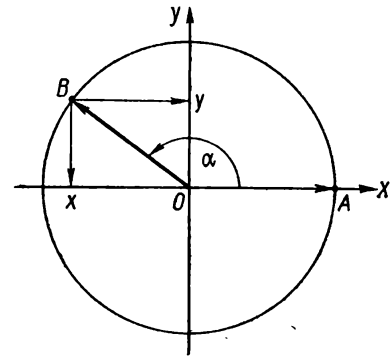



Рис. 134.

## § 2. Тригонометрические функции произвольного угла

**Определение тригонометрических функций произвольного угла.** Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат $xOy$. Положительную полуось $\vec{Ox}$ этой системы будем считать начальной стороной углов, образующихся при вращении вокруг начала координат радиуса-вектора $\vec{OA}$ точки $A$ (рис. 134), лежащей на этой полуоси, а точку $A$ — начальной точкой дуг, описываемых ею при этом вращении. (Радиусом-вектором данной точки координатной плоскости, не совпадающей с началом координат, называется вектор с началом в начале координат и концом в данной точке). Пусть радиус-вектор $\vec{OB}$ (подвижный радиус) является конечным положением вращения радиуса-вектора $\vec{OA}$ и при этом $\angle AOB = \alpha$ (а также $\overset{\smile}{AB} = \alpha$). Обозначим координаты точки $B$ через $x$ и $y$, т. е. $B(x, y)$, а длину радиуса-вектора $\vec{OB}$ — через $R$. Можно показать, что для данного угла $\alpha$ отношения $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{R}$ и $\frac{x}{y}$ не зависят от длины подвижного радиуса $R$, а зависят только от величины $\angle AOB = \alpha$. Поэтому эти отношения можно рассматривать как функции произвольного угла $\alpha$.

*Синусом угла* $\alpha$, образованного подвижным радиусом-вектором $\vec{OB}$ с полуосью $\vec{Ox}$ (рис. 134), называется отношение ординаты конца подвижного радиуса-вектора к его длине, т. е.

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}. \tag{10.3}$$

*Косинусом угла* $\alpha$, образованного подвижным радиусом-вектором $\vec{OB}$ с полуосью $\vec{Ox}$ (рис. 134), называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса-вектора к его длине, т. е.

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}. \tag{10.4}$$

*Тангенсом угла* $\alpha$, образованного подвижным радиусом-вектором $\vec{OB}$ с полуосью $\vec{Ox}$ (рис. 134), называется отношение ординаты конца подвижного радиуса-вектора к его абсциссе, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \text{ при } x \neq 0. \tag{10.5}$$

*Котангенсом угла* $\alpha$, образованного подвижным радиусом-вектором $\vec{OB}$ с полуосью $\vec{Ox}$ (рис. 134), называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса-вектора к ординате его конца, т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \text{ при } y \neq 0. \tag{10.6}$$

*Секансом угла* $\alpha$, образованного подвижным радиусом-вектором $\vec{OB}$ с полуосью $\vec{Ox}$ (рис. 134), называется отношение длины радиуса-вектора к абсциссе его конца, т. е.

$$\sec\alpha = \frac{R}{x} \text{ при } x \neq 0. \tag{10.7}$$

*Косекансом угла* $\alpha$, образованного подвижным радиусом-вектором $\vec{OB}$ с полуосью $\vec{Ox}$ (рис. 134), называется отношение длины радиуса-вектора к ординате его конца, т. е.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{R}{y} \text{ при } y \neq 0. \tag{10.8}$$

Заметим, что проекции радиуса-вектора точки на координатные оси равны соответствующим координатам этой точки.
Если обозначить

$$\text{пр.}_{\vec{Oy}}\vec{OB} = R_y, \text{ а } \text{пр.}_{\vec{Ox}}\vec{OB} = R_x, \text{ то } R_y = y \text{ и } R_x = x.$$

Поэтому тригонометрические функции произвольного угла можно определить отношениями

$$\sin\alpha = \frac{R_y}{R};\ \cos\alpha = \frac{R_x}{R};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{R_y}{R_x};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{R_x}{R_y};$$

$$\sec\alpha = \frac{R}{R_x};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{R}{R_y}.$$

Существуют и другие способы определения тригонометрических функций.

Так как вектор $\overrightarrow{OB}$ определяет угол, образованный им с полуосью $\overrightarrow{Ox}$, с точностью до целого числа полных оборотов, то $\angle AOB = \alpha + 360° \cdot n$, где $\alpha$ — градусная мера любого из углов, образованных вектором $\overrightarrow{OB}$ с полуосью $\overrightarrow{Ox}$, а $n$ — любое целое число. Так как для всех этих углов координаты точки $B$ остаются неизменными, то

$$\sin(\alpha + 360° \cdot n) = \sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha + 360° \cdot n) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + 360° \cdot n) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha + 360° \cdot n) = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\sec(\alpha + 360° \cdot n) = \sec\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(\alpha + 360° \cdot n) = \operatorname{cosec}\alpha,$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

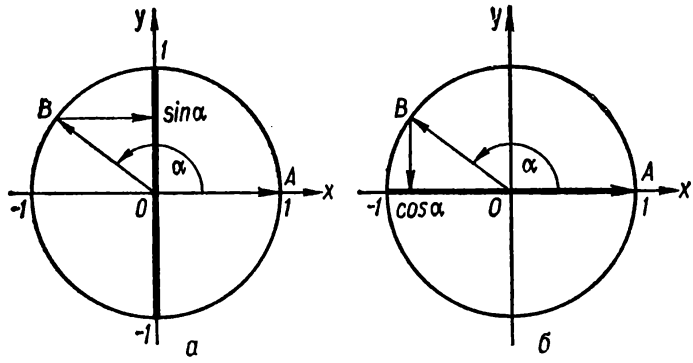



Рис. 135.

Так как значения тригонометрических функций не зависят от длины подвижного радиуса-вектора $\overrightarrow{OB}$ (см. рис. 134), то для простоты его можно взять равным единице, т. е. положить $R = 1$. В этом случае окружность, описанную концом $B$ радиуса-вектора $\overrightarrow{OB}$, называют единичной окружностью. Тогда значения тригонометрических функций определятся следующим образом.

Синус угла $\alpha$ равен ординате конца подвижного радиуса-вектора $\overrightarrow{OB}$ единичной окружности, образующего угол $\alpha$ с положительной полуосью абсцисс (рис. 135, *а*), т. е.

$$\sin\alpha = y \quad (-1 \leqslant y \leqslant 1). \tag{10.9}$$

Косинус угла $\alpha$ равен абсциссе конца подвижного радиуса-вектора $\overrightarrow{OB}$ единичной окружности, образующего угол $\alpha$ с положительной полуосью абсцисс (рис. 135, *б*), т. е.

$$\cos\alpha = x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1). \tag{10.10}$$

Осью тангенсов называется ось, касающаяся единичной окружности в точке пересечения ее с положительной полуосью абсцисс и направленная одинаково с осью ординат (рис. 136, *а*).

**Теорема 1.** *Тангенс угла $\alpha$ равен ординате точки оси тангенсов, в которой она пересекается с прямой, совпадающей с подвижным радиусом-вектором $\overrightarrow{OB}$, образующим с положительной полуосью абсцисс угол $\alpha$* (рис. 116, *а*), т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = y \ (AM = y, \ -\infty < y < +\infty) \qquad (10.11)$$

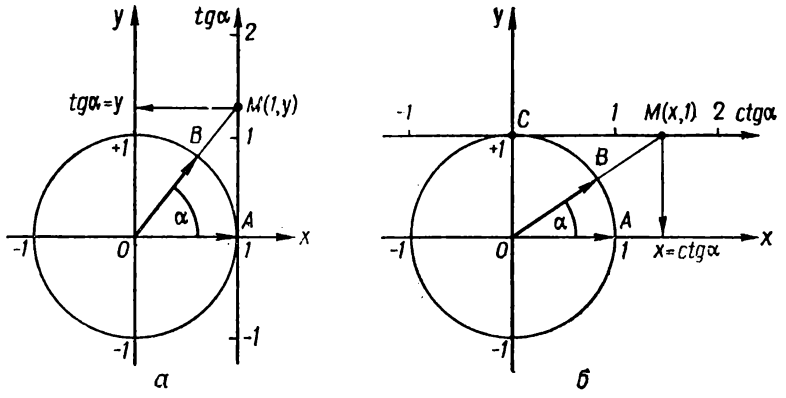



Рис. 136.

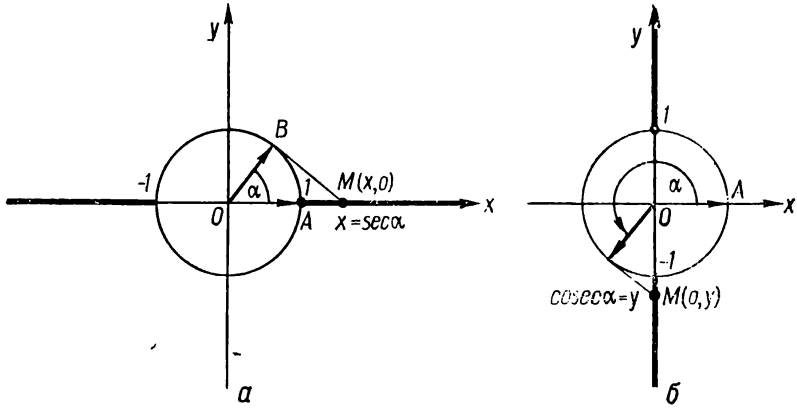



Рис. 137.

Осью котангенсов называется ось, касающаяся единичной окружности в точке пересечения ее с положительной полуосью ординат и направленная одинаково с осью абсцисс (рис. 136, *б*).

**Теорема 2.** *Котангенс угла $\alpha$ равен абсциссе точки оси котангенсов, в которой она пересекается с прямой, совпадающей с подвижным радиусом-вектором $\overrightarrow{OB}$, образующим с положительной полуосью абсцисс угол $\alpha$* (рис. 136, *б*), т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = x \ (CM = x, \ -\infty < x < +\infty). \qquad (10.12)$$

**Теорема 3.** *Секанс угла $\alpha$ равен абсциссе точки оси абсцисс, в которой она пересекается с касательной к единичной окружности в конце $B$ подвижного радиуса-вектора $\overrightarrow{OB}$, образующего с положительной полуосью абсцисс угол $\alpha$* (рис. 137, *а*), т. е.

$$\sec\alpha = x \ (OM = x, \ 1 \leqslant |x| < +\infty). \qquad (10.13)$$

**Теорема 4.** *Косеканс угла $\alpha$ равен ординате точки оси ординат, в которой она пересекается с касательной к единичной окружности в конце $B$ подвижного радиуса-вектора $\overrightarrow{OB}$, образующего с положительной полуосью абсцисс угол $\alpha$* (см. рис. 137, *б*), т. е.

$$\operatorname{cosec}\alpha = y \ (OM = y, \ 1 \leqslant |y| < +\infty). \qquad (10.14)$$

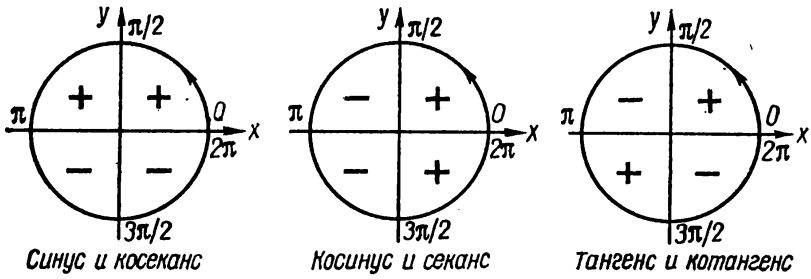



Рис. 138.

Предлагаем читателю доказать теоремы 1—4 этого параграфа.

**Знаки тригонометрических функций.** Учитывая значения тригонометрических функций, данных формулами (10.3)—(10.8), легко установить знаки их значений в различных четвертях. На рис. 138 указаны знаки значений тригонометрических функций.

Значения тригонометрических функций для некоторых углов приведены в табл. 3.

Таблица 3

| Функция | Значение угла, рад | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ | 0 |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\mp\infty$ | 0 | $\mp\infty$ |

Построение угла по данному значению его тригонометрической функции рассмотрим на следующих примерах.

Пример 1. Построить угол (дугу) $\alpha$, синус которого равен $m$.

Решение. В координатной плоскости $xOy$ строим единичную окружность и на оси ординат берем точку с ординатой $m$ (рис. 139). Через нее проводим прямую, параллельную оси абсцисс. При $|m|>1$ прямая не пересекает единичной окружности, т. е. задача не имеет решения. При $|m|=1$ прямая касается единичной окружности в точке (0, 1) или в точке (0, $-1$); искомый угол

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi n \ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),\ \text{если}\ m=1;$$

$$\alpha=\frac{3\pi}{2}+2\pi n \ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),\ \text{если}\ m=-1.$$

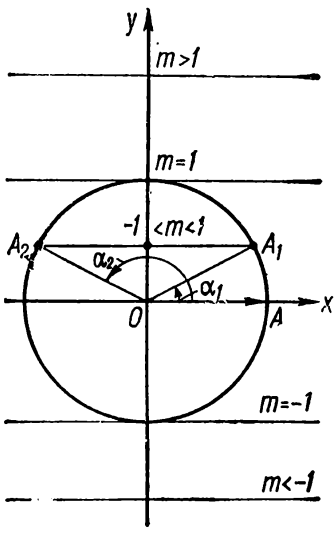



Рис. 139.

При $|m|<1$ прямая пересечет единичную окружность в точках $A_1$ и $A_2$, ординаты которых равны $m$.

Если обозначить наименьшие положительные углы, образованные радиусами-векторами $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ с положительной полуосью $\overrightarrow{Ox}$, соответственно

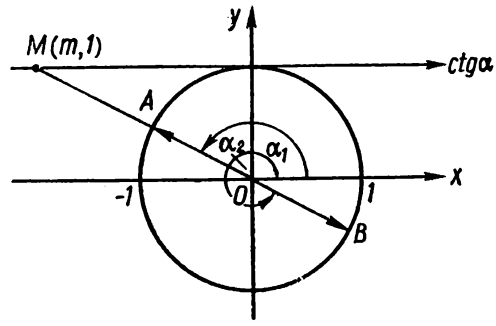



Рис. 140.

$\angle xOA_1=\alpha_1$, $\angle xOA_2=\alpha_2$, то решениями задачи будут две серии углов:

$$\alpha=\alpha_1+2\pi n,\ \text{где}\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

и

$$\alpha=\alpha_2+2\pi n,\ \text{где}\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Ответ.

$$\alpha=\begin{cases}\alpha_1+2\pi n \text{ и } \alpha_2+2\pi n,\ \text{где}\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\ \text{при}\ |m|<1;\\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ \text{где}\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\ \text{при}\ m=1;\\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi n,\ \text{где}\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\ \text{при}\ m=-1\end{cases}$$

при $|m|>1$ задача не имеет решения.

Пример 2. Построить угол (дугу) $\alpha$, котангенс которого равен $m$.

Решение. В координатной плоскости $xOy$ строим единичную окружность и затем ось котангенсов (рис. 140). На оси котангенсов строим точку $M(m; 1)$ с абсциссой $m$. Затем через точку $M$ и начало координат проводим прямую. Точки пересечения прямой с единичной окружностью обозначим через $A$ и $B$. Углы, образованные подвижными радиусами-векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ с положительной полуосью абсцисс, являются искомыми. Если наименьший положительный $\angle xOA$ обозначить через $\alpha_0$, то искомые углы определяются по формуле

$$\alpha = \alpha_0 + \pi n, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

при любом действительном значении $m$.

Ответ. $\alpha = \alpha_0 + \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а $m$ — любое действительное число.

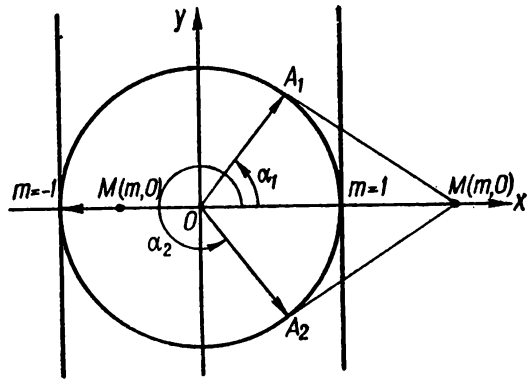



Рис. 141.

Пример 3. Построить угол (дугу) $\alpha$, секанс которого равен $m$.

Решение. В координатной плоскости $xOy$ строим единичную окружность и на оси абсцисс строим точку $M(m, 0)$ с абсциссой $m$ (рис. 141).

А. При $|m| < 1$ из точки $M$ провести касательную к единичной окружности невозможно, т. е. в этом случае задача не имеет решения.

Б. При $|m| = 1$ прямые касаются единичной окружности в точках ее пересечения с осью абсцисс и тогда искомыми углами являются

$$\alpha = 2\pi n, \text{ если } m = 1;$$

$$\alpha = \pi + 2\pi n, \text{ если } m = -1, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В. При $|m| > 1$ из точки $M$ можно провести к окружности две касательные; точки касания обозначим через $A_1$ и $A_2$. Если теперь обозначить наименьшие положительные углы, образованные подвижными радиусами-векторами $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ с положительной полуосью абсцисс, соответственно $\angle xOA_1 = \alpha_1$ и $\angle xOA_2 = \alpha_2$, то искомые углы (дуги) определятся формулами

$$\alpha = \alpha_1 + 2\pi n \text{ и } \alpha = \alpha_2 + 2\pi n, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ответ.

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 + 2\pi n \text{ и } \alpha_2 + 2\pi n, & \text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ при } |m| > 1; \\ 2\pi n, & \text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ при } m = 1; \\ \pi + 2\pi n, & \text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ при } m = -1; \end{cases}$$

при $|m| < 1$ задача не имеет решения.

Из решения примеров видно, что задача определения угла по значению его тригонометрической функции является многозначной. Существует бесчисленное множество углов, тригонометрические функции которых равны одному и тому же значению. Для того чтобы эти задачи были однозначными, выделяют так называемое главное значение угла.

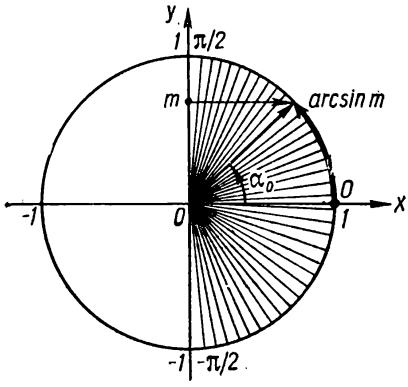



Рис. 142.

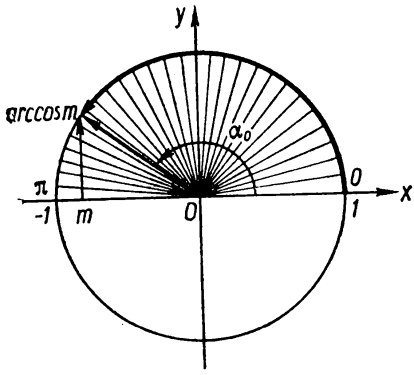



Рис. 143.

*Главным значением угла (дуги)*, синус которого равен числу $m$ при $|m| \leqslant 1$, называют угол (дугу) $\alpha_0$, взятый от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ (рис. 142), т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Для обозначения главного значения угла $\alpha_0$, синус которого равен $m$ ($|m| \leqslant 1$) вводят символ $\arcsin m$, который читают как «угол (дуга), синус которого равен $m$» или сокращенно «арксинус $m$».

Если множество всех углов (дуг), синус которых равен $m$ при $|m| \leqslant 1$, обозначить символом $\operatorname{Arcsin} m$, то это множество определяется через главный угол формулой

$$\operatorname{Arcsin} m = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \qquad (10.15)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

*Главным значением угла (дуги)*, косинус которого равен числу $m$ ($|m| \leqslant 1$), называется угол (дуга) $\alpha_0 = \arccos m$, взятый от 0 до $\pi$ (рис. 143), т. е.

$$0 \leqslant \arccos m \leqslant \pi.$$

Тогда все углы (дуги) Arccos $m$, косинус которых равен $m$, выражаются формулой

$$\operatorname{Arccos} m = \pm \arccos m + 2\pi n, \tag{10.16}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

*Главным значением угла (дуги)*, тангенс которого равен числу $m$, называется угол (дуга) $\alpha_0 = \operatorname{arctg} m$, взятый от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ (рис. 144), т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} m < \frac{\pi}{2}.$$

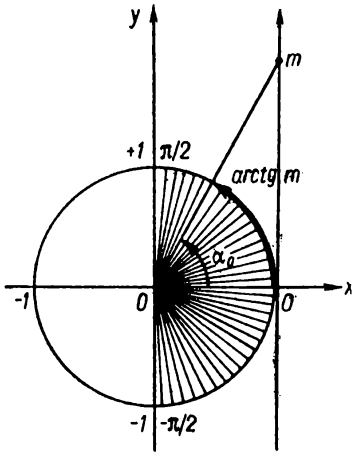



Рис. 144.

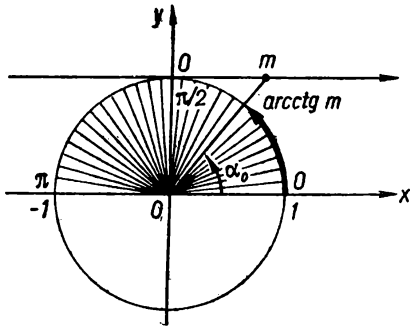



Рис. 145.

Тогда все углы (дуги) Arctg $m$, тангенс которых равен $m$, выражаются формулой

$$\operatorname{Arctg} m = \operatorname{arctg} m + \pi n, \tag{10.17}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

*Главным значением угла (дуги)*, котангенс которого равен числу $m$, называется угол (дуга) $\alpha_0 = \operatorname{arcctg} m$, взятый от 0 до $\pi$ (рис. 145), т. е.

$$0 < \operatorname{arcctg} m < \pi.$$

Тогда все углы (дуги) Arcctg $m$, котангенс которых равен $m$, выражаются формулой

$$\operatorname{Arcctg} m = \operatorname{arcctg} m + \pi n, \tag{10.18}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

## § 3. Основные тригонометрические тождества

*Тригонометрическим тождеством* называется равенство, в которое входят тригонометрические функции и которое удовлетворяется произвольным допустимым значением угла — аргумента тригонометрических функций, но не удовлетворяется, если каждую из функций заменить произвольной величиной.

Так, тождество $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$ не тригонометрическое, так как оно останется верным, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ заменить произвольными величинами $a$ и $b$; тогда это будет алгебраическое тождество $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Тождество же $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$ тригонометрическое, так как при замене $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ на произвольные величины $a$ и $b$ оно обращается в нетождественное равенство $(a+b)^2=1+2ab$.

Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \tag{10.19}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad\left[\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right]; \tag{10.20}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad(\alpha\neq\pi n); \tag{10.21}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\quad\left[\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right]; \tag{10.22}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\quad(\alpha\neq\pi n). \tag{10.23}$$

Из этих пяти основных тождеств вытекают три вспомогательных (производных):

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}n\right); \tag{10.24}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha\quad\left[\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right]; \tag{10.25}$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha\quad(\alpha\neq\pi n), \tag{10.26}$$

где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$

В скобках указаны значения аргумента $\alpha$, при которых тождества имеют числовой смысл.

Основные тригонометрические тождества позволяют по значению одной из тригонометрических функций найти значения всех остальных.

Пример 1. Определить значения тригонометрических функций угла $\alpha$, если $\sec\alpha=\frac{5}{3}$ и $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$.

Решение. По формуле (10.15) $\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{3}{5}$.

По формуле (10.12)

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25},\ \text{или}\ |\sin\alpha|=\frac{4}{5}.$$

Учитывая, что $\sin\alpha<0$ при $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$, получаем $-\sin\alpha=\frac{4}{5}$ или $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

По формулам (10.20), (10.21) и (10.23) находим

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3},\ \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}\ \text{и}\ \operatorname{cosec}\alpha=-\frac{5}{4}.$$

Рассмотрим примеры на доказательство тригонометрических тождеств.

Пример 2. Доказать тождество

$$\cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha+2)\,(2\operatorname{tg}\alpha+1)-5\sin\alpha\cos\alpha=2\quad\left[\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right].$$

Доказательство. Применяя формулу (10.20), получим

$$\cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha+2)\,(2\operatorname{tg}\alpha+1)-5\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$=\cos^2\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+2\right)\left(\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+1\right)-5\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$=(\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha)\left(\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+1\right)-5\sin\alpha\cos\alpha=2\sin^2\alpha+$$

$$+4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-5\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha).$$

Заменив по формуле (10.15) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ на 1, получим

$$\cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha+2)\,(2\operatorname{tg}\alpha+1)-5\sin\alpha\cos\alpha=2.$$

Пример 3. Доказать, что

$$(1+\sin\alpha)\,(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\,(1-\sin\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}n\right).$$

Доказательство. По формулам (10.20) и (10.21)

$$(1+\sin\alpha)\,(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\,(1-\sin\alpha)=(1+\sin\alpha)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\times$$

$$\times(1-\sin\alpha)=\frac{(1-\sin^2\alpha)\,(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Применив формулы (10.19) и (10.21), получим

$$\frac{(1-\sin^2\alpha)\,(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

## § 4. Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha;\qquad(10.27)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha;\qquad(10.28)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;\qquad(10.29)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;\qquad(10.30)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\quad\left[\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right];\qquad(10.31)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\quad\left[\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1)\right];\qquad(10.32)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}\quad(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\pi n);\qquad(10.33)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}\quad(\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\neq\pi n);\qquad(10.34)$$

в формулах (10.31)—(10.34) $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

Формулы (10.27)—(10.30) имеют числовой смысл при всех значениях углов $\alpha$ и $\beta$, а формулы (10.31)—(10.34) имеют смысл при значениях $\alpha$ и $\beta$, указанных в скобках. Например, тождество (10.31) имеет место при

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad \beta \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}(2m+1),$$

где $n$, $k$, $m$ — любые целые числа.

Заметим, что если $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}(2m+1)$, то $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$, или $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$ и тогда $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0$, т. е. знаменатель правой части тождества обращается в нуль. Кроме того, следует иметь в виду, что при замене

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) \quad \left(\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)\right)$$

на

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad \left(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}(2m+1)\right)$$

область допустимых значений $\alpha$ и $\beta$ сужается на значения

$$\alpha=\frac{\pi}{2}(2m+1) \text{ и } \beta=\frac{\pi}{2}(2m+1).$$

Формулы (10.27)—(10.34) позволяют определять по известным тригонометрическим функциям аргументов $\alpha$ и $\beta$ значения этих функций для сумм или разностей данных аргументов.

Пример 1. Вычислить $\cos 15°$.

Решение. Представим $15°=45°-30°$ и воспользуемся формулой (10.30) и табл. 2 § 2 этой главы; получим

$$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\approx 0{,}9659.$$

Ответ. $\cos 15°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}9659.$

Зная $\cos 15°$, легко вычислить значения остальных тригонометрических функций угла $15°$:

$$\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \operatorname{tg}15°=2-\sqrt{3}\ \ \operatorname{ctg}15°=2+\sqrt{3},$$
$$\sec 15°=\sqrt{6}-\sqrt{2},\ \operatorname{cosec}15°=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

Пример 2. Доказать тождество

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta).$$

Решение. Раскладывая числитель и знаменатель дроби на множители и применяя формулы (10.31) и (10.32), получим

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta).$$

Выясните, при каких $\alpha$ и $\beta$ имеет место это тождество.

Пример 3. Доказать, что

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

Применяя формулы (10.27) и (10.28), получаем

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta-$$
$$-\sin\beta\cos\alpha)=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-$$
$$-\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

Пример 4. Даны $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{12}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{3}$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — главные значения углов. Доказать, что $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$.

Решение. Выведем формулу тангенса суммы трех углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{tg}[\alpha+(\beta+\gamma)]=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\beta+\gamma)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}}{1-\operatorname{tg}\alpha\dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma},\qquad(10.35)$$

если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\alpha+\beta+\gamma$ не равны $\frac{\pi}{2}(2n+1)$, где $n$ — любое целое число. Подставляя в формулу (10.35) данные значения тангенсов, получим

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\frac{1}{12}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}}=1,$$

так как $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — положительные и не больше $\frac{\pi}{4}$, то $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$.

## § 5. Формулы приведения

*Формулами приведения* называются формулы, выражающие тригонометрические функции углов (дуг) $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ и $2\pi\pm\alpha$ через тригонометрические функции угла $\alpha$.

Пользуясь формулами § 4, легко доказать формулы приведения:

$$\left.\begin{aligned}&\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha,\ \sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha,\\&\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha,\ \sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha;\end{aligned}\right\}\qquad(10.36)$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha,\ \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha.\\&\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\ \cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha;\end{aligned}\right\}\qquad(10.37)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha,\ \operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha;\qquad(10.38)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha.\qquad(10.39)$$

Если учесть, что от прибавления к аргументу тригонометрических функций целого числа оборотов $2\pi n$, где $n$ — целое число, значение функций не меняется, то, пользуясь этим свойством и формулами (10.35)—(10.39), любую тригонометрическую функцию произвольного угла можно привести к функции острого угла.

Для приведения тригонометрических функций произвольного угла к функциям острого угла удобно представлять произвольный угол в виде $\frac{\pi}{2}n+\alpha$ и пользоваться следующим п р а в и л о м:

любая тригонометрическая функция угла $\frac{\pi}{2}n+\alpha$ по абсолютной величине равна той же функции угла $\alpha$, если число $n$ четное, и сходственной функции, если $n$ нечетное (сходственными считаются функции синус и косинус, тангенс и котангенс, секанс и косеканс). При этом если функция в $(n+1)$-й четверти положительна, то знаки обеих функций одинаковы; если отрицательна, то знаки различны.

П р и м е р. Привести ctg 1395° к функции острого угла.

Р е ш е н и е. Представим $1395^\circ=90^\circ\cdot 15+45^\circ$; так как $n=15$ — нечетное, то котангенс перейдет в тангенс острого угла, а так как в $n+1=15+1=16$-й (четвертой) четверти котангенс отрицательный, то

$$\operatorname{ctg}1395^\circ=\operatorname{ctg}(90^\circ\cdot 15+45^\circ)=-\operatorname{tg}45^\circ=-1.$$

Два угла, сумма которых равна 90°, называются дополнительными. Например: 30° и 60°, 20° и 70°, $\frac{\pi}{9}$ и $\frac{7\pi}{18}$, $90^\circ-\alpha$ и $\alpha$, $45^\circ-\beta$ и $45^\circ+\beta$, $\frac{\pi}{2}+\beta$ и $-\beta$ и т. д.

Сходственные функции дополнительных углов равны между собой. Например,

$$\sin(45^\circ+\alpha)=\cos(45^\circ-\alpha);$$
$$\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha);$$
$$\cos(50^\circ+\alpha)=\sin(40^\circ-\alpha);$$
$$\operatorname{ctg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha).$$

Эти формулы вместе с формулами приведения позволяют привести любую тригонометрическую функцию произвольного угла к функции положительного угла, не превышающего 45°.

## § 6. Четность и нечетность тригонометрических функций

Тригонометрические функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ — нечетные, а $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ — четные, т. е.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \tag{10.40}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha; \tag{10.41}$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \tag{10.42}$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \tag{10.43}$$

$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha; \tag{10.44}$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha. \tag{10.45}$$

Эти формулы справедливы для всех значений $\alpha$, при которых функции существуют, и позволяют любую функцию отрицательного аргумента привести к функции положительного аргумента.

## § 7. Формулы двойных и тройных углов (аргументов)

Из формул § 4 при $\alpha = \beta$ получаем формулы удвоения аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \tag{10.46}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \tag{10.47}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \left[2\alpha,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)\right]; \tag{10.48}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \quad (2\alpha,\ \alpha \neq \pi n), \tag{10.49}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Складывая и вычитая (10.19) и (10.47), получим формулы

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \tag{10.50}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \tag{10.51}$$

которые часто употребляются при тождественных преобразованиях.

Последовательно применяя формулы сложения аргументов, можно получить формулы для $3\alpha$, $4\alpha$ и т. д.

Приведем формулы утроения аргумента:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \tag{10.52}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha; \tag{10.53}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \left[\alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1)\right]; \tag{10.54}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi n}{3}\right), \tag{10.55}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Из (10.52) и (10.53) легко получаем формулы

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}; \tag{10.56}$$

$$\cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}, \tag{10.57}$$

которые позволяют избавиться от куба тригонометрических функций, используя утроение аргумента.

Пример 1. Доказать, что $\sin\alpha \sin(60° - \alpha)\sin(60° + \alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$.

Преобразуем левую часть равенства и затем воспользуемся формулой (10.48) и примером 3 § 4.

$$\sin\alpha \sin(60° - \alpha)\sin(60° + \alpha) = \sin\alpha\,(\sin^2 60° - \sin^2\alpha) =$$
$$= \sin\alpha\left(\frac{3}{4} - \sin^2\alpha\right) = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

Предлагаем читателю аналогично доказать тождества

$$\cos\alpha \cos(60° - \alpha)\cos(60° + \alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60° - \alpha)\operatorname{tg}(60° + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha \quad (\alpha \neq 180° \cdot n \pm 30°;$$
$$\alpha \neq 90°(2n+1));$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}(60° - \alpha)\operatorname{ctg}(60° + \alpha) = \operatorname{ctg} 3\alpha \quad (\alpha \neq 60° \cdot n).$$

Пользуясь этими тождествами, легко показать, что

$$\sin 20° \sin 40° \sin 80° = \frac{1}{4}\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{8};$$

$$\cos 10° \cos 50° \cos 70° = \frac{1}{4}\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{8};$$

$$\operatorname{tg} 6° \operatorname{tg} 54° \operatorname{tg} 66° = \operatorname{tg} 18°$$

и т. д.

Пример 2. Вычислить $\sin 18°$.

Решение. Рассмотрим тождество

$$\sin 36° \equiv \cos 54°,$$

или

$$2\sin 18° \cos 18° \equiv 4\cos^3 18° - 3\cos 18°.$$

Разделив обе части последнего тождества на $\cos 18° \neq 0$, получим

$$2 \sin 18° \equiv 4 \cos^2 18° - 3,$$

откуда

$$4 \sin^2 18° + 2 \sin 18° \equiv 1.$$

Дополним левую часть тождества до полного квадрата

$$4 \sin^2 18° + 2 \sin 18° + \frac{1}{4} \equiv \frac{5}{4},$$

или

$$\left(2 \sin 18° + \frac{1}{2}\right)^2 \equiv \frac{5}{4};$$

отсюда находим

$$\left|2 \sin 18° + \frac{1}{2}\right| \equiv \frac{\sqrt{5}}{2},$$

или

$$2 \sin 18° + \frac{1}{2} \equiv \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом,

$$\sin 18° \equiv \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ответ.

$$\sin 18° \equiv \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}3090.$$

Пользуясь значением $\sin 18°$, легко найти значения остальных тригонометрических функций угла 18°, а затем с помощью формул сложения и вычитания аргументов (§ 4) легко вычислить значения тригонометрических функций углов: 3° (18° — 15°), 12° (30° — 18°), 27° (45° — 18°), 33° (18° + 15°), 42° (60° — 18°) и т. д.

Пример 3. Доказать, что

$$\sin 3\alpha \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha \cos 3\alpha = \frac{3}{4} \sin 4\alpha.$$

Решение. Применяя формулы (10.41), (10.42) и (10.20), получим

$$\sin 3\alpha \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha \cos 3\alpha = \sin 3\alpha \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4} +$$

$$+ \cos 3\alpha \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4} = \frac{3}{4} (\sin 3\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 3\alpha) = \frac{3}{4} \sin 4\alpha.$$

Пример 4. Упростить $A = \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha$.

Решение. Умножим и разделим данное выражение на $\sin \alpha \neq 0$ ($\alpha \neq \pi n$) и затем применим формулу (10.46); получим:

$$A = \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \sin 4\alpha \cos 4\alpha\right)}{\sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \sin 8\alpha\right)\right]}{\sin \alpha} = \frac{\sin 8\alpha}{8 \sin \alpha}.$$

Если $\alpha = \pi n$, то $A = \cos \pi n \cos 2\pi n \cos 4\pi n = (-1)^n$.

Ответ. $A = \begin{cases} \dfrac{\sin 8\alpha}{8 \sin \alpha}, & \text{если } \alpha \neq \pi n, \\ (-1)^n, & \text{если } \alpha = \pi n, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$

Следует отметить, что произведение косинусов, аргументы которых удваиваются, можно упростить умножением и делением его на синус наименьшего угла с последующим «свертыванием» числителя с помощью формулы (10.46).

## § 8. Формулы половинного аргумента

Формулами половинного аргумента называются формулы, выражающие значения тригонометрических функций аргумента $\frac{\alpha}{2}$ через значения тригонометрических функций аргумента $\alpha$:

$$\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \tag{10.58}$$

$$\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \tag{10.59}$$

$$\left|\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad [\alpha \neq \pi (2n + 1)]; \tag{10.60}$$

$$\left|\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad (\alpha \neq 2\pi n), \tag{10.61}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Для $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ иногда удобнее пользоваться формулами

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq \pi n); \tag{10.62}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad (\alpha \neq \pi n), \tag{10.63}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 1. Вычислить $\operatorname{tg} 7° 30'$.

Решение. Применив формулу (10.47), получим

$$\operatorname{tg} 7°30' = \frac{1 - \cos 15°}{\sin 15°}.$$

Учитывая, что $\cos 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, а $\sin 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ (см. пример 1, § 4), найдем

$$\operatorname{tg} 7^\circ 30' = \frac{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-8}{4} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$$

Ответ. $\operatorname{tg} 7^\circ 30' \equiv \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$.

Пример 2. Доказать, что

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой (10.60), получаем

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ} = \frac{1-\dfrac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}{1+\dfrac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## § 9. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]; \qquad (10.64)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]; \qquad (10.65)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \qquad (10.66)$$

Из этих формул при $\alpha = \beta$ получаются формулы (10.46), (10.50) и (10.51).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Упростить выражение

$$A = \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos(\alpha+n\beta),$$

где $n$ — натуральное число.

Решение. Умножим и разделим обе части выражения $A$ на $\sin\frac{\beta}{2}$ ($\beta \neq 2\pi k$, где $k$ — целое число):

$$A = \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\sin\frac{\beta}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+\beta) + \cdots + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+n\beta)\right\}.$$

Преобразуем произведения в фигурных скобках в суммы по формуле (10.64); получим

$$A=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\right.$$

$$-\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)+\cdots+\sin\left(\alpha+$$

$$\left.+\frac{2n+1}{2}\beta\right)-\sin\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)\Big]=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right)-\right.$$

$$\left.-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\right]=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}2\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Если $\beta=2nk$, тогда, воспользовавшись формулами приведения, получим

$$A=(n+1)\cos\alpha.$$

Ответ. $A=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}, & \text{если } \beta\neq 2\pi k,\\ (n+1)\cos\alpha, & \text{если } \beta=2\pi k,\end{cases}$

где $k$ — любое целое число.

Вообще, чтобы упростить сумму косинусов, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию, можно умножить и разделить эту сумму на синус половины разности этой прогрессии (если разность не равна $2\pi k$) и преобразовать произведения числителя в суммы, привести подобные члены, а затем результат преобразовать в произведение, кроме того, следует рассмотреть сумму в случае, когда разность прогрессии равна $2\pi k$.

## § 10. Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{10.67}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \tag{10.68}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{10.69}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}; \tag{10.70}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\quad\left[\alpha,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1)\right];\tag{10.71}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\quad\left[\alpha,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1)\right];\tag{10.72}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\quad[\alpha,\ \beta\neq\pi n];\tag{10.73}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\quad[\alpha,\ \beta\neq\pi n].\tag{10.74}$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Доказать, что

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Доказательство. Применяя формулы (10.69) и (10.41) и попарно группируя, получим

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma+\alpha+\beta+\gamma}{2}\times$$
$$\times\cos\frac{\gamma-\alpha-\beta-\gamma}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)=$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta+2\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\beta-\alpha-\beta-2\gamma}{4}=$$
$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Пример 2. Доказать, что

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\equiv 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

если $\alpha+\beta+\gamma\equiv\pi$.

Доказательство. По условию $\gamma\equiv\pi-\alpha-\beta$; тогда, на основании формул (10.36) и (10.50) имеем

$$A=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2[\pi-(\alpha+\beta)]-$$
$$-2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)-2=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+$$
$$+\frac{1-\cos 2(\alpha+\beta)}{2}-2=-\frac{1}{2}[\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2(\alpha+\beta)+1].$$

Применяя формулы (10.69), (10.47), получаем

$$A=-\frac{1}{2}[2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\cos^2(\alpha+\beta)]=$$
$$=-\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]=$$
$$=-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta=-2\cos(\pi-\gamma)\cos\alpha\cos\beta=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Пример 3. Доказать, что

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma\equiv 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

если $\alpha+\beta\equiv\gamma$.

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства, учитывая, что $\alpha+\beta\equiv\gamma$:

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times$$
$$\times\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=$$
$$=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Пример 4. Доказать, что $\alpha+\beta+\gamma\equiv\pi$, если $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — острые углы и

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma\equiv 1.$$

Доказательство. Преобразуем данное тождество так:

$$\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)=1-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma,$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma},$$

или, по формулам (10.33) и (10.39),

$$\operatorname{ctg}\alpha=-\operatorname{ctg}(\beta+\gamma)=\operatorname{ctg}(\pi-\beta-\gamma).$$

Так как $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — острые углы, то $\alpha=\pi-\beta-\gamma$, или $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

## § 11. Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\quad\left[\alpha\neq\pi(2n+1)\right];\tag{10.75}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\quad\left[\alpha\neq\pi(2n+1)\right];\tag{10.76}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\quad\left[\alpha,\ \frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right];\tag{10.77}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\quad(\alpha\neq\pi n).\tag{10.78}$$

Формулы (10.75) — (10.78) дают возможность представить все тригонометрические функции угла $\alpha$ в виде рациональных выражений относительно $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

## § 12. Преобразование алгебраической суммы в произведение с помощью введения вспомогательного аргумента

Рассматриваемый прием заключается в том, что некоторую величину представляют как тригонометрическую функцию соответствующего аргумента $\varphi$, а затем для преобразования применяют тригонометрические тождества.

Пример 1. Преобразовать в произведение сумму $A+B$, где $A$ и $B$ — любые действительные числа.

Решение. Вынесем $A$ за скобки и обозначим $\frac{B}{A}=\operatorname{tg}\varphi$; тогда

$$A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)=A(1+\operatorname{tg}\varphi)=A\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\varphi\right)=$$

$$=A\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi}=\frac{A\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi}.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение $a\sin\alpha+b\cos\alpha$, где $a$ и $b$ — любые действительные числа ($ab\neq 0$).

Решение. Представим данное выражение так:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right);$$

так как $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|<1$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$ и $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то можно подобрать такой угол $\varphi$, чтобы

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi;$$

тогда $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi+\sin\varphi\cos\alpha)=$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi).$$

Таким образом,

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi), \tag{10.79}$$

где $\varphi$ определяется из системы

$$\begin{cases}\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\\[2ex] \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$$

Заметим, что если $a = b = 1$, то $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right); \tag{10.80}$$

если $a = 1$, $b = -1$, то $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ и

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right). \tag{10.81}$$

## § 13. Тригонометрические функции числового аргумента

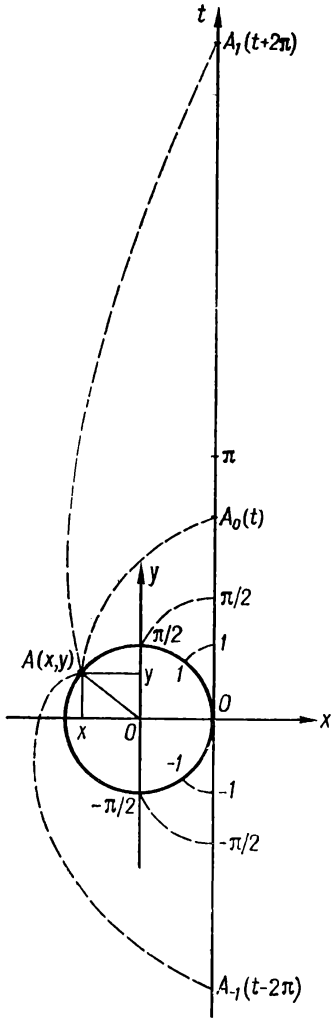



Рис. 146.

До сих пор аргументами тригонометрических функций рассматривались именованные величины — углы (дуги), измеренные в градусах или радианах. Значения тригонометрических функций, как отношения отрезков, являются абстрактными величинами (числами). При изучении свойств тригонометрических функций, как и степенной, показательной и логарифмической, приходится сравнивать изменения функции в связи с изменением аргумента, а сравнивать можно только однородные или, что еще лучше, абстрактные величины (числа). Кроме того, введение тригонометрических функций числового аргумента дает возможность применять эти функции в различных вопросах математики, физики, техники и т. д. Понятие тригонометрической функции числового аргумента можно ввести следующим образом. В координатной плоскости $xOy$ построим единичную окружность и числовую ось $t$ расположим так, чтобы она касалась единичной окружности в точке ее пересечения с положительной полуосью абсцисс (1, 0), причем за начало оси $t$ возьмем точку касания, а масштабную единицу выберем такую же, как и в системе координат (рис. 146). Представим себе, что числовую ось намотали на единичную окружность: положительную полуось против движения часовой стрелки, а отрицательную — по движению часовой стрелки. Пусть при этом наматывании точка $A_0(t)$ числовой оси совпадает с точкой $A(x, y)$ единичной окружности. Так как радиус окружности равен 1, то ее длина равна $2\pi$; поэтому после первого витка с точкой $A(x, y)$ совпадает точка $A_1(t + 2\pi)$ числовой оси, после второго

витка с точкой $A(x, y)$ совпадает точка $A_2(t + 4\pi)$ и т. д. При наматывании отрицательной полуоси при первом витке с точкой $A(x, y)$ совпадает точка $A_{-1}(t - 2\pi)$, при втором витке — точка $A_{-2}(t - 4\pi)$ и т. д.

Таким образом, точкам числовой оси $A_n(t + 2\pi n)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, будет соответствовать одна и только одна точка $A$ единичной окружности с координатами $(x, y)$. Поэтому координаты точки окружности $(x, y)$, соответствующие числу $t$ числовой оси, можно рассматривать как функции этого числа.

По определению примем

$$y = \sin t, \quad x = \cos t, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} t, \quad \frac{x}{y} = \operatorname{ctg} t, \quad \frac{1}{x} = \sec t, \quad \frac{1}{y} = \operatorname{cosec} t.$$

При этом определении легко показать, что значения тригонометрических функций числового аргумента $t$ равны значениям тригонометрических функций угла в $t$ рад. Таким образом, тригонометрические функции числового аргумента $t$ — это одноименные тригонометрические функции угла в $t$ рад.

Поэтому все соотношения между тригонометрическими функциями угла (дуги), измеренного в радианах, имеют место для тригонометрических функций числового аргумента.

Пример. Доказать, что $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cos 2 = 1$.

Доказательство. Применяя формулы (10.40) и (10.50), получим

$$\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cos 2 = \frac{1 + \cos 6}{2} + \frac{1 + \cos 2}{2} - \frac{1}{2}(\cos 6 + \cos 2) = 1.$$

## § 14. Периодичность тригонометрических функций

Характерным свойством тригонометрических функций является их периодичность.

Функция $f(x)$ называется периодической функцией, если существует такое число $T$ ($T > 0$), что для всех $x$ из области определения этой функции значения $x + T$ принадлежат этой области и выполняется тождество

$$f(x + T) \equiv f(x). \tag{10.82}$$

Число $T$ называется периодом функции $f(x)$.

Можно показать, что если функция $f(x)$ имеет период $T$, то ее периодом есть любое число $kT$, где $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, т. е.

$$f(x + kT) \equiv f(x).$$

Наименьший из положительных периодов периодической функции $f(x)$, если он существует, называется ее *основным периодом* и обозначается буквой $T_0$. Обыкновенно, когда говорят о периоде функции, то имеют в виду ее наименьший период.

Рассмотрим примеры на нахождение периодов функций.

Пример 1. Найти период (основной) функции $f(x) = \sin x$.

Р е ш е н и е. Пусть функция $\sin x$ периодическая с периодом $T$; тогда, по определению, при всех значениях $x$ должно выполняться тождество

$$\sin(x+T) \equiv \sin x,$$

или

$$\sin(x+T) - \sin x \equiv 0,$$

которое с помощью формулы (10.68) преобразуем к виду

$$2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right) \equiv 0;$$

так как $x$ — переменная величина, то $2\cos\left(x+\frac{T}{2}\right) \not\equiv 0$, значит, для того чтобы периодом функции $\sin x$ было $T$, необходимо и достаточно выполнение тождества $\sin\frac{T}{2} \equiv 0$, откуда, по формуле (10.15), находим $\frac{T}{2} = \pi n$, или $T = 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Так как $T \neq 0$, то $n \neq 0$, и окончательно для определения множества периодов функции $\sin x$ имеем формулу

$$T = 2\pi n, \text{ где } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Основным периодом или периодом $T_0$ является наименьшее из положительных значений $T$, получаемое при наименьшем значении $n = 1$, т. е. $T_0 = 2\pi$.

О т в е т. Периодом $\sin x$ является $T_0 = 2\pi$.

Заметим, что в рассмотренном примере $T_0 = 2\pi$ мы нашли, пользуясь допущением, что функция имеет период; поэтому надо было бы подстановкой убедиться в том, что это действительно период $\sin x$.

П р и м е р 2. Найти период функции

$$f(x) = A\sin(\omega x + \alpha),$$

где $A$, $\omega$ и $\alpha$ — постоянные величины ($A \neq 0$, $\omega \neq 0$), а $x$ — аргумент.

Р е ш е н и е. Рассмотрим тождество (10.82) для данной функции

$$A\sin[\omega(x+T)+\alpha] \equiv A\sin(\omega x+\alpha),$$

которое после преобразования можно представить в виде

$$2\sin\frac{\omega T}{2}\cos\left(\omega x+\alpha+\frac{\omega T}{2}\right) \equiv 0.$$

Так как $x$ — величина переменная, то $2\cos\left(\omega x+\alpha+\frac{\omega T}{2}\right) \not\equiv 0$; тогда $\sin\frac{\omega T}{2} \equiv 0$, откуда следует

$$\frac{\omega T}{2} = \pi n, \text{ или } T = \frac{2\pi n}{\omega},$$

где $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Из множества значений $T$ наименьшее положительное значение получим при наименьшем положительном значении $n = 1$, т. е.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Заметим, что период функции $A\sin(\omega x + \alpha)$ от $A$ и $\alpha$ не зависит.

Ответ. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$.

Аналогично можно найти периоды и остальных тригонометрических функций.

Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l}\sin x \text{ и } \cos x \text{ имеют период } T_0 = 2\pi;\\ \operatorname{tg} x \text{ и } \operatorname{ctg} x \text{ имеют период } T_0 = \pi,\end{array}\right\} \tag{10.83}$$

а

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\omega x + \alpha) \text{ и } \cos(\omega x + \alpha) \text{ имеют период } T_0 = \frac{2\pi}{\omega};\\ \operatorname{tg}(\omega x + \alpha) \text{ и } \operatorname{ctg}(\omega x + \alpha) \text{ имеют период } T_0 = \frac{\pi}{\omega}.\end{array}\right\} \tag{10.84}$$

Пример 3. Найти период функции $f(x) = \sin x^2$.

Решение. Рассмотрим тождество (10.82) для этой функции:

$$\sin(x + T)^2 \equiv \sin x^2,$$

или

$$\sin(x + T)^2 - \sin x^2 \equiv 0,$$

которое преобразуем по формуле (10.68) в тождество

$$2\sin\left(Tx + \frac{T^2}{2}\right)\cos\left(x^2 + Tx + \frac{T^2}{2}\right) \equiv 0.$$

Так как $x$ — переменная величина, то

$$\sin\left(Tx + \frac{T^2}{2}\right) \not\equiv 0 \text{ и } \cos\left(x^2 + Tx + \frac{T^2}{2}\right) \not\equiv 0.$$

Это значит, что допущение о возможности тождества (10.82) для данной функции неверно, т. е. функция периода не имеет.

Ответ. Функция не периодическая.

Заметим, что сумма, разность, произведение и частное двух периодических функций может быть функцией как периодической, так и непериодической. Алгебраическая сумма периодических функций будет функцией периодической, если периоды всех данных функций соизмеримы. Сложная функция, промежуточным аргументом которой служит периодическая функция, есть функция периодическая.

Пример 4. Найти период функции

$$f(x) = \sin 2x + 3\sin(3x - 2) - 0{,}5\cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right).$$

Решение. По формулам (10.84) находим, что $\sin 2x$ имеет период $\frac{2\pi}{2} = \pi$; $3\sin(3x - 2)$ имеет период $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$; $-0{,}5\cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right)$ имеет период $\frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{2}\pi$.

Основным периодом функции $f(x)$ является наименьшее общее кратное периодов ее слагаемых $\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, для нахождения которого приведем коэффициенты возле $\pi$ в полученных периодах к общему знаменателю:

$$\frac{6}{6}\pi,\ \frac{4}{6}\pi \text{ и } \frac{15}{6}\pi \left(\text{или } 6\cdot\frac{\pi}{6};\ 4\cdot\frac{\pi}{6} \text{ и } 15\cdot\frac{\pi}{6}\right).$$

Наименьшее общее кратное числителей этих коэффициентов 6, 4 и 15 равно 60. Основной период или период функции

$$T_0 = 60\cdot\frac{\pi}{6} = 10\pi.$$

Ответ. $T_0 = 10\pi$.

Заметим, что если функция имеет вид

$$f(x) = A_1\sin(\omega_1 x+\alpha_1) + B_1\cos(\omega_1 x+\beta_1) + A_2\sin(\omega_2 x+\alpha_2) + \\ + B_2\cos(\omega_2 x+\beta_2) + \cdots + A_n\sin(\omega_n x+\alpha_n) + B_n\cos(\omega_n x+\beta_n),$$

то основной период этой функции равен наименьшему общему кратному периодов ее слагаемых (если периоды соизмеримы).

## § 15. Основные свойства и графики тригонометрических функций

Свойство периодичности тригонометрических функций позволяет изучать их на отрезке, длина которого равна основному периоду.

**Функция $y = \sin x$.** Основные свойства:

а) определена при всех действительных значениях $x$, т. е. при $-\infty < x < +\infty$;

б) изменяется от $-1$ до $+1$, т. е. $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ и является функцией ограниченной;

в) периодическая. Основной период $T_0 = 2\pi$, т. е.

$$\sin(x+2\pi n) = \sin x, \tag{10.85}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

В дальнейшем, если не будет специально оговорено, под $n$ будем понимать любое целое число.

г) функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$, и ее график симметричен относительно начала координат;

д) обращается в нуль ($\sin x = 0$) при $x = \pi n$. Эти точки являются точками пересечения графика функции с осью абсцисс;

е) функция принимает положительные значения ($\sin x > 0$) при $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$ и отрицательные ($\sin x < 0$) при $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n$;

ж) функция возрастает при $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и убывает при $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$;

з) имеет максимумы в точках $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, причем $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$, и минимумы в точках $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, причем $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=-1$;

к) график функции на промежутках $2\pi n<x<\pi+2\pi n$ выпуклый, т. е.

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2},$$

если $x_1$ и $x_2$ принадлежат к одному из указанных промежутков. График функции на промежутках $\pi+2\pi n<x<2\pi+2\pi n$ вогнутый, т. е.

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2},$$

если $x_1$ и $x_2$ принадлежат к одному из указанных промежутков (см. определение выпуклости и вогнутости графика в § 2, гл. 7). Покажем, например, что график функции $y=\sin x$ на промежутках $2\pi n<x<\pi+2\pi n$ выпуклый. Для этого достаточно доказать, что для любых $x_1$ и $x_2$ из промежутка $(0, \pi)$ имеет место неравенство

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}.$$

Найдем разность

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}}{2}=$$

$$=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\left(1-\cos\frac{x_1-x_2}{2}\right)=2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin^2\frac{x_1-x_2}{4}.$$

Так как $0<x_1<\pi$ и $0<x_2<\pi$, то $0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi$; поэтому

$$2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin^2\frac{x_1-x_2}{4}>0.$$

Следовательно,

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}.$$

*График функции* $y=\sin x$. Чтобы построить график функции $y=\sin x$, достаточно построить его на отрезке $[0, 2\pi]$, равном основному периоду функции. Каждому значению аргумента $x$ из отрезка $[0, \pi]$ на единичной окружности находим соответствующее значение $\sin x$, т. е. $y$ — ординаты точки единичной окружности, соответствующей значению числового аргумента $x$ (см. определение тригонометрических функций числового аргумента; рис. 146). Тогда геометрическое место точек $(x, y)$ и будет графиком $y=\sin x$. Построение этого графика на отрезке $[0, 2\pi]$ приведено на рис. 147, а график $y=\sin x$ в общем случае приведен на рис. 148.

Графиком функции $y = \sin x$ является сплошная (непрерывная) кривая линия, которая называется синусоидой, т. е. его можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

Функцию, графиком которой является сплошная линия, называют непрерывной. (Строгое определение непрерывности функции будет дано в гл. 13).

**Функция $y = \cos x$.** Основные свойства:

а) определена и непрерывна при всех действительных значениях $x$, т. е. при $-\infty < x < +\infty$;

б) изменяется от $-1$ до $+1$, т. е. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ и является функцией ограниченной;

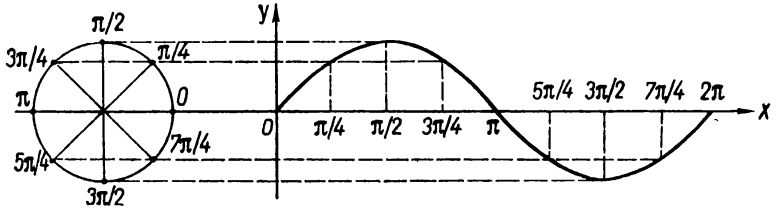



Рис. 147.

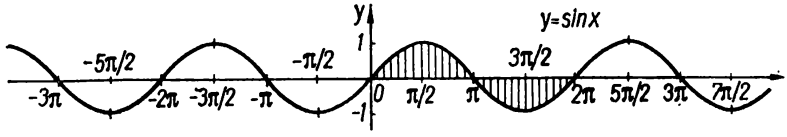



Рис. 148.

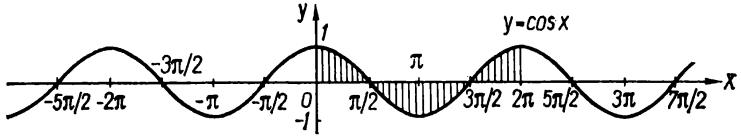



Рис. 149.

в) периодическая. Основной период $T_0 = 2\pi$, т. е.

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos x; \tag{10.86}$$

г) функция четная: $\cos(-x) = \cos x$, и ее график симметричен относительно оси ординат (рис. 149);

д) обращается в нуль ($\cos x = 0$) при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Эти точки являются точками пересечения графика функции с осью абсцисс;

е) функция принимает положительные значения ($\cos x > 0$) при $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и отрицательные ($\cos x < 0$) при $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$;

ж) функция возрастает на промежутках $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n$ и убывает на промежутках $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$;

з) имеет максимумы в точках $x = 2\pi n$, причем $y_{\max} = \cos 2\pi n = 1$ и минимумы в точках $x = \pi + 2\pi n$, причем $y_{\min} = \cos(\pi + 2\pi n) = -1$;

к) график функции на промежутках $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ выпуклый, т. е.

$$\cos\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2},$$

а на промежутках $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ вогнутый, т. е.

$$\cos\frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2}.$$

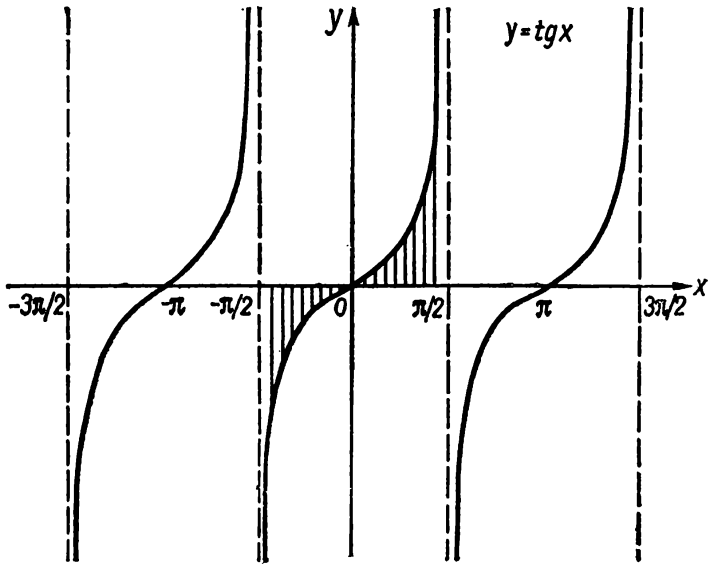



Рис. 150.

*График функции* $y = \cos x$. Этот график можно получить из графика $y = \sin x$, воспользовавшись тождеством $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ (см. § 7, гл. 7), т. е. график $y = \sin x$ надо сместить в отрицательном направлении оси абсцисс на отрезок $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 149).

**Функция** $y = \operatorname{tg} x$. Основные свойства:

а) определена и непрерывна на промежутках $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$. В точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ функция не существует (не определена) и ее график в этих точках имеет разрыв (рис. 150);

б) функция принимает любые действительные значения, т. е. $-\infty < x < +\infty$, и является неограниченной;

в) периодическая. Основной период $T_0 = \pi$, т. е.

$$\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x; \tag{10.87}$$

г) функция нечетная, т. е. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, и ее график симметричен относительно начала координат;

д) функция обращается в нуль ($\operatorname{tg} x = 0$) при $x = \pi n$;

е) при $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ функция принимает положительные значения ($\operatorname{tg} x > 0$); при $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n$ — отрицательные ($\operatorname{tg} x < 0$);

ж) функция возрастает на всех промежутках определения;

з) максимумов и минимумов не имеет;

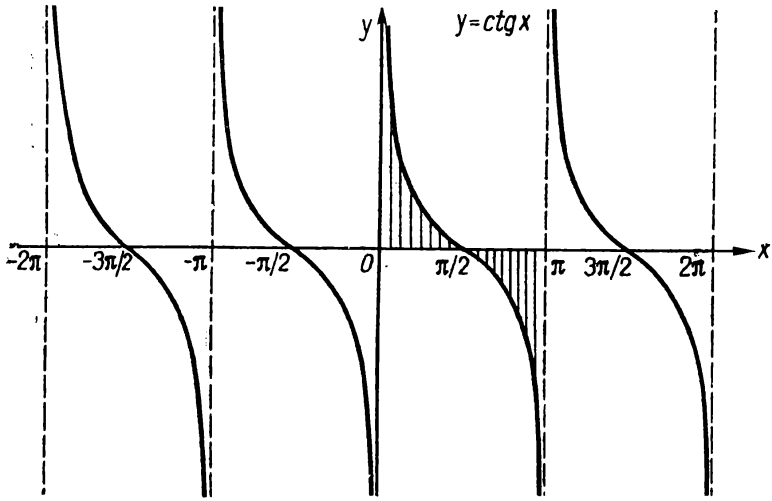



Рис. 151.

к) график функции на промежутках $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n$ выпуклый, т. е.

$$\operatorname{tg}\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2},$$

а на промежутках $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ вогнутый, т. е.

$$\operatorname{tg}\frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2}.$$

*График функции* $y = \operatorname{tg} x$ приведен на рис. 150.

**4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$.** Основные свойства:

а) функция определена и непрерывна на промежутках $\pi n < x < \pi + \pi n$. В точках $x = \pi n$ функция не существует и в этих точках ее график имеет разрыв (рис. 151);

б) функция принимает любые действительные значения, т. е. $-\infty < \operatorname{ctg} x < +\infty$, и является функцией неограниченной;

в) периодическая. Основной период $T_0 = \pi$, т. е.

$$\operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x; \tag{10.88}$$

г) функция нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, и ее график симметричен относительно начала координат;

д) функция обращается в нуль ($\operatorname{ctg} x = 0$) при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$;

е) при $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ функция принимает положительные значения ($\operatorname{ctg} x > 0$); при $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi(n+1)$ — отрицательные ($\operatorname{ctg} x < 0$);

ж) убывает на всех промежутках определения;

з) максимумов и минимумов не имеет;

к) график функции на промежутках $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n$ выпуклый, т. е.

$$\operatorname{ctg}\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\operatorname{ctg} x_1 + \operatorname{ctg} x_2}{2},$$

а на промежутках $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ вогнутый, т. е.

$$\operatorname{ctg}\frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\operatorname{ctg} x_1 + \operatorname{ctg} x_2}{2}.$$

*График функции* $y = \operatorname{ctg} x$ приведен на рис. 151.

Предлагаем читателю рассмотреть основные свойства функций $y = \sec x$ и $y = \operatorname{cosec} x$ и построить их графики.

Рассмотрим несколько упражнений на свойства тригонометрических функций.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \operatorname{ctg} 4x - \operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

Решение. Данная функция определена в общей части областей определения функций $\operatorname{ctg} 4x$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, т. е. область определения данной функции определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} 4x \neq \pi n, \\ \frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \neq \frac{\pi n}{4}, \\ x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi n. \end{cases}$$

Так как множество значений $x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi n$, при которых не определена функция $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$, является собственным подмножеством множества значений $x = \frac{\pi n}{4}$, при которых не существует $y = \operatorname{ctg} 4x$, то

область определения данной функции есть $x \neq \frac{\pi}{4} n$ (как установить это, см. § 17, гл. 10), т. е.

$$\frac{\pi}{4} n < x < \frac{\pi}{4} (n + 1), \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Пример 2. Найти область изменения функции

$$y = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 5.$$

Решение. Пользуясь формулой (10.79), перепишем функцию в виде

$$y = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 5.$$

По свойству «б» функции $y = \sin x$, считая, что $2x + \frac{\pi}{3} = t$, имеем

$$-1 \leqslant \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1,$$

или

$$-2 \leqslant 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 2.$$

Прибавляя 5 к каждой части этих неравенств, найдем, что

$$3 \leqslant 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 5 \leqslant 7$$

или

$$3 \leqslant \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 5 \leqslant 7.$$

Ответ. [3; 7].

Пример 3. Найти период функции $y = |\sin x|$.

Решение. По формуле (10.58) представим функцию в виде

$$|\sin x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}.$$

Так как любая функция от периодической функции также периодическая, то периодом данной функции является $T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ответ. $T_0 = \pi$.

Пример 4. Исследовать на четность и нечетность функции:

А. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\operatorname{ctg} x}$;

Б. $f(x) = \sin x + \operatorname{cosec} x$;

В. $f(x) = \sin x - \cos x$.

Решение. А. Найдем область определения функции $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\operatorname{ctg} x}$:

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x \neq \pi n, \\ \operatorname{ctg} x \neq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x \neq \pi n, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases}$$

откуда следует $x \neq \frac{\pi}{2} n$, или $\frac{\pi}{2} n < x < \frac{\pi}{2}(n+1)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, т. е. область определения функции симметрична относительно точки $x = 0$.

Вычислим $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{\operatorname{tg}(-x) + \sin(-x)}{\operatorname{ctg}(-x)} = \frac{-\operatorname{tg} x - \sin x}{-\operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\operatorname{ctg} x}.$$

От перемены знака аргумента значение функции не изменилось; следовательно, функция четная.

Б. функция $f(x) = \sin x + \operatorname{cosec} x$ определена при $x \neq \pi n$, т. е. область определения функции симметрична относительно точки $x = 0$.

Вычислим $f(-x)$:

$$f(-x) = \sin(-x) + \operatorname{cosec}(-x) = -\sin x - \operatorname{cosec} x = \\ = -(\sin x + \operatorname{cosec} x),$$

т. е. $f(-x) = -f(x)$; значит, данная функция нечетная.

В. Функция $f(x) = \sin x - \cos x$ определена при всех значениях $x$. Вычислим $f(-x)$: $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x$, т. е. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$; значит, эта функция ни четная, ни нечетная.

Пример 5. Найти промежутки знакопостоянства функции

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right).$$

Решение. По свойству «е» функции $y = \sin x$ находим, что данная функция принимает:

а) положительные значения при $2\pi n < \frac{\pi}{3} - 4x < \pi + 2\pi n$;

б) отрицательные значения при $\pi + 2\pi n < \frac{\pi}{3} - 4x < 2\pi + 2\pi n$,

откуда соответственно находим:

а) $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

б) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} < x < -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Ответ. $y > 0$ при $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ и $y < 0$ при $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$.

Пример 6. Найти промежутки монотонности функций

$$y = 2^{\cos 2x} \text{ и } y = \log_{0,5} \sin x.$$

Решение. Заметим, что монотонная функция от монотонной всегда является функцией монотонной:

а) возрастающая от возрастающей — возрастающая,

б) возрастающая от убывающей — убывающая,

в) убывающая от возрастающей — убывающая,

г) убывающая от убывающей — возрастающая. (Докажите это.)

А. Функция $y = 2^{\cos 2x}$ определена при всех значениях $x$. Показательная функция $y = 2^t$ возрастает при всех значениях $t$, т. е. при $-\infty < t < +\infty$. Поэтому там, где функция $t = \cos 2x$ возрастает, данная сложная функция возрастает, а там, где $t = \cos 2x$ убывает, данная функция убывает.

По свойству «ж» функции $y = \cos x$ функция $t = \cos 2x$ возрастает при $\pi + 2\pi n < 2x < 2\pi + 2\pi n$, или $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n$ и убывает при $2\pi n < 2x < \pi + 2\pi n$, или $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$. Поэтому функция $y = 2^{\cos 2x}$ возрастает при $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n$ и убывает при $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Б. Функция $y = \log_{0,5} \sin x$ определена при $\sin x > 0$, т. е. при $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$.

Логарифмическая функция $y = \log_{0,5} t$ убывает при всех значениях $t$ $(0 < t < +\infty)$.

Так как функция $t = \sin x$ на промежутках определения данной функции возрастает при $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и убывает при $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, то данная функция $y = \log_{0,5} \sin x$ убывает на промежутках $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и возрастает на промежутках $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ответ. Функция $y = 2^{\cos 2x}$ возрастает при $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n + \pi$ и убывает при $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; функция $y = \log_{0,5} \sin x$ возрастает при $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$ и убывает при $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$, где $a$, $b$, $c$ — данные числа.

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$a \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{b \sin 2x}{2} + c \frac{1 + \cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} [a + c + b \sin 2x + (a - a) \cos 2x].$$

Применяя формулу (10.64) к выражению $b\sin 2x + (c-a)\cos 2x$, заменим его на

$$b\sin 2x + (c-a)\cos 2x = \sqrt{b^2+(c-a)^2}\sin(2x+\varphi),$$

где $\varphi$ определяется из системы

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{c-a}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}; \end{cases}$$

тогда

$$y = \frac{1}{2}\left[a + c + \sqrt{b^2+(c-a)^2}\sin(2x+\varphi)\right].$$

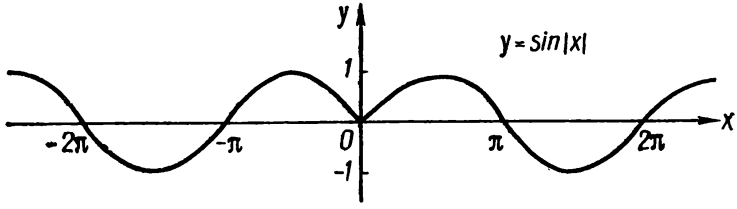



Рис. 152.

Так как полученная функция принимает наибольшее и наименьшее значения одновременно с функцией $\sin(2x+\varphi)$, то при $\sin(2x+\varphi) = -1$ данная функция имеет наименьшее значение

$$y = \frac{1}{2}\left[a + c - \sqrt{b^2+(c-a)^2}\right],$$

а при $\sin(2x+\varphi) = 1$ — наибольшее значение

$$y = \frac{1}{2}\left[a + c + \sqrt{b^2+(c-a)^2}\right].$$

Например, наибольшим и наименьшим значениями функции

$$y = 5\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 11\cos^2 x$$

являются

$$y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}\left[5 + 11 + \sqrt{8^2+(5-11)^2}\right] = 13,\quad y_{\text{наим}} = 3.$$

Пример 8. Построить графики функций $y = \sin|x|$ и $y = |\cos x|$.

Решение. Чтобы построить график $y = \sin|x|$ (см. § 7, гл. 7), надо построить сначала график $y = \sin x$ при $x > 0$, а затем построить кривую, симметричную с построенным графиком относительно оси ординат (рис. 152).

Чтобы построить график $y = |\cos x|$ (см. § 7, гл. 7), надо построить график $y = \cos x$ и те части графика, на которых $y < 0$, отобразить симметрично относительно оси абсцисс (рис. 153).

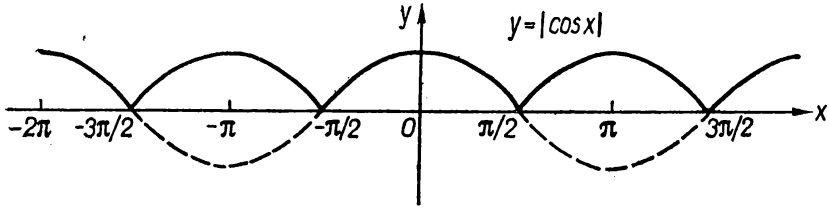



Рис. 153.

## § 16. Простые гармонические колебания

В плоскости $xOy$ возьмем окружность, радиус которой равен $A$ с центром в начале координат (рис. 154).

Пусть точка $M$ движется по этой окружности с постоянной угловой скоростью $\omega$ (рад/с) от начального положения $M_0$. Причем радиус-вектор $\vec{OM}_0$ образует с положительной полуосью абсцисс угол $\varphi_0$. Тогда через $t$ секунд точка $M$ займет положение $M_t$, причем угол $\angle M_0OM_t$ будет равен $\omega t$, а угол между радиусом-вектором $\vec{OM}_t$ и положительной полуосью абсцисс будет равен

$$\angle xOM_0 + \angle M_0OM_t = \omega t + \varphi_0.$$

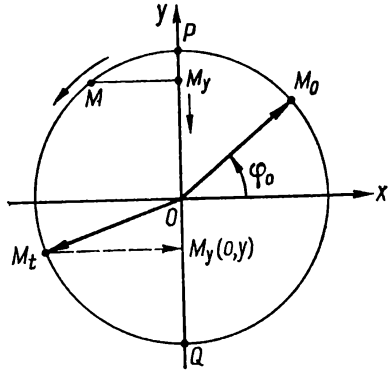



Рис. 154.

Если точка $M$ будет описывать круг за кругом, то ее проекция $M_y$ на ось ординат будет соответственно колебаться между точками $P$ и $Q$. Легко установить зависимость между движущейся по окружности точкой $M$ и ее проекцией $M_y$ на ось ординат.

Так как радиус окружности равен $A$, то, согласно (10.3), (§ 2, гл. 10)

$$\frac{\overline{OM}_y}{A} = \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (\vec{OM}_y = y),$$

или

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0). \tag{10.89}$$

Колебание, происходящее по закону (10.89), называется *простым гармоническим*.

Функция (10.89) называется *гармоникой*, аргумент ее $\omega t + \varphi_0$ — *фазой колебания*, $A$ — половина размаха колебаний точки $M_y$ — называется *амплитудой*, а $\varphi_0$ — *начальной фазой колебания*.

Время, за которое осуществляется одно полное колебание, называется *периодом колебаний* и обозначается буквой $T$.

Число колебаний $\nu$ в секунду называется *частотой*. Так как одно колебание осуществляется на протяжении периода $T$, а на протяжении одной секунды происходит $\nu$ колебаний, то

$$\nu T = 1; \tag{10.90}$$

таким образом, частота и период колебаний — величины взаимно обратные.

За время периода $T$ точка $M$ совершает полный оборот, т. е. описывает дугу в $2\pi$ рад, поэтому

$$\omega T = 2\pi \text{ рад.} \tag{10.91}$$

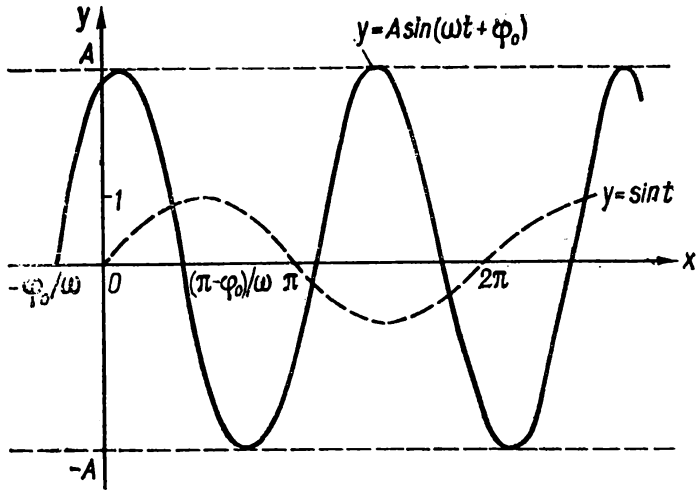



Рис. 155.

Отсюда

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \text{ рад/с.} \tag{10.92}$$

График гармонического колебания приведен на рис. 155. Этот график легко получить из обыкновенной синусоиды, пользуясь правилами преобразования графиков (см. § 7, гл. 7).

Пусть даны два гармонических колебания с одной и той же частотой (или с одним и тем же периодом):

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1);$$
$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Рассмотрим их сумму:

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) =$$
$$= A_1 \sin\omega t \cos\varphi_1 + A_1 \sin\varphi_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t \cos\varphi_2 + A_2 \sin\varphi_2 \cos\omega t =$$
$$= (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2) \sin\omega t + (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2) \cos\omega t.$$

Обозначим

$$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = a,$$
$$A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = b;$$

тогда по формуле (10.79) получим

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (\omega t + \varphi),$$

где $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}$, а $\varphi$ определяется из системы

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}}, \\ \sin \varphi = \dfrac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}}. \end{cases}$$

Если обозначить $\sqrt{a^2 + b^2} = A$, то получим

$$y = y_1 + y_2 = A \sin (\omega t + \varphi). \qquad (10.93)$$

Таким образом, при сложении двух простых гармонических колебаний одной частоты получаем простое гармоническое колебание той же частоты, но с другими амплитудой $A$ и начальной фазой $\varphi$.

При сложении двух простых гармонических колебаний различной частоты получаются более сложные колебания, график которых уже не является синусоидальной кривой.

## § 17. Тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестное входит только под знак тригонометрических функций непосредственно или в виде линейной функции неизвестного, причем над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические действия.

Основные понятия об уравнениях и теоремы о равносильности (гл. 4) имеют место и для тригонометрических уравнений.

**Простейшие тригонометрические уравнения** — это уравнения

$$\sin x = m, \qquad (1)$$
$$\cos x = m, \qquad (2)$$
$$\operatorname{tg} x = m, \qquad (3)$$
$$\operatorname{ctg} x = m, \qquad (4)$$

где $m$ = любое действительное число.

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений.

I. $\sin x = m$. Если $|m| \leqslant 1$, то решения данного уравнения определяются формулой

$$x_n = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \qquad (10.94)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В частности, при $m = 0$ $\quad x_n = \pi n$;

при $m = -1$ $\quad x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

при $m = 1$ $\quad x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Если $|m| > 1$, то уравнение (1) не имеет решений.

II. $\cos x = m$. Если $|m| \leqslant 1$, то решения этого уравнения определяются формулой

$$x_n = \pm \arccos m + 2\pi n, \tag{10.95}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В частности, при $m = 0$ $\quad x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$;

при $m = -1$ $\quad x_n = \pi + 2\pi n$;

при $m = 1$ $\quad x_n = 2\pi n$.

Если $|m| > 1$, то уравнение (2) решений не имеет.

III. $\operatorname{tg} x = m$. При любом действительном $m$

$$x_n = \operatorname{arctg} m + \pi n, \tag{10.96}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В частности, при $m = 0$ $\quad x_n = \pi n$;

при $m = -1$ $\quad x_n = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$;

при $m = 1$ $\quad x_n = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$.

IV. $\operatorname{ctg} x = m$. При любом действительном $m$

$$x_n = \operatorname{arcctg} m + \pi n, \tag{10.97}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В частности, при $m = 0$ $\quad x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$;

при $m = -1$ $\quad x_n = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$;

при $m = 1$ $\quad x_n = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$.

Простейшие тригонометрические уравнения, неизвестные которых входят под знак тригонометрических функций в виде линейной функции неизвестного, т. е. уравнения $\sin(ax + b) = m$, $\cos(ax + b) = m$, $\operatorname{tg}(ax + b) = m$, $\operatorname{ctg}(ax + b) = m$ приводятся к уравнениям (10.77) — (10.80) заменой $ax + b = t$.

**Общие замечания о решении тригонометрических уравнений.** Общего метода решения любого тригонометрического уравнения не существует. При решении тригонометрических уравнений прежде всего надо найти область определения уравнения в том числовом множестве, в котором рассматривается уравнение. Затем в области определения уравнения с помощью теорем равносильности (гл. 4) и тождественных преобразований приводят данное уравнение к одному или нескольким простейшим уравнениям. Решив полученные простейшие уравнения, устанавливают, какие из их решений являются решениями данного.

Тождественные преобразования частей уравнения могут изменить область его определения. Если она расширяется, то можно получить значения неизвестного, не являющиеся решениями данного уравнения (посторонние решения), а если область определения уравнения сужается, то можно потерять решения. В этом случае необходимо исследовать, нет ли среди значений неизвестного, на которые сузилась область определения, решений данного уравнения.

Как при решении алгебраических (иррациональных), так и при решении тригонометрических уравнений возведение обеих частей уравнения в квадрат может расширить его область определения и дать посторонние решения. При применении тригонометрических тождеств (формул) для решения тригонометрических уравнений область определения уравнения может оставаться неизменной, расширяться и сужаться.

Изменения области определения для некоторых случаев замены левой части тождества правой приведены в табл. 4.

Заметим, что если при замене левой части формулы правой область определения сужается (расширяется) на некоторые значения аргумента, то обратная замена правой части тождества левой вызывает расширение (сужение) области определения на те же значения аргумента.

Решение тригонометрического уравнения можно свести к решению нескольких простейших тригонометрических уравнений, причем при различных способах решения эти уравнения могут быть разными. Из простейших уравнений по формулам (10.94)—(10.97) найдем несколько множеств (серий) значений неизвестного. Полученные множества могут содержать одинаковые элементы; более того, некоторые множества могут быть собственными подмножествами других множеств (частью). Поэтому из полученных решений следует исключить повторяющиеся элементы (решения) и полученное множество решений записать по возможности меньшим числом формул. После этого следует выяснить, какие из чисел, принадлежащих этим множествам, являются решениями данного уравнения. Кроме того, если при решении область определения уравнения сужалась, то следует проверить, нет ли среди значений неизвестного, на которые сузилась область определения, решений уравнения.

**Преобразование множеств решений простейших тригонометрических уравнений.** Множества решений простейших тригонометрических уравнений, определяемые формулами (10.94)—(10.97), образуются по закону арифметической прогрессии. Так, формула (10.94)

$$x_n = (-1)^n \arcsin m + \pi n = \begin{cases} \arcsin m + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin m + 2\pi k, \end{cases}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, представляет множество чисел, являющихся членами двух арифметических прогрессий с начальными членами $\arcsin m$ и $\pi - \arcsin m$ и одной и той же разностью $2\pi$. Формула (10.78)

$$x_n = \begin{cases} \arccos m + 2\pi n, \\ -\arccos m + 2\pi n, \end{cases}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, представляет множество чисел, являющихся членами двух арифметических прогрессий с начальными членами $\arccos m$ и $-\arccos m$ и разностью $2\pi$.

Формулы (10.96) и (10.97) определяют множества чисел, являющихся членами арифметических прогрессий с разностью $\pi$ и начальными членами, соответственно равными $\operatorname{arctg} m$ и $\operatorname{arcctg} m$. Причем эти

Таблица 4

| Тождество (формула) | Изменение области определения | |
|---|---|---|
| | Сужение | Расширение |
| $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ | — | — |
| $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ | — | — |
| $\sec^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha$ | — | — |
| $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1$ | — | $\alpha=\dfrac{\pi}{2}n$ |
| $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ | $\alpha=\pi n$ | — |
| $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ | — | — |
| $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ | $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ | — |
| $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ | $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ | — |
| $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$ | — | — |
| $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ | $\alpha=\pi+2\pi n$ | — |
| $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ | $\alpha=\pi+2\pi n$ | — |
| $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ | — | — |
| $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ | $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ | — |
| $\dfrac{1}{\sec\alpha}=\cos\alpha$ | — | $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ |

прогрессии отличаются от прогрессий, рассматриваемых в гл. 8, тем, что здесь $n$ — любое целое число, т. е. $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, поэтому в них нет ни наименьшего, ни наибольшего члена.

Рассмотрим арифметическую прогрессию

$$x_n = a + dn, \tag{10.98}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Так как $n$ — любое целое число, то от перемены его знака множество значений $x_n$ не изменится и, кроме того, если заменить $a$ на любое $x_k$, где $k$ — некоторое фиксированное число, то множество значений $x_n$ также не изменится. Поэтому в формуле (10.98) всегда можно считать $d > 0$, а в качестве значения $a$ выбрать наименьший из неотрицательных членов данной прогрессии, т. е. $0 \leqslant a < d$. Такое значение $a$ будем называть начальным членом прогрессии, так как оно получается из формулы (10.98) при $n = 0$, т. е. $x_0 = a$.

При $a = 0$ и $d = 1$ формула (10.98) определяет множество всех целых чисел

$$x_n = 0 + 1 \cdot n = n.$$

Будем представлять множество всех целых чисел в виде объединения нескольких подмножеств, определяемых формулами общих членов арифметических прогрессий с различными натуральными разностями 2, 3, 4, 5, ...

Если положим $d = 2$, то $a$ может иметь два целых значения $a = 0$ и $a = 1$ $(0 \leqslant a < 2)$. Поэтому все целые числа можно представить в виде объединения двух подмножеств: $0 + 2k$ и $1 + 2k$, т. е.

$$n \to \begin{cases} 2k, \\ 2k + 1 \end{cases} \quad \text{и, наоборот,} \quad \begin{cases} 2k, \\ 2k + 1 \end{cases} \to n,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Кратко это будем записывать так:

$$n \leftrightarrow \begin{cases} 2k \\ 2k + 1, \end{cases}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Если положим $d = 3$, то целые неотрицательные значения $a$ найдем из неравенства $0 \leqslant a < 3$, т. е. $a = 0, 1, 2$. Поэтому

$$n \leftrightarrow \begin{cases} 3k + 0, \\ 3k + 1, \\ 3k + 2, \end{cases}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Аналогично, если $d = m$, где $m$ — натуральное число, то $a = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$; тогда множество всех целых чисел можно представить в виде объединения подмножеств

$$n \leftrightarrow \begin{cases} mk, \\ mk + 1, \\ mk + 2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ mk + (m - 1). \end{cases} \tag{10.99}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Представление (10.99) всех целых чисел в виде объединения подмножеств, элементами которых являются члены арифметической прогрессии с разностью $m$ и начальными членами $0, 1, 2, \ldots, m-1$, будем называть представлением целых чисел по разности $m$.

Пусть теперь множество чисел определяется формулой (10.98):

$$x_n = a + dn,$$

где $d > 0$, $0 \leqslant a < d$ и $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Чтобы представить это множество в виде объединения подмножеств, определяемых общими членами арифметических прогрессий с разностями $dm$, где $m$ — натуральное число, надо множество целых чисел $n$ представить по разности $m$ (10.99) и подставить в формулу (10.98); тогда получим

$$x_n \leftrightarrow \begin{cases} a + dmk, \\ a + d(mk + 1), \\ a + d(mk + 2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a + d[mk + (m-1)], \end{cases}$$

или

$$a + dn \leftrightarrow \begin{cases} a + (dm)k, \\ (a + d) + (dm)k, \\ (a + 2d) + (dm)k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a + (m+1)d] + (dm)k, \end{cases} \qquad (10.100)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Заметим, что начальные члены подмножеств (10.100) множества (10.99) составляют арифметическую прогрессию с разностью $d$, содержащую $m$ членов.

Наоборот, если имеются $m$ множеств, элементы каждого из которых являются членами арифметических прогрессий с одной и той же разностью, и если начальные члены этих прогрессий образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной частному от деления общей разности всех прогрессий на их число (число объединяемых множеств), то все эти прогрессии можно объединить в одну. Например, три множества чисел, элементы которых заданы формулами общих членов арифметических прогрессий

$$x_k = a_1 + dk,$$
$$x_k = a_2 + dk,$$
$$x_k = a_3 + dk,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, можно объединить в одно множество, если $a_1$, $a_2$, $a_3$ составляют арифметическую прогрессию с разностью $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = \frac{d}{3}$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + dk = a_1 + dk = a_1 + \dfrac{d}{3} \cdot 3k, \\ a_2 + dk = \left(a_1 + \dfrac{d}{3}\right) + dk = a_1 + \dfrac{d}{3}(3k+1), \\ a_3 + dk = \left(a_1 + \dfrac{2}{3}d\right) + dk = a_1 + \dfrac{d}{3}(3k+2), \end{array}\right\} \leftrightarrow a_1 + \frac{d}{3}n,$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Пример. Объединить множества чисел, заданных формулами

$$x_n = \frac{\pi}{2}n, \quad x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x_n = \frac{3\pi}{4} + \pi n,$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Решение. Формулы общих членов арифметических прогрессий, которыми заданы эти множества чисел, имеют разности $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ и $\pi$. Приведем эти формулы к одной разности $d = \pi$. Для этого первое множество заменим объединением двух прогрессий с разностью $\pi$. Множество целых чисел $n$ в первой формуле представим по разности 2, т. е.

$$n \leftrightarrow \begin{cases} 2k, \\ 2k+1, \end{cases}$$

а во второй и третьей формулах заменим $n$ на $k$; тогда

$$x_n = \frac{\pi}{2}n \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}2k, \\ \dfrac{\pi}{2}(2k+1) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \pi k, \\ \pi k + \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Таким образом для объединения имеем четыре множества:

$$x_k = \pi k + 0; \quad x_k = \pi k + \frac{\pi}{4}; \quad x_k = \pi k + \frac{\pi}{2} \text{ и } x_k = \pi k + \frac{3\pi}{4},$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Так как начальные члены этих формул 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{4}$ и при этом отношение общей разности данных прогрессий к $\frac{\pi}{4}\left(\pi : \frac{\pi}{4} = 4\right)$ равно числу прогрессий, то формулы можно объединить по разности $\frac{\pi}{4}$. Для этого представим данные множества в виде

$$\left.\begin{array}{l} x_k = \dfrac{\pi}{4}(4k+0), \\ x_k = \dfrac{\pi}{4}(4k+1), \\ x_k = \dfrac{\pi}{4}(4k+2), \\ x_k = \dfrac{\pi}{4}(4k+3) \end{array}\right\} \leftrightarrow \frac{\pi}{4}m,$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ответ. Объединение данных множеств определяется формулой $x_m = \frac{\pi m}{4}$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Заметим, что при проверке решений тригонометрического уравнения по его условию имеет смысл множества найденных значений представить по разности, равной периоду данного уравнения, тогда достаточно проверить только начальные члены этих множеств.

### Решение тригонометрических уравнений, содержащих тригонометрические функции одинакового аргумента

Рассмотрим тригонометрические уравнения, рациональные относительно тригонометрических функций.

Так как все тригонометрические функции рационально выражаются через $\sin x$ и $\cos x$, то в общем случае рациональное уравнение относительно тригонометрических функций одного аргумента можно представить в виде

$$R(\sin x, \cos x) = 0, \qquad (10.101)$$

где $R$ — рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Общий прием решения тригонометрических уравнений заключается в следующем: данное уравнение приводится к алгебраическому относительно тригонометрической функции одинакового аргумента; затем, решая получившееся алгебраическое уравнение относительно этой функции, приводят данное уравнение к нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям, из которых находят значения неизвестного и проверяют, какие из них являются решениями данного уравнения.

1. Укажем приемы приведения уравнения (10.101) к одной функции.

А. Уравнение (10.101) всегда может быть приведено к рациональному алгебраическому уравнению относительно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ с помощью формул (10.75) и (10.76). При этой замене область определения уравнения сужается на значения $x = \pi(2n + 1)$. Поэтому при решении таким способом следует проверить дополнительно, нет ли среди указанных значений решений данного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$3 \sin x - \cos x = 1.$$

Решение. Данное уравнение определено при всех действительных значениях $x$. Заменяя $\sin x$ и $\cos x$ по формулам (10.75) и (10.76), получим уравнение

$$3 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 1,$$

которое определено при $x \neq \pi + 2\pi n$, т. е. при переходе от $\sin x$ и $\cos x$ к $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ область определения сузилась на значения $x = \pi + 2\pi n$.

Решая последнее уравнение, получим

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3} \text{ и } \frac{x}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\quad x_k=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi k.$$

Проверим, не будут ли решениями уравнения значения $x_n=\pi+2\pi n$. Так как $2\pi$ — период $\sin x$ и $\cos x$, то достаточно проверить $x=\pi$. Подставляя, получим

$$3\sin\pi-\cos\pi=1, \text{ или } 1=1.$$

Ответ. $x_k=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi k$, $x_n=\pi+2\pi n$, где $k$ и $n$ — любые целые числа.

Пример 2. Решить уравнение $\sin x-\cos x(\sin x-2\cos x)=2$.

Решение. Данное уравнение определено при $-\infty<x<+\infty$. Выражая $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{2-2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)=2,$$

откуда после преобразований найдем

$$\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=0, \text{ или } \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=0 \text{ и } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=2.$$

Из последних уравнений находим $x_k=2\pi k$ и $x_m=2\operatorname{arctg}2+2\pi m$. Проверим по условию уравнения значения $x_n=\pi+2\pi n$, на которые сузилась область определения данного уравнения при переходе от $\sin x$ и $\cos x$ к $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Подставив в уравнение $x=\pi$, получим $\sin\pi-\cos\pi\times$ $\times(\sin\pi-2\cos\pi)=2$, или $2=2$, т. е. $x_n=\pi+2\pi n$ — решения уравнения. Заметим, что множества решений $x_k=2\pi k$ и $x_n=\pi+2\pi n$ можно объединить по разности $\pi$:

$$\left.\begin{array}{l}x_k=\pi(2k),\\ x_k=\pi(2k+1)\end{array}\right\}\leftrightarrow \pi n.$$

Ответ. $x_n=\pi n$, $x_m=2\operatorname{arctg}2+2\pi m$, где $n$ и $m$ — любые целые числа.

Замену $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$ по формулам (10.75)—(10.78) через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ называют универсальной тригонометрической подстановкой. Ею пользуются при решении тригонометрических уравнений в крайнем случае (когда нельзя подобрать более простой способ решения), так как она приводит к алгебраическому уравнению высокой степени.

Б. Если уравнение (10.101) или приводимое к нему при замене $x$ на $\pi-x$ не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\sin x$.

Пример 3. Решить уравнение $7\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 5\sec x$.

Решение. Заменив $x$ на $\pi - x$, получим

$$7\operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{ctg}(\pi - x) = 5\sec(\pi - x),$$

или

$$-7\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -5\sec x;$$

умножив обе части последнего уравнения на $-1$, получим

$$7\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 5\sec x,$$

т. е. уравнение не изменилось.

Уравнение определено при $x \neq \frac{\pi}{2} n$. Приведем его к виду (10.101):

$$7\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{5}{\cos x}.$$

Так как в области определения $\sin x \cos x \neq 0$, то данное уравнение равносильно $7\sin^2 x + \cos^2 x = 5\sin x$. Учитывая, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получим $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$; откуда следует $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = \frac{1}{3}$.

Решая эти уравнения, находим

$$x_k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x_n = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,$$

где $k$ и $n$ — любые целые числа.

Ответ.

$$x_k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,$$

$$x_n = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,$$

где $k$ и $n$ — любые целые числа.

В. Если уравнение (10.101) или приводимое к нему не изменяется при замене $x$ на $-x$, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\cos x$.

Пример 4. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x = 4\operatorname{cosec} x$.

Решение. При замене $x$ на $-x$ все члены уравнения меняют знак, т. е. уравнение не изменяется; поэтому его удобно привести к рациональному относительно $\cos x$. Уравнение определено при $x \neq \frac{\pi}{2} n$. Приводим уравнение к виду (10.101)

$$\frac{\sin x}{\cos x} + 4\frac{\cos x}{\sin x} = 4\frac{1}{\sin x} \quad (\sin x \cos x \neq 0),$$

или

$$\sin^2 x + 4\cos^2 x = 4\cos x.$$

Заменив $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим $3\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$, откуда следует $\cos x = 1$ и $\cos x = \frac{1}{3}$. Решая эти уравнения, находим

$$x_k = 2\pi k \text{ и } x_n = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n.$$

Значения $x_k = 2\pi k$ не принадлежат к области определения уравнения и корнями уравнения быть не могут (на значения $x = 2\pi k$ область определения уравнения расширилась при переходе от $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ к $\cos x$).

Ответ. $x_n = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Г. Если уравнение (10.101) или приводимое к нему при замене $x$ на $\pi + x$ не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\operatorname{tg} x$.

Пример 5. Решить уравнение $3\sin x - \cos x = \sec x$.

Решение. При замене $x$ на $\pi + x$ все члены уравнения меняют знак, т. е. уравнение не изменяется. Поэтому приводим его к рациональному относительно $\operatorname{tg} x$.

Уравнение определено при $x \neq \frac{\pi}{2}(2n + 1)$. Приведем его к виду (10.101); так как $\cos x \neq 0$, то, умножив обе части уравнения на $\cos x$, получим $3\sin x \cos x - \cos^2 x = 1$. Воспользуемся тождествами

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\operatorname{tg}}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

При этом область определения сужается на $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$, но эти значения не входят в область определения данного уравнения, поэтому потери решений не произойдет.

После замены и упрощений получаем $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$, или $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = 2$, откуда следует $x_k = \frac{\pi}{4} + \pi k$ и $x_n = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, где $k$ и $n$ — любые целые числа.

Ответ.

$$x_k = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$x_n = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,$$

где $k$ и $n$ — любые целые числа.

Частным случаем уравнений, приводимых к рациональным относительно $\operatorname{tg} x$, являются однородные уравнения.

2. Рассмотрим однородные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$.

*Однородным уравнением относительно* $\sin x$ и $\cos x$ называется уравнение, каждый член которого имеет одну и ту же степень относительно $\sin x$ и $\cos x$ (в каждом члене показатели степеней при $\sin x$ и

$\cos x$ складываются). В общем виде однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$ можно записать как

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \cdots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0, \tag{10.102}$$

где $a_n$, $a_{n-1}$, ..., $a_1$, $a_0$ — данные числа, а $n$ — натуральное число.

Уравнение (10.102) делением обеих его частей на $\cos^n x \neq 0$ приводится к целому рациональному относительно $\operatorname{tg} x$:

$$a_n \operatorname{tg}^n x + a_{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x + \cdots + a_1 \operatorname{tg} x + a_0 = 0;$$

при этом область определения уравнения сужается на значения $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$.

Заметим, что уравнение (10.101) всегда может быть сведено к однородному (10.102). Для этого достаточно в уравнении (10.101) все члены четной степени перенести в одну часть, а члены нечетной степени — в другую и обе части уравнения возвести в квадрат. Тогда все члены уравнения станут четной степени. Затем, пользуясь тригонометрической единицей $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k = 1$, показатель $k$ можно подобрать так, чтобы уравнение стало однородным.

Пример 6. Решить уравнение $\cos^3 x - \sin^3 x + 1 = 0$.

Решение. Уравнение определено при всех действительных значениях $x$. Приведем его к однородному. Для этого представим его в виде

$$\sin^3 x - \cos^3 x = 1$$

и возведем обе части уравнения в квадрат; получим

$$\sin^6 x - 2 \sin^3 x \cos^3 x + \cos^6 x = 1.$$

Заменим в последнем уравнении 1 на $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3$, тогда

$$\sin^6 x - 2 \sin^3 x \cos^3 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3,$$

откуда после преобразований получим

$$3 \sin^4 x \cos^2 x + 2 \sin^3 x \cos^3 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x = 0$$

— однородное уравнение 6-й степени. Разделив обе части уравнения на $\cos^6 \neq 0$ при $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, получим $3 \operatorname{tg}^4 x + 2 \operatorname{tg}^3 x + 3 \operatorname{tg}^2 x = 0$, или $\operatorname{tg}^2 x (3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 3) = 0$, откуда следует

$$\operatorname{tg}^2 x = 0 \quad \text{и} \quad 3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

Второе уравнение действительных корней не имеет. Поэтому $\operatorname{tg} x = 0$ и $x_k = \pi k$.

При переходе от $\cos x$ и $\sin x$ к $\operatorname{tg} x$ область определения уравнения сузилась на значения $x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$. Проверим, не будут ли решениями значения $x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1) = \pi n + \frac{\pi}{2}$.

В формуле $x_n = \pi n + \frac{\pi}{2}$ выделим период левой части данного уравнения $2\pi$, т. е. представим эту формулу по разности $2\pi$:

$$x_n = \pi n + \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \begin{cases} \pi(2k) + \frac{\pi}{2}, \\ \pi(2k+1) + \frac{\pi}{2} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k + \frac{\pi}{2}, \\ 2\pi k + \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Теперь достаточно проверить $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$. Так как

$$\sin^3\frac{\pi}{2} - \cos^3\frac{\pi}{2} = 1, \text{ а } \sin^3\frac{3\pi}{2} - \cos^3\frac{3\pi}{2} = -1,$$

то решениями будут значения $x_k = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$.

При решении данного уравнения обе части возводились в квадрат, поэтому могли появиться посторонние решения. Необходимо проверить найденные значения $x_k = \pi k$.

Снова выделим период левой части уравнения и эту формулу представим в виде

$$x_k = \pi k \leftrightarrow \begin{cases} \pi(2m), \\ \pi(2m+1) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2\pi m, \\ 2\pi m + \pi. \end{cases}$$

Проверяем $x = 0$ и $x = \pi$. Так как $\sin^3 0 - \cos^3 0 = -1$, а $\sin^3\pi - \cos^3\pi = 1$, то решениями будут значения $x_m = 2\pi m + \pi$.

Ответ. $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_m = \pi + 2\pi m$, где $k$ и $m$ — любые целые числа.

3. Уравнение $a\sin x + b\cos x = c$. Это уравнение является частным случаем уравнения (10.101), поэтому его можно решать с помощью универсальной тригонометрической подстановки, а также приводить к однородному.

Укажем еще один метод решения этого уравнения — способ введения вспомогательного угла.

С помощью формулы (10.79) представим уравнение в виде

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi_0) = c,$$

где $\varphi_0$ — одно из решений системы (например, наименьшее положительное).

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \end{cases}$$

тогда

$$\sin(x+\varphi_0) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

А. Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$, т. е. $a^2+b^2 \geqslant c^2$, то уравнение имеет решение

$$x+\varphi_0=(-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n,$$

или

$$x_n=(-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\varphi_0+\pi n,$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Б. Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|>1$, т. е. $a^2+b^2<c^2$, то уравнение решений не имеет.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}.$$

Заменим $\frac{\sqrt{3}}{2}$ на $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ и $-\frac{1}{2}$ на $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; тогда исходное уравнение примет вид

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

Решая полученное уравнение, найдем

$$x-\frac{\pi}{6}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$$

или

$$x_n=[1+(-1)^n]\frac{\pi}{6}+\pi n,$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ответ. $x_n=[1+(-1)^n]\frac{\pi}{6}+\pi n$.

### Тригонометрические уравнения с тригонометрическими функциями разных аргументов

Рассмотрим некоторые способы решения рациональных уравнений относительно тригонометрических функций разных аргументов, которые приводятся к виду

$$R(\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin kx, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos mx)=0, \quad (10.103)$$

где $R$ — символ рациональной функции.

1. Уравнения, левая часть которых разлагается на множители, а правая равна нулю.

Если левую часть уравнения (10.103) можно разложить на множители $R_1 \cdot R_2 \ldots R_n=0$, где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — рациональные функции тригонометрических функций, то для решения данного урав-

нения достаточно решить каждое из уравнений $R_1 = 0$; $R_2 = 0$; ...; $R_n = 0$ и объединить общие решения этих уравнений в одно множество, которое и будет решением исходного уравнения. При этом можно получить посторонние решения. Посторонними решениями могут быть те значения неизвестного, при которых хотя бы один из множителей $R_1$, $R_2$, ..., $R_n$ теряет смысл.

Пример 1. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

Решение. Уравнение определено при $-\infty < x < +\infty$. Применяя формулу (10.51) получим

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2,$$

или

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Заменяя сумму косинусов произведением, получим

$$2\cos 3x \cos x + 2\cos 7x \cos x = 0,$$

или

$$\cos x\,(\cos 3x + \cos 7x) = 0,$$

или

$$2\cos x \cos 5x \cos 2x = 0.$$

А. $\cos x = 0$; $x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1) = \pi n + \frac{\pi}{2}$; (1)

Б. $\cos 5x = 0$, $x_n = \frac{\pi}{10}(2n+1) = \frac{\pi}{5}n + \frac{\pi}{10}$; (2)

В. $\cos 2x = 0$, $x_n = \frac{\pi}{4}(2n+1) = \frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}$. (3)

Чтобы выяснить, можно ли объединить полученные множества решений уравнения, представим их по одной разности $\pi$. В формуле (2) разность увеличим в пять раз. Для этого $n$ представим по разности 5 так

$$n \leftrightarrow \begin{cases} 5k, \\ 5k+1, \\ 5k+2, \\ 5k+3, \\ 5k+4; \end{cases}$$

тогда

$$x_n = \frac{\pi}{5}n + \frac{\pi}{10} \leftrightarrow \begin{cases} \pi k + \frac{\pi}{10}, \\ \pi k + \frac{3\pi}{10}, \\ \pi k + \frac{\pi}{2}, \\ \pi k + \frac{7\pi}{10}, \\ \pi k + \frac{9\pi}{10}. \end{cases}$$

Отсюда видно, что множество (1) является подмножеством множества (2).

В формуле (3) разность увеличим в два раза. Для этого представим $n$ по разности 2 так:

$$n \leftrightarrow \begin{cases} 2k, \\ 2k+1; \end{cases}$$

тогда формулу (3) можно записать в виде

$$x_n = \frac{\pi}{2} n + \frac{\pi}{4} \leftrightarrow \begin{cases} \pi k + \frac{\pi}{4}, \\ \pi k + \frac{3\pi}{4}, \end{cases}$$

откуда следует, что множество (3) общих элементов с множеством (2) не имеет.

Ответ. $x_n = \frac{\pi}{10}(2n+1)$, $x_k = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, где $n$ и $k$ — любые целые числа.

2. Решение уравнений способом сравнения аргументов одноименных функций.

Выясним условия, при которых две одноименные функции двух аргументов принимают равные значения.

А. $\sin\alpha = \sin\beta$, если $\alpha - \beta = 2\pi n$ или $\alpha + \beta = \pi(2n+1)$.

Действительно, $\sin\alpha - \sin\beta = 0$, или $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$, откуда следует $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$ и $\frac{\alpha-\beta}{2} = \pi n$, $\alpha - \beta = 2\pi n$;

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0 \text{ и } \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad \alpha+\beta = \pi(2n+1).$$

Таким образом,

$$\sin\alpha = \sin\beta, \text{ если } \alpha - \beta = 2\pi n \text{ или } \alpha + \beta = \pi(2n+1). \quad (10.104)$$

$$\text{Б. } \cos\alpha = \cos\beta, \text{ если } \alpha \pm \beta = 2\pi n. \quad (10.105)$$

$$\text{В. } \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta, \text{ если } \alpha - \beta = \pi n \left(\alpha,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right). \quad (10.106)$$

$$\text{Г. } \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta, \text{ если } \alpha - \beta = \pi n \quad (\alpha,\ \beta \neq \pi k). \quad (10.107)$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin 13x + \cos 13x = \sqrt{2}\sin 17x$.

Решение. Применяя к левой части уравнения формулу (10.80), получим

$$\sqrt{2}\sin\left(13x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin 17x,$$

или

$$\sin\left(13x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 17x,$$

откуда по (10.104) находим

$$17x - \left(13x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi n, \text{ или } x_n = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2};$$

$$17x + \left(13x + \frac{\pi}{4}\right) = \pi + 2\pi k, \text{ или } x_k = \frac{\pi}{40} + \frac{\pi k}{15}.$$

Ответ. $x_n = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$ и $x_k = \frac{\pi}{40} + \frac{\pi k}{15}$, где $n$ и $k$ — любые целые числа.

Пример 3. Решить уравнение $\sin 3x \sin 2x = \sin 11x \sin 10x$.

Решение. По формуле (10.66) имеем

$$\frac{1}{2}[\cos(3x - 2x) - \cos(3x + 2x)] = \frac{1}{2}[\cos(11x - 10x) - \cos(11x + 10x)],$$

откуда следует $\cos 21x = \cos 5x$.

Решениями этого уравнения по (10.105) являются те значения $x_n$ для которых $21x - 5x = 2\pi n$, или $x_n = \frac{\pi n}{8}$ и $21x + 5x = 2\pi k$, или $x_k = \frac{\pi k}{13}$.

Ответ. $x_n = \frac{\pi n}{8}$, $x_k = \frac{\pi k}{13}$, где $n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 4. Решить уравнение $\operatorname{tg}(2x + 1)\operatorname{ctg}(x + 1) = 1$.

Решение. Уравнение определено при

$$x \neq \frac{\pi}{4}(2n + 1) - \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad x \neq \pi n - 1.$$

Разделив обе части уравнения на $\operatorname{ctg}(x + 1) \neq 0$ (значения $x$, при которых $\operatorname{ctg}(x + 1) = 0$ не могут быть решениями), получим

$$\operatorname{tg}(2x + 1) = \operatorname{tg}(x + 1),$$

откуда по (10.106) имеем

$$(2x + 1) - (x + 1) = \pi n, \text{ или } x_n = \pi n.$$

Ответ. $x_n = \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Примечание. Методом сравнения аргументов решаются уравнения

$$\sin f(x) = \sin \varphi(x); \quad \cos f(x) = \cos \varphi(x); \quad \operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} \varphi(x)$$
$$\text{и} \quad \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} \varphi(x),$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — заданные функции.

3. Рассмотрим несколько примеров на применение некоторых других способов решения тригонометрических уравнений с тригонометрическими функциями разных аргументов.

Пример 5. Решить уравнение $\cos 6x - \cos 4x + 4\cos 3x + 4 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$1 + \cos 6x + 1 - \cos 4x + 4\cos 3x + 2 = 0$$

и, применив формулы (10.50) и (10.51), получим

$$2\cos^2 3x + 2\sin^2 2x + 4\cos 3x + 2 = 0,$$

или

$$\cos^2 3x + \sin^2 2x + 2\cos 3x + 1 = 0,$$

или

$$(\cos 3x + 1)^2 + (\sin 2x)^2 = 0.$$

Так как сумма квадратов действительных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из чисел равно нулю, то решение уравнения сводится к решению системы

$$\begin{cases} \cos 3x + 1 = 0, \\ \sin 2x = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos 3x = -1, \\ \sin 2x = 0, \end{cases}$$

из которой находим $\begin{cases} x_n = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n, \\ x_k = \frac{\pi k}{2}. \end{cases}$

Чтобы найти решения последней системы, полученные формулы значений $x$ представим по разности $2\pi$. Для этого числа $n$ представим по разности 3, а числа $k$ по разности 4, т. е.

$$n \leftrightarrow \begin{cases} 3m, \\ 3m+1, \\ 3m+2, \end{cases} \quad k \leftrightarrow \begin{cases} 4m, \\ 4m+1, \\ 4m+2, \\ 4m+3, \end{cases}$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Тогда

$$x_n = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} n \leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi m, \\ \pi + 2\pi m, \\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi m, \end{cases} \quad x_k = \frac{\pi}{2} k \leftrightarrow \begin{cases} 2\pi m, \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \\ \pi + 2\pi m, \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, \end{cases}$$

откуда имеем $x_m = \pi + 2\pi m$ — решения уравнения.

Ответ. $x_m = \pi(2m+1)$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Пример 6. Решить уравнение $2\sin 6x + \cos 8x - \operatorname{ctg}^2 2x = 3$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2\sin 6x + \cos 8x = 3 + \operatorname{ctg}^2 2x;$$

так как $|2\sin 6x| \leqslant 2$, а $|\cos 8x| \leqslant 1$, то левая часть уравнения

$$2\sin 6x + \cos 8x \leqslant 3;$$

правая часть уравнения

$$3 + \operatorname{ctg}^2 2x \geqslant 3.$$

Поэтому решениями уравнения могут быть только те значения $x$, при которых левая и правая части принимают значение 3, т. е. решение уравнения сводится к решению системы

$$\begin{cases} \sin 6x = 1, \\ \cos 8x = 1, \\ \operatorname{ctg} 2x = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 6x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 8x = 2\pi k, \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_n = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}, \\ x_k = \dfrac{\pi k}{4}, \\ x_m = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}. \end{cases}$$

Приведем множества, определяемые полученными формулами, к множествам членов арифметических прогрессий с одной и той же разностью $d = \pi$. Для этого представим

$$n \leftrightarrow \begin{cases} 3p, \\ 3p+1, \\ 3p+2; \end{cases} \quad k \leftrightarrow \begin{cases} 4p, \\ 4p+1, \\ 4p+2, \\ 4p+3; \end{cases} \quad m \leftrightarrow \begin{cases} 2p, \\ 2p+1, \end{cases} \text{ где } p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Получаем

$$x_n = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{12} + \pi p, \\ \dfrac{5\pi}{12} + \pi p, \\ \dfrac{3\pi}{4} + \pi p, \end{cases}$$

$$x_k = \frac{\pi}{4} k \leftrightarrow \begin{cases} \pi p, \\ \dfrac{\pi}{4} + \pi p, \\ \dfrac{\pi}{2} + \pi p, \\ \dfrac{3\pi}{4} + \pi p, \end{cases}$$

$$x_m = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + \pi p, \\ \dfrac{3\pi}{4} + \pi p, \end{cases}$$

откуда находим решение данного уравнения

$$x_p = \frac{3\pi}{4} + \pi p, \text{ где } p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ответ. $x_n = \dfrac{3}{4}\pi + \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 7. Решить уравнение

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x + 1.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 2 \sin x \cos x + 1,$$

или

$$\sin^3 x + \cos^3 x - 2 \sin x \cos x - 1 = 0.$$

Левая часть уравнения представляет собой многочлен, симметричный относительно $\sin x$ и $\cos x$. Легко показать, что его можно привести к многочлену относительно $u$ или $v$, где

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = u, \\ \sin x \cos x = v. \end{cases} \tag{1}$$

Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то величины $u$ и $v$ можно представить одну через другую. Возведя обе части равенства (1) в квадрат, получим $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = u^2$, откуда следует $2 \sin x \cos x = u^2 - 1$. Таким образом, если $\sin x + \cos x = u$, то $v = \sin x \cos x = \frac{u^2 - 1}{2}$. Тогда $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = u\left(1 - \frac{u^2 - 1}{2}\right) = \frac{u(3 - u^2)}{2}$ и относительно $u$ уравнение принимает вид

$$\frac{u(3 - u^2)}{2} - (u^2 - 1) - 1 = 0, \text{ или } u^3 + 2u^2 - 3u = 0,$$

откуда следует $u_1 = 0$, $u_2 = -3$, $u_3 = 1$.
Данное уравнение сводится к следующим:

а) $\sin x + \cos x = 0$, откуда $x_n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$;

б) $\sin x + \cos x = -3$, решений не имеет;

в) $\sin x + \cos x = 1$, откуда $x_k = \left[(-1)^k \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right] + \pi k$.

Ответ. $x_n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ и $x_k = [(-1)^k - 1]\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $n$ и $k$ — любые целые числа.

Заметим, что уравнение примера 7 можно решить разложением левой части на множители.

Пример 8. Решить уравнение $\operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x) = \operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)$.

Решение. Уравнение определено при $x \neq \pi n$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2n + 1)$, $\pi \operatorname{ctg} x \neq \pi n$ и $\pi \operatorname{tg} x \neq \frac{\pi}{2}(2n + 1)$, или $x \neq \frac{\pi}{2} n$, $\operatorname{ctg} x \neq n$, $\operatorname{tg} x \neq n + \frac{1}{2}$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Представим уравнение в виде

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right) = \operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x).$$

По (10.106) имеем $\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x = \pi \operatorname{tg} x + \pi k$, или $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2} - k$, откуда следует

$$\operatorname{tg}^2 x + \left(k - \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg} x + 1 = 0, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (1)$$

Это уравнение в области определения данного уравнения эквивалентно ему.

Последнее уравнение имеет действительные корни, если $\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \geqslant 0$ (дискриминант не отрицателен). Решая неравенство в целых числах, найдем $k \leqslant -1$, $k \geqslant 2$, т. е. $k = -2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \ldots$ Теперь выясним, нет ли среди корней уравнения $\operatorname{tg}^2 x + \left(k - \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg} x + 1 = 0$ относительно $\operatorname{tg} x$ таких, при которых $\operatorname{tg} x = n + \frac{1}{2}$ и $\operatorname{ctg} x = n$, или $\operatorname{tg} x = \frac{1}{n}$. Для этого подставим $\operatorname{tg} x = n + \frac{1}{2}$ в уравнение (1):

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

и решим его в целых числах относительно $n$ и $k$. После преобразований получим $(n + k)(2n + 1) = -2$.

Это уравнение имеет целые решения только при

$$\begin{cases} n + k = -2, \\ 2n + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n + k = 2, \\ 2n + 1 = -1, \end{cases}$$

так как $n + k$ и $2n + 1$ по условию — целые числа, а число $-2$ можно представить в виде произведения целых чисел только как $(-2) \cdot 1$ или $2 \cdot (-1)$.

Из систем находим

$$\begin{cases} n = 0, \\ k = -2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} n = -1, \\ k = 3. \end{cases}$$

Теперь подставим в уравнение (1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{n}$ $(n \neq 0)$; получим

$$\frac{1}{n^2} + \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + 1 = 0,$$

или

$$n(2n + 2k - 1) = -2.$$

Аналогично предыдущему получаем

$$\begin{cases} n = -2, \\ 2n + 2k - 1 = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n = 2, \\ 2n + 2k - 1 = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = -2, \\ k = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} n = 2, \\ k = -2. \end{cases}$$

Таким образом, при $k=-2$ и $k=3$ уравнение (1) имеет корень, не принадлежащий к области определения данного уравнения. Так как квадратное уравнение имеет два корня, то таковым может оказаться один из них. Поэтому найдем корни уравнения (1) при $k=-2$ и $k=3$:

при $k=-2$ $\operatorname{tg}^2 x-\frac{5}{2}\operatorname{tg} x+1=0$, $\operatorname{tg} x=2$ $\left(\text{значение } \operatorname{tg} x=\frac{1}{2}\right.$ не пригодно к решению$\Big)$; при $k=3$; $\operatorname{tg}^2 x+\frac{5}{2}\operatorname{tg} x+1=0$, $\operatorname{tg} x=$ $=-2$ $\left(\text{значение } \operatorname{tg} x=-\frac{1}{2}\right.$ не пригодно к решению$\Big)$. Итак, при $k=-2$ и $k=3$ получаем $\operatorname{tg} x=\pm 2$, откуда следует

$$x_m=\pm\operatorname{arctg} 2+\pi m$$

При $k=-3,\ \pm 4,\ \pm 5,\ \pm 6,\ \ldots$ из уравнения (1) находим

$$\operatorname{tg} x=\frac{1-2k\pm\sqrt{4k^2-4k-15}}{4},$$

откуда следует

$$x_p=\operatorname{arctg}\frac{1-2k\pm\sqrt{4k^2-4k-15}}{4}+\pi p.$$

Ответ.

$$x_m=\pm\operatorname{arctg} 2+\pi m,\quad x_p=\operatorname{arctg}\frac{1-2k\pm\sqrt{4k^2-4k-15}}{4}+\pi p,$$

где $m$ и $p$ — любые целые числа, а $k=-3,\ \pm 4,\ \pm 5,\ \ldots$

## § 18. Решение систем тригонометрических уравнений

При решении систем тригонометрических уравнений пользуются способом подстановки или сводят решение системы тригонометрических уравнений к решению системы алгебраических уравнений. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим $y=\frac{\pi}{2}-x$ и подставляем во второе уравнение; получаем

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{5}{2},$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{2}\operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = 2 \text{ и } \operatorname{tg} x = \frac{1}{2},$$

откуда следует $x_n = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$ и $x_k = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$. Затем находим

$$y_n = \frac{\pi}{2} - x_n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2 - \pi n, \quad y_k = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi k,$$

или

$$y_n = \operatorname{arcctg} 2 - \pi n \text{ и } y_k = \operatorname{arcctg}\frac{1}{2} - \pi k,$$

т. е.

$$\begin{cases} x_n = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \\ y_n = \operatorname{arcctg} 2 - \pi n, \end{cases} \quad \begin{cases} x_k = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k, \\ y_k = \operatorname{arcctg}\frac{1}{2} - \pi k. \end{cases}$$

Учитывая, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arcctg} 2$ и $\operatorname{arcctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 2$, получаем ответ:

$$\begin{cases} x_n = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \\ y_n = \operatorname{arcctg} 2 - \pi n, \end{cases} \quad \begin{cases} x_k = \operatorname{arcctg} 2 + \pi k, \\ y_k = \operatorname{arctg} 2 - \pi n, \end{cases}$$

где $n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sqrt{3}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем левую часть первого уравнения системы в произведение

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{3},$$

или, с учетом $\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{6}$, в

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{3},$$

откуда следует

$$\cos\frac{x-y}{2} = 1 \text{ и } x - y = 4\pi n.$$

Затем, решая систему

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}, \\ x-y=4\pi n, \end{cases}$$

находим

$$\begin{cases} x_n=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, \\ y_n=\dfrac{\pi}{6}-2\pi n, \text{ где } n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x_n=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, \\ y_n=\dfrac{\pi}{6}-2\pi n, \end{cases}$

где $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы составим производную пропорцию

$$\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}=\frac{1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}-1-\sqrt{2}}, \text{ или } \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как $\sin(x+y)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то из последнего уравнения имеем $\sin(x-y)=-1$, откуда следует $x-y=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$. Решая систему

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ x-y=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \end{cases}$$

находим

$$\begin{cases} x_n=-\dfrac{\pi}{8}+\pi n, \\ y_n=\dfrac{3\pi}{8}-\pi n, \end{cases} \text{ где } n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Ответ. $\begin{cases} x_n=-\dfrac{\pi}{8}+\pi n, \\ y_n=\dfrac{3\pi}{8}-\pi n, \end{cases}$

где $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

## § 19. Тригонометрические неравенства

Тригонометрическим неравенством называется неравенство, в котором неизвестное входит только под знак тригонометрических функций непосредственно или в виде линейной функции неизвестного, причем над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические действия.

**Простейшие тригонометрические неравенства**

$$\sin x \lessgtr m,\ \cos x \lessgtr m,$$

$$\operatorname{tg} x \lessgtr m,\ \operatorname{ctg} x \lessgtr m$$

решаются следующим образом.

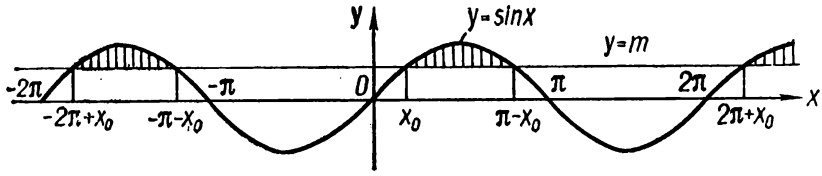



Рис. 156.

1. Неравенство $\sin x > m$. Если $m < -1$, то решением неравенства будет любое действительное число. Если $-1 \leqslant m < 1$, то решениями неравенства будут

$$2\pi n + \arcsin m < x < \pi(2n+1) - \arcsin m. \qquad (10.108)$$

На рис. 156 штриховкой отмечены значения $x$, удовлетворяющие неравенству $\sin x > m$ при $-1 \leqslant m < 1$.

Если $m \geqslant 1$, то неравенство решений не имеет.

Неравенство $\sin x < m$.

Если $m \leqslant -1$, то неравенство решений не имеет.

Если $-1 < m \leqslant 1$, то решениями неравенства будут

$$\pi(2n+1) - \arcsin m < x < \arcsin m + 2\pi(n+1). \qquad (10.109)$$

На рис. 156 значения $x$, удовлетворяющие неравенству $\sin x < m$, не заштрихованы.

Если $m > 1$, то неравенство верно при всех действительных значениях $x$.

3. Неравенство $\cos x > m$.

Если $m < -1$, то неравенство верно при всех действительных значениях $x$.

Если $-1 \leqslant m < 1$, то решениями неравенства будут

$$-\arccos m + 2\pi n < x < \arccos m + 2\pi n. \qquad (10.110)$$

Если $m \geqslant 1$, то неравенство решений не имеет.

4. Неравенство $\cos x < m$.

Если $m \leqslant -1$, то неравенство решений не имеет.

Если $-1 < m \leqslant 1$, то решениями неравенства будут

$$\arccos m + 2\pi n < x < 2\pi (n + 1) - \arccos m. \qquad (10.111)$$

Если $m > 1$, то неравенство верно при всех значениях $x$. Постройте рисунок для неравенства $\cos \gtrless m$, аналогичный рис. 156.

5. Неравенство $\operatorname{tg} x > m$.

Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях $m$, причем

$$\operatorname{arctg} m + \pi n < x < \frac{\pi}{2} (2n + 1). \qquad (10.112)$$

6. Неравенство $\operatorname{tg} x < m$.

Это неравенство имеет решения при любых действительных $m$, причем

$$\frac{\pi}{2} (2n - 1) < x < \operatorname{arctg} m + \pi n. \qquad (10.113)$$

7. Неравенство $\operatorname{ctg} x > m$ при всех действительных значениях $m$ имеет решения

$$\pi n < x < \operatorname{arcctg} m + \pi n. \qquad (10.114)$$

8. Неравенство $\operatorname{ctg} x < m$ при всех действительных значениях $m$ имеет решения

$$\operatorname{arcctg} m + \pi n < x < \pi (n + 1). \qquad (10.115)$$

В системах неравенств (10.108)—(10.115) $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В случае нестрогих неравенств к решениям присоединяются соответствующие концы интервалов.

Неравенства $\sin (ax + b) \gtrless m$, $\cos (ax + b) \gtrless m$, $\operatorname{tg} (ax + b) \gtrless m$, $\operatorname{ctg} (ax + b) \gtrless m$ приводятся к простейшим заменой $ax + b = t$.

**Решение тригонометрических неравенств.** Будем рассматривать неравенства вида

$$R (\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) \gtrless m,$$

где $R$ — символ рациональной функции.

Если функция $R (\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$ периодическая, то достаточно найти решения неравенства на отрезке числовой оси, равном по длине периоду этой функции, а затем, пользуясь периодичностью, записать решение неравенства на всей числовой оси.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\sin x - 1} > 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$(2\sin^2 x + \sin x - 1)(\sin x - 1) > 0.$$

Разлагая левую часть этого неравенства на множители, получим

$$2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)(\sin x+1)(\sin x-1)>0.$$

Учитывая, что $|\sin x|\leqslant 1$, построим змейку (см. § 3, гл. 6) на отрезке $[-1, +1]$ (рис. 157) и установим знак левой части неравенства на одном из промежутков отрезка, подставив значение $x$, например $x=0$. Следовательно,

$$-1<\sin x<\frac{1}{2},$$

откуда находим

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n, \text{ где } n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ответ. $\frac{\pi}{2}(4n-1)<x<\frac{\pi}{6}(12n+1)$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

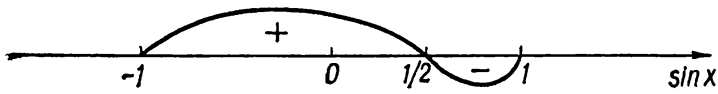



Рис. 157.

Пример 2. Решить неравенство $\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x>\frac{5}{8}$.

Решение. По формулам (10.52) и (10.53) имеем

$$\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}\cos 3x-\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\sin 3x>\frac{5}{8},$$

$$\cos^2 3x+\sin^2 3x+3(\cos x\cos 3x-\sin x\sin 3x)>\frac{5}{2},$$

$$\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x>\frac{1}{2},$$

откуда следует $\cos 4x>\frac{1}{2}$.

По формуле (10.110) имеем

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi n<4x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,$$

или

$$-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, \quad \text{где } n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ответ. $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 3. Решить неравенство $2\cos 2x + \sin 2x \geqslant \operatorname{tg} x$.

Решение. Данное неравенство определено при

$$x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1).$$

По формулам (10.75) и (10.76) имеем

$$2\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \geqslant \operatorname{tg} x.$$

Обозначим $\operatorname{tg} x = t$; тогда

$$2\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \geqslant t;$$

умножив обе части неравенства на $1+t^2 > 0$, получим $2 - 2t^2 + 2t \geqslant t^3 + t$, или $t^3 + 2t^2 - t - 2 \leqslant 0$.

Разложим левую часть неравенства на множители $(t+2)(t-1) \times (t+1) \leqslant 0$.

Решив полученное неравенство, найдем

$$t \leqslant -2 \text{ и } -1 \leqslant t \leqslant 1, \text{ или } \operatorname{tg} x \leqslant -2 \text{ и } -1 \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant 1,$$

откуда по (10.112) и (10.113) получим

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant -\operatorname{arctg} 2 + \pi n \text{ и } -\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

где $n$ и $k$ — любые целые числа.

Ответ. $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, или $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi k$,

где $n$ и $k$ — любые целые числа.

**Доказательство тригонометрических неравенств** рассмотрим на нескольких примерах.

Пример 4. Доказать, что если $0 < \alpha < \pi$, то $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg}\alpha$.

Доказательство. Найдем разность

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - (1 + \operatorname{ctg}\alpha) = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \left(1 + \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + 1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - 1\right)^2}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} \geqslant 0,$$

так как $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{равенство достигается при } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$.

Так как $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-(1+\operatorname{ctg}\alpha)\geqslant 0$ при всех $\alpha$ из $0<\alpha<\pi$, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\geqslant 1+\operatorname{ctg}\alpha.$$

Пример 5. Доказать, что если $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — острые углы треугольника, то $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma>2$.

Доказательство. Воспользуемся тождеством

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

(см. пример 2 из § 10 настоящей главы). Так как углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — острые, то $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma>0$ и $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma>2$.

Пример 6. Доказать, что $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\leqslant\cos^2\alpha\cos^2\beta$.

Доказательство. Найдем разность

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\alpha\cos^2\beta=-\sin^2\alpha\sin^2\beta\leqslant 0,$$

причем равенство будет при $\sin\alpha=0$ или $\sin\beta=0$, т. е. при $\alpha=\pi n$ и $\beta=\pi k$. Поэтому $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\leqslant\cos^2\alpha\cos^2\beta$.

## § 20. Графическое решение уравнений, неравенств и их систем, содержащих тригонометрические функции

Общие сведения о графическом решении уравнений, неравенств и их систем приведены в § 8 гл. 7. Рассмотрим примеры графического решения уравнений, неравенств и их систем, в которые входят тригонометрические функции.

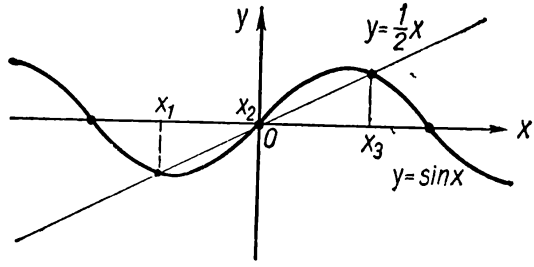



Рис. 158.

Пример 1. Найти число действительных корней уравнения $x-2\sin x=0$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{1}{2}x=\sin x$$

и построим графики функций $y=\frac{1}{2}x$ и $y=\sin x$ (рис. 158). По рисунку видим, что данное уравнение имеет три действительных корня.

Ответ. Уравнение имеет три действительных корня.

Пример 2. Найти действительные корни уравнения

$$x^2 - \cos x = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$x^2 = \cos x$$

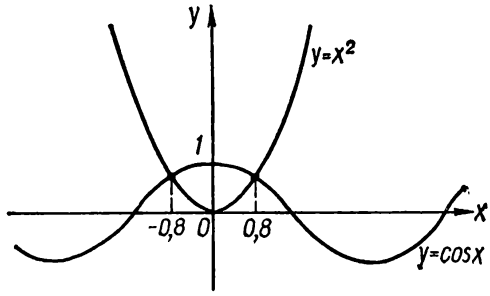



Рис. 159.

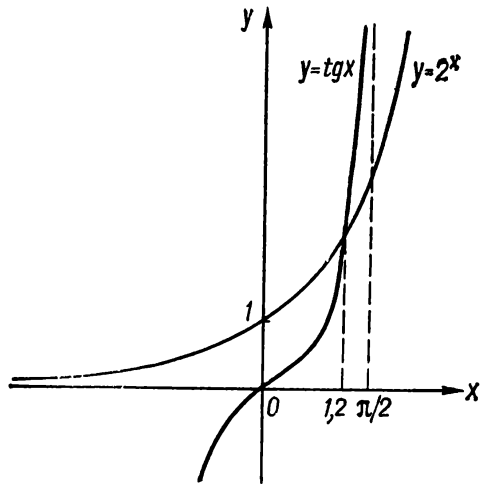



Рис. 160.

и построим графики функций $y = x^2$ и $y = \cos x$ (рис. 159). По рисунку находим $x_1 \approx -0{,}8$ и $x_2 \approx 0{,}8$.

Ответ. $x_1 \approx -0{,}8$ и $x_2 \approx 0{,}8$.

Пример 3. Найти наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = 2^x$.

Решение. Строим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ (достаточно построить только в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$) и $y = 2^x$ (рис. 160). По рисунку находим $x \approx 1{,}2$.

Ответ. $x \approx 1{,}2$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ \cos x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Построим графики $x^2 + y^2 = 4$ и $y = \cos x + 1$ (рис. 161). По рисунку находим

$$\begin{cases} x_1 \approx -1{,}9, \\ y_1 \approx 0{,}3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \approx 0, \\ y_2 \approx 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \approx 1{,}9, \\ y_3 \approx 0{,}3. \end{cases}$$

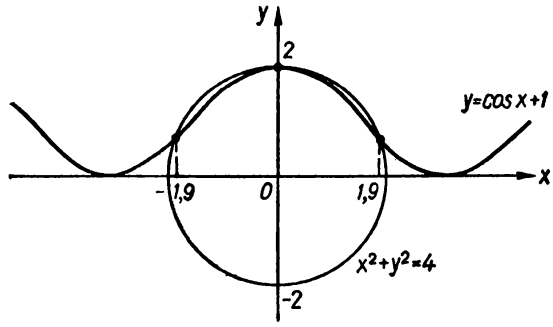



Рис. 161.

Подстановкой в систему убеждаемся, что $x_2 = 0$, $y_2 = 2$ есть точное решение.

Ответ. $\begin{cases} x_1 \approx -1{,}9, \\ y_1 \approx 0{,}3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \approx 1{,}9, \\ y_3 \approx 0{,}3. \end{cases}$

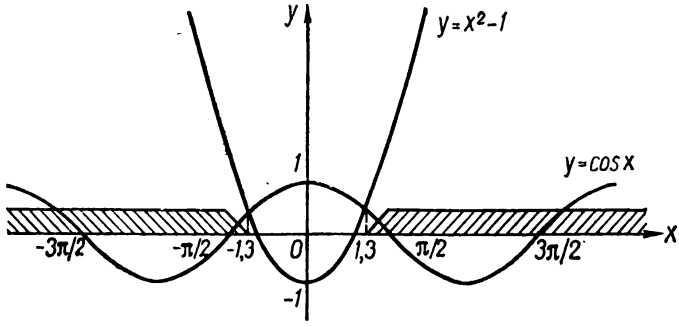



Рис. 162.

Пример 5. Решить неравенство

$$x^2 - \cos x - 1 > 0.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$x^2 - 1 > \cos x.$$

Строим графики функций $y = x^2 - 1$ и $y = \cos x$ (рис. 162). По рисунку находим $-\infty < x \leqslant -1{,}3$ или $1{,}3 \leqslant x < +\infty$.

Ответ. $-\infty < x \leqslant -1{,}3$ или $1{,}3 \leqslant x < +\infty$.

Пример 6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ \sin 2x > 0. \end{cases}$$

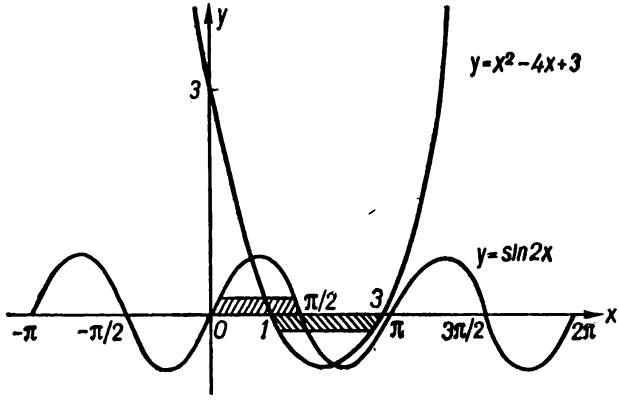



Рис. 163.

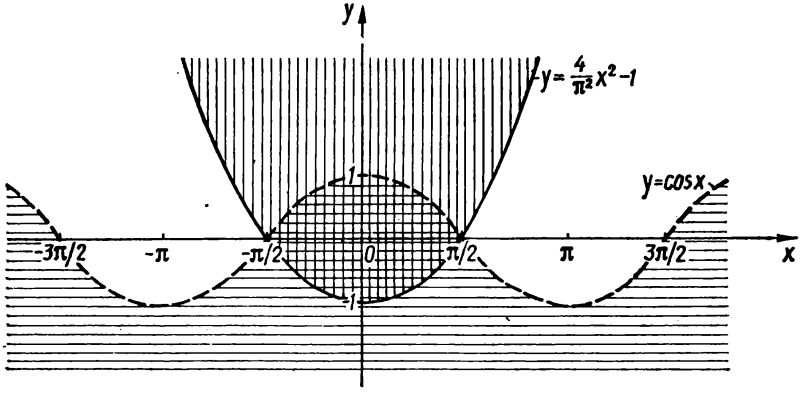



Рис. 164.

Решение. Строим графики функций $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = \sin 2x$ (рис. 163). По рисунку находим $1 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ответ. $1 < x < \frac{\pi}{2}$.

Пример 7. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} y < \cos x, \\ y \geqslant \frac{4}{\pi^2} x^2 - 1. \end{cases}$$

Решение. Строим графики функций $y=\cos x$ и $y=\frac{4}{\pi^2}x^2-1$ (рис. 164). Решениями данной системы есть точки той области плоскости $xOy$, которая лежит под косинусоидой $y=\cos x$ и над параболой $y=\frac{4}{\pi^2}x^2-1$, включая точки самой параболы. На рис. 164 область, точки которой есть решения системы, заштрихована дважды.

Аналитически решения данной системы можно записать в виде

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \\ \frac{4}{\pi^2}x^2-1\leqslant y<\cos x. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \\ \frac{4}{\pi^2}x^2-1\leqslant y<\cos x. \end{cases}$

### Упражнения

Найти область определения каждого из выражений и упростить их:

416. $3\sin^4\alpha-2\sin^6\alpha+3\cos^4\alpha-2\cos^6\alpha$.

417. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

418. $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta$.

419. $\frac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

420. $\frac{\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\left[\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin(\pi+\alpha)\right]}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\left[\cos(\alpha+2\pi)+\sin(\alpha-2\pi)\right]}$.

421. $\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

422. $(\sin\alpha+\operatorname{cosec}\alpha)^2+(\cos\alpha+\sec\alpha)^2-\sec^2\alpha-\operatorname{cosec}^2\alpha$.

423. $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

424. $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

425. $\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

426. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$.

Найти точные значения выражений:

427. $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}$.

428. $\operatorname{ctg}30^\circ\operatorname{ctg}40^\circ-\sec 20^\circ$.

429. $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ$.

430. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

431. $\operatorname{cosec}10^\circ-\sqrt{3}\sec 10^\circ$.

432. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{7}$.

433. $\operatorname{tg}^2 36^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 72^\circ$.

434. $\cos 27^\circ-\cos 63^\circ$.

435. $\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}-\cos\frac{7\pi}{15}-\cos\frac{\pi}{15}$.

436. $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$.

437. $\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{tg}24^\circ+\operatorname{tg}24^\circ\operatorname{tg}54^\circ+\operatorname{tg}54^\circ\operatorname{tg}12^\circ$.

438. $\cos 6^\circ\sin 12^\circ\sin 24^\circ\sin 48^\circ$.

Доказать тождества и найти их область определения:

439. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

440. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$.

441. $\dfrac{\sin^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha-4+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$.

442. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha-\cos\alpha=-2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

443. $\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)=$
$=\sin\alpha$.

444. $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{3}{2}$.

445. $1+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+2\cos 6\alpha=\dfrac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}$.

446. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\sin\alpha$.

447. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}3\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{ctg}4\alpha$.

448. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

449. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$.

450. $4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos 3\alpha$.

451. $\operatorname{tg}6\alpha-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}6\alpha\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}2\alpha$.

452. Доказать, что $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, если $\alpha+\beta=\gamma$.

453. Доказать, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

454. Доказать, что $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

455. Доказать, что $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=1$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

456. Найти область определения функций:

а) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}4x}{1-\sin 2x}$;

б) $y=\sqrt{1-\operatorname{tg}x}$;

в) $y=\operatorname{ctg}2x+\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$.

457. Найти основные периоды функций:

а) $y=\cos(2\pi x+3)$;

б) $y=2\sin 2x+3\cos 3x-1$;

в) $y=\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{5x}{2}-3\sin 4x+4$;

г) $y=\sin^2 x+\cos^4 x$.

458. Исследовать функции на четность и нечетность:

а) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}2x+\sin 2x}$;

б) $y=x\cos x$;

в) $y=\sin x+\cos x$.

459. Найти нули функции (точки пересечения графика функции с осью абсцисс):

а) $y=\sqrt{\cos 2x}$;

б) $y=\operatorname{tg}\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$.

460. Найти интервалы знакопостоянства функций:

а) $y=\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y=\sin(1-3x)$.

461. Найти интервалы монотонности функций:

а) $y=\sin(4x-3)$;

б) $y=\lg\operatorname{tg}4x$.

462. Найти наибольшее и наименьшее значение функций:

а) $y = 5\sin^2 x - 2\cos^2 x$;

б) $y = 3\sin x + 4\cos x$.

463. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графиков функций:

а) $y = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y = \operatorname{tg}(6x + 1)$.

464. Построить графики функций:

а) $y = \cos\left(\frac{x}{3} - \pi\right)$;

б) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$;

г) $y = \operatorname{ctg}(2 - 3x)$;

д) $y = |\sin x| + |\cos x|$;

е) $y = \operatorname{tg}|x|$;

ж) $y = |\operatorname{ctg} x|$;

з) $y = \operatorname{ctg}(-x)$.

Решить тригонометрические уравнения:

465. $\sec x = 2\sin x + 4\cos x$.

466. $\sin^4 x + \cos^4 x + 3\sin x\cos x = 2$.

467. $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$.

468. $8\cos^2 x\frac{x}{2} + \sin x - 4 = 0$.

469. $\sin x - 5\cos x = 5$.

470. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$.

471. $\sin x \operatorname{tg} 2x \sec 3x = 0$.

472. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

473. $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = 1$.

474. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{8}$.

475. $\sin^6 2x + \cos^6 2x = 1$.

476. $\cos x\cos 3x = \cos 5x\cos 7x$.

477. $2\sin x\cos 2x + \sin 2x\cos x = \sin 4x\cos x$.

478. $1 + 0{,}2\sin 2x = \sin x + \cos x$.

479. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sin x\left(1 + \operatorname{tg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

480. $\sin 2x + \cos 8x = 2$.

481. $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x} = \operatorname{tg} 5x$.

482. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x$.

483. $\cos x = \cos^2 \frac{3x}{4}$.

484. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$.

485. $(\sin 2x + 3) \sin^4 x - (\sin 2x + 3) \sin^2 x + 1 = 0$.

486. $(\sin x - 5) \cos^4 x - 4 (3 \sin x - 5) \cos^2 x + 16 (\sin x - 1) = 0$.

487. $\sin \frac{3}{4} x + \cos \frac{2}{3} x = 2$.

488. $\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \frac{1}{8}$.

489. $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = 4 \cos^3 4x$.

490. $\sin^3 x = 2\sqrt{2} \cos^2 x$.

491. $\operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 5x - 2 \operatorname{tg} 3x$.

492. Равносильны ли уравнения

$$(\sqrt{3} + 2 \cos x) \operatorname{tg} x = 0$$

и

$$\frac{\sqrt{3} + 2 \cos x}{\operatorname{ctg} x} = 0?$$

493. Показать, что уравнение $\sin x + \sin 2x = 2$ не имеет решений.

Решить неравенства:

494. $|\sin x| > \frac{1}{2}$.

495. $\sin x + \sin 3x > \sin 2x + \sin 4x$.

496. $\sin 5x \cos 2x > \sin 4x \cos 3x$.

497. $3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x < \frac{1}{2}$.

498. $\sin^6 x + \cos^6 x \geqslant \frac{5}{8}$.

499. $|\sin x| \cos x > \frac{1}{4}$.

500. Доказать, что

$$(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha) > 0 \left(\alpha \neq \frac{\pi}{4}(2n+1), \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1)\right).$$

501. Доказать, что $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < 1$, если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы треугольника и $\gamma > 90°$.

502. Доказать, что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leqslant \frac{3}{2}$, если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы треугольника.

503. Дано, что $\sin^n x + \cos^n x \equiv 1$. Доказать, что $n = 2$.

504. Показать, что знаки $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ совпадают при любом значении $\alpha \neq k\pi$ ($k$ — целое).

Решить графически уравнения:

505. $x^2 + \sin 2x - 2 = 0$.

506. $\cos(x - 1) - 3x + 2 = 0$.

507. $2^{|x|} - \cos x - 3 = 0$.

508. Найти графически наименьший корень уравнения $4x^3 - \operatorname{ctg} x - 1 = 0$.

509. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2^y - 4 = 0, \\ x + \sin\dfrac{\pi x}{2} = 1. \end{cases}$$

510. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant \pi^2, \\ y > \sin x. \end{cases}$$

# Глава 11

# ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

## § 1. Понятие обратной тригонометрической функции

Начальные сведения о понятии функции и обратной функции даны в гл. 7.

Напомним, что если каждому значению $x$ из заданного множества $X$ по некоторому правилу $f$ поставлено в соответствие вполне определенное единственное значение $y$ из множества $Y$, то говорят, что на множестве $X$ задана однозначная функция

$$x \xrightarrow{f} y = f(x). \tag{11.1}$$

Множество $X$ называется *областью определения* или *областью существования функции*, а множество $Y$, содержащее только те значения величины $y$, которые соответствуют хотя бы одному значению $x \in X$, называется *областью значений* или *областью изменения функции* (11.1).

Функция (11.1) является однозначно обратимой, если среди ее значений нет одинаковых.

Например, показательная функция $y = 2^x$ однозначно обратима, поскольку она является строго возрастающей и для любых действительных значений $x_1$ и $x_2$ из неравенства $x_1 \neq x_2$ следует, что $2^{x_1} \neq 2^{x_2}$, т. е. все ее значения различны.

Квадратная функция $y = x^2$ не является однозначно обратимой, так как при $x$ и $-x$, где $x$ — любое действительное число, она принимает одинаковые значения $x^2 \equiv (-x)^2$.

Функция $y = \sin x$ не является однозначно обратимой, так как она при бесконечном множестве значений ее аргумента $x = x_0 + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а $x_0$ — некоторое фиксированное значение аргумента, принимает одинаковые значения $y = \sin x_0$.

В множестве действительных чисел рассматривают в основном только однозначные функции. Поэтому в дальнейшем однозначно обратимую функцию будем называть *обратимой*.

Пусть $y = f(x)$ — обратимая функция, т. е. каждому значению $x \in X$ по правилу $f$ соответствует только одно значение $y \in Y$, причем множество $Y$ не содержит одинаковых элементов.

Тогда обратное соответствие каждому значению $y \in Y$ по некоторому правилу $f^{-1}$ ставит в соответствие только одно значение $x \in X$, т. е.

$$y \xrightarrow{f^{-1}} x = f^{-1}(y).$$

Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называются *взаимно обратными* функциями.

Если функция $y = f(x)$ обратима, то она устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами $x$ и $y$ множеств $X$ и $Y$.

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ совпадают (рис. 165).

Если условиться в каждой из взаимно обратных функций обозначать аргументы одной и той же буквой $x$, а значения функций — буквой $y$, т. е. записывать взаимно обратные функции как

$$y = f(x) \text{ и } y = f^{-1}(x), \tag{11.2}$$

то их графики будут симметричными относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов плоскости $xOy$ (рис. 166).

Если взаимно обратные функции записаны в виде (11.2), то область определения первой из них является областью значений второй и, наоборот, область определения второй является областью значений первой (рис. 166).

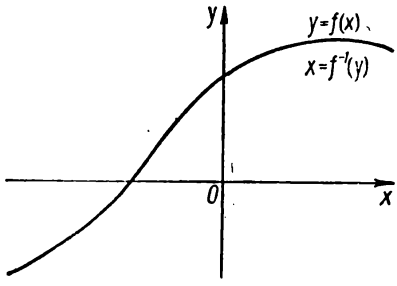



Рис. 165.

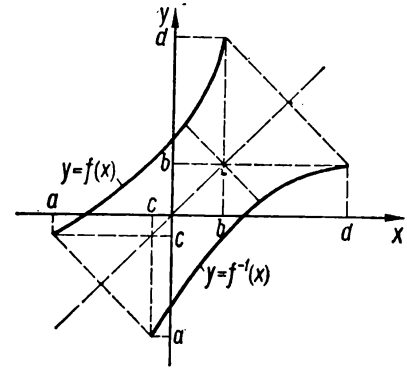



Рис. 166.

**Теорема 1.** *Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на некотором промежутке (или на всей числовой оси), то она обратима на этом промежутке (или на всей оси)*, т. е. имеет обратную функцию.

**Теорема 2.** *Если обратимая функция $y = f(x)$ — строго возрастающая (убывающая) в области ее определения, то и обратная ей функция $y = f^{-1}(x)$ также является строго возрастающей (убывающей).*

Теорему 2 предлагаем доказать читателю.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Показать, что функция $y = x^3$ обратима, и найти ее обратную функцию.

Решение. Функция $y = x^3$ определена при $-\infty < x < +\infty$. При всех значениях $x$ она строго возрастает, т. е. из $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1^3 < x_2^3$. По теореме 1 этого параграфа функция обратима. Найдем обратное соответствие, решив уравнение $y = x^3$ относительно $x$: $x = \sqrt[3]{y}$. Обозначим, как это сделано в записи (11.2), аргумент через $x$, а функцию через $y$; тогда получим $y = \sqrt[3]{x}$. Таким образом, функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$ взаимно обратны.

Ответ. $y = \sqrt[3]{x}$.

Пример 2. Найти промежутки, на которых функция $y = x^2$ обратима, и обратную ей функцию.

Решение. Функция $y = x^2$ необратима, так как она имеет бесконечное число пар одинаковых значений $(-x)^2 \equiv x^2$. Эта функция строго убывает на интервале $-\infty < x < 0$ и строго возрастает при $0 < x < +\infty$. На интервале $0 \leqslant x < +\infty$ (или только $-\infty < x < 0$) функция $y = x^2$ обратима.

Из уравнения $y = x^2$ $(x \geqslant 0)$ находим $\sqrt{x^2} = \sqrt{y}$ или $x = \sqrt{y}$ (при $x \geqslant 0$; при $x < 0$ $-x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$); если обозначить аргумент буквой $x$, а функцию буквой $y$, то получим $y = \sqrt{x}$. Функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ на интервале $0 \leqslant x < +\infty$ взаимно обратны.

Ответ. $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x < +\infty$; $y = -\sqrt{x}$, $-\infty < x < 0$.

Пример 3. Найти промежутки из области определения функции $y = \sin x$, в которых она строго монотонна, и обратную ей функцию.

Решение. Функция $y = \sin x$ строго монотонна на каждом из интервалов $-\frac{\pi}{2} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, т. е. она на каждом из этих интервалов ее области определения обратима.

Возьмем для обращения интервал $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ (рис. 167).

Решить уравнение $y = \sin x$, которым задана функция относительно $x$, как это было сделано в предыдущих примерах, нельзя. Надо ввести новый символ так же, как это было сделано для корня $\left(\sqrt[n]{a}\right)$, для логарифма $(\log_a b)$ и т. д. Величину $y$, взятую в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, синус которой равен $x$, обозначаем символом $\arcsin x$ (читается: «арксинус $x$»). После введения этого символа из уравнения $y = \sin x$ находим $x = \arcsin y$. Если в обратной функции аргумент обозначим через $x$, а функцию через $y$, то обратную функцию получим в виде

$$y = \arcsin x.$$

Аналогично можно найти обратную функцию для функции $y = \sin x$ на каждом интервале ее монотонности.

Ответ. $y = \arcsin x \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

## § 2. Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики

I. **Арксинус.** *Обратной тригонометрической функцией* $\arcsin x$ называется величина (дуга, угол, число) $y$, взятая от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, синус которой равен $x$, т. е.

$$y = \arcsin x, \text{ если } \sin y = x \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (11.3)$$

Из данного определения следуют два тождества:

$$\sin(\arcsin x) \equiv x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \tag{11.4}$$

и

$$\arcsin(\sin y) \equiv y \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{11.5}$$

Основные свойства функции $y = \arcsin x$:

а) она определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

б) функция изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, т. е. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и является непрерывной и ограниченной;

в) функция является нечетной;

$$\arcsin(-x) \equiv -\arcsin x; \tag{11.6}$$

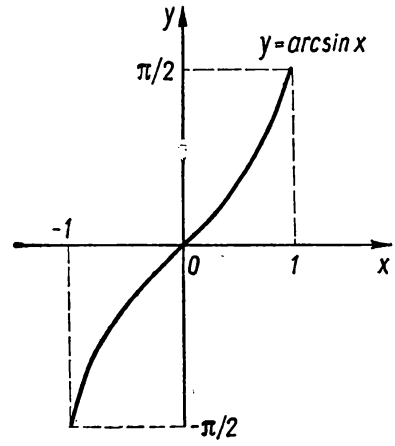



Рис. 167.

г) функция обращается в нуль при $x = 0$, т. е. $\arcsin 0 = 0$;

д) функция принимает положительные значения ($\arcsin x > 0$) при $0 < x \leqslant 1$ и отрицательные значения ($\arcsin x < 0$) — при $-1 \leqslant x < 0$;

е) функция является строго возрастающей, т. е. из неравенств $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ следует, что $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$.

ж) экстремумов функция не имеет. Заметим, что каждая из взаимно обратных функций не может иметь экстремумов, так как они строго монотонны;

з) наибольшее значение $M = \frac{\pi}{2}$ функция принимает при $x = 1$, наименьшее значение $m = -\frac{\pi}{2}$ — при $x = -1$;

к) на промежутке $(-1; 0)$ график функции выпуклый, а на промежутке $(0; 1)$ — вогнутый, так как

$$\arcsin\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\arcsin x_1 + \arcsin x_2}{2}, \qquad \text{если} \quad -1 < x_1 < x_2 < 0$$

и

$$\arcsin\frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\arcsin x_1 + \arcsin x_2}{2}, \qquad \text{если} \quad 0 < x_1 < x_2 < 1;$$

л) все значения величин, синус которых равен $x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, обозначаются символом $\operatorname{Arcsin} x$ и выражаются через $\arcsin x$ формулой

$$\operatorname{Arcsin} x = (-1)^n \arcsin x + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{11.7}$$

Функция $\arcsin x$ называется *главным значением величины* $\operatorname{Arcsin} x$. График функции $y = \arcsin x$ приведен на рис. 167.

II. **Арккосинус.** *Обратной тригонометрической функцией* $\arccos x$ называется величина (дуга, угол, число) $y$, взятая от 0 до $\pi$, косинус которой равен $x$, т. е.

$$y = \arccos x, \text{ если } \cos y = x \text{ и } 0 \leqslant y \leqslant \pi. \qquad (11.8)$$

Из определения следует, что

$$\cos(\arccos x) \equiv x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \qquad (11.9)$$

и

$$\arccos(\cos y) \equiv y \qquad (0 \leqslant y \leqslant \pi). \qquad (11.10)$$

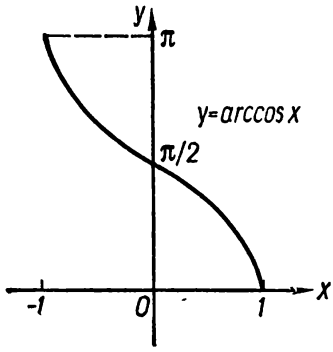



Рис. 168.

Основные свойства функции $y = \arccos x$:

а) она определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

б) функция изменяется от 0 до $\pi$, т. е. $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, и является непрерывной и ограниченной;

в) функция удовлетворяет условию

$$\arccos(-x) \equiv \pi - \arccos x \qquad (11.11)$$

(т. е. она ни четная, ни нечетная);

г) функция обращается в нуль при $x = 1$, т. е. $\arccos 1 \equiv 0$;

д) функция положительна ($\arccos x > 0$) при $-1 \leqslant x < 1$ (отрицательных значений не имеет);

е) функция является строго убывающей, т. е. из неравенств $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ следует, что $\arccos x_1 > \arccos x_2$;

ж) наибольшее значение $M = \pi$ функция принимает при $x = -1$, а наименьшее значение $m = 0$ — при $x = 1$;

з) на промежутке $(-1; 0)$ график функции вогнутый, а на промежутке $(0; 1)$ — выпуклый, так как

$$\arccos\frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\arccos x_1 + \arccos x_2}{2}, \quad \text{если } -1 < x < 0$$

и

$$\arccos\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\arccos x_1 + \arccos x_2}{2}, \quad \text{если } 0 < x < 1;$$

ж) все значения величины, косинус которой равен $x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, обозначаются символом $\operatorname{Arccos} x$ и определяются формулой

$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2\pi n, \qquad (11.12)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Функция $\arccos x$ называется *главным значением величины* $\operatorname{Arccos} x$. График функции $y = \arccos x$ приведен на рис. 168.

III. **Арктангенс.** *Обратной тригонометрической функцией* $\operatorname{arctg} x$ называется величина (дуга, угол, число) $y$, взятая от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тангенс которой равен $x$, т. е.

$$y = \operatorname{arctg} x, \text{ если } \operatorname{tg} y = x \text{ и } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \qquad (11.13)$$

Согласно определению

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \equiv x \qquad (-\infty < x < +\infty) \qquad (11.14)$$

и

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) \equiv y \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right). \qquad (11.15)$$

Основные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

а) она определена при всех действительных значениях $x$, т. е. $-\infty < x < +\infty$;

б) функция изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, т. е. $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, и является непрерывной и ограниченной;

в) функция является нечетной:

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x; \qquad (11.16)$$

г) функция обращается в нуль при $x = 0$, т. е. $\operatorname{arctg} 0 \equiv 0$;

д) функция принимает положительные значения ($\operatorname{arctg} x > 0$) при $0 < x < +\infty$ и отрицательные ($\operatorname{arctg} x < 0$) при $-\infty < x < 0$;

е) функция является строго возрастающей, т. е. из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $\operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2$;

ж) наибольшего и наименьшего значений функция не имеет;

з) на промежутке $-\infty < x < 0$ график функции вогнутый, а на промежутке $0 < x < +\infty$ — выпуклый, так как

$$\operatorname{arctg}\frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2}{2}, \text{ если } -\infty < x < 0$$

и

$$\operatorname{arctg}\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2}{2}, \text{ если } 0 < x < +\infty;$$

к) все значения величины, тангенс которой равен $x$ ($-\infty < x < +\infty$), обозначаются символом $\operatorname{Arctg} x$ и определяются по формуле

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi n, \qquad (11.17)$$

где

$$n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ \ldots$$

Функция $\operatorname{arctg} x$ называется главным значением величины $\operatorname{Arctg} x$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ приведен на рис. 169.

**IV. Арккотангенс.** Обратной тригонометрической функцией $\operatorname{arcctg} x$ называется величина (дуга, угол, число) $y$, взятая от 0 до $\pi$, котангенс которой равен $x$, т. е.

$$y = \operatorname{arcctg} x, \text{ если } \operatorname{ctg} y = x \text{ и } 0 < y < \pi. \tag{11.18}$$

Согласно определению

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) \equiv x \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{11.19}$$

и

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} y) \equiv y \quad (0 < y < \pi). \tag{11.20}$$

Основные свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

а) она определена при всех действительных значениях $x$, т. е. $-\infty < x < +\infty$;

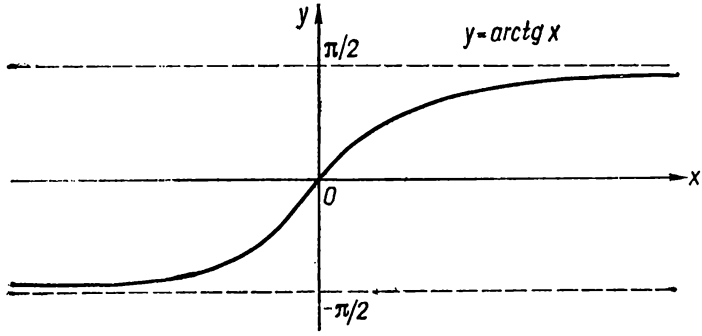



Рис. 169.

б) функция изменяется от 0 до $\pi$, т. е. $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, и является непрерывной и ограниченной;

в) для функции $\operatorname{arcctg} x$ имеет место тождество

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \tag{11.21}$$

т. е. свойством четности или нечетности функция не обладает;

г) нулей функция не имеет;

д) при всех значениях $x$ $(-\infty < x < +\infty)$ функция принимает положительные значения $(\operatorname{arcctg} x > 0)$;

е) функция является строго убывающей, т. е. из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $\operatorname{arcctg} x_1 > \operatorname{arcctg} x_2$;

ж) наибольшего и наименьшего значений функция не имеет;

з) на промежутке $(-\infty; 0)$ график функции выпуклый, а на промежутке $(0; +\infty)$ — вогнутый, так как

$$\operatorname{arcctg}\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\operatorname{arcctg} x_1 + \operatorname{arcctg} x_2}{2}, \text{ если } -\infty < x < 0$$

и

$$\operatorname{arcctg}\frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\operatorname{arcctg} x_1 + \operatorname{arcctg} x_2}{2}, \text{ если } 0 < x < +\infty;$$

к) все значения величины, котангенс которой равен $x$ ($-\infty < x < +\infty$), обозначаются символом $\operatorname{Arcctg} x$ и выражаются формулой

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi n, \tag{11.22}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Функция $\operatorname{arcctg} x$ называется *главным значением величины* $\operatorname{Arcctg} x$.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ приведен на рис. 170.

Функции $y = \operatorname{arcsec} x$ и $y = \operatorname{arccosec} x$ предлагается рассмотреть самостоятельно.

Рассмотрим несколько примеров.

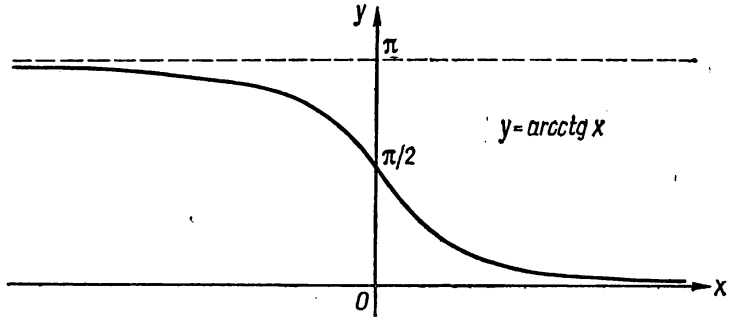



Рис. 170.

Пример 1. Вычислить $\arcsin(\sin 15)$.

Решение. Формулу (11.5) можно применить к вычислению такого вида выражения, если значения аргумента синуса заключены от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Найдем, между какими кратными $\frac{\pi}{2}$ последовательными значениями заключено число 15. Подбором находим

$$9 \cdot \frac{\pi}{2} < 15 < 10 \cdot \frac{\pi}{2} \left( \frac{9\pi}{2} \approx 14{,}13; \quad 5\pi \approx 15{,}71 \right),$$

или

$$\frac{9}{2}\pi < 15 < 5\pi. \tag{1}$$

Вычитая из каждой части неравенств (1) $5\pi$, получим

$$-\frac{\pi}{2} < 15 - 5\pi < 0,$$

или

$$0 < 5\pi - 15 < \frac{\pi}{2}.$$

Теперь найдем

$$\sin 15 \equiv \sin(5\pi - 15);$$

тогда по формуле (11.5)

$$\arcsin(\sin 15) \equiv \arcsin[\sin(5\pi - 15)] \equiv 5\pi - 15 \approx 0{,}71,$$

так как $0 < 5\pi - 15 < \frac{\pi}{2}$.

Ответ. $5\pi - 15 \approx 0{,}71$.

Пример 2. Вычислить $\arccos[\cos(-26)]$.

Решение. Учитывая, что $\cos(-26) \equiv \cos 26$, найдем, между какими кратными $\pi$ последовательными значениями заключено число 26.

Подбором находим

$$8\pi < 26 < 9\pi,$$

или

$$0 < 26 - 8\pi < \pi.$$

Тогда

$$\arccos[\cos(-26)] \equiv \arccos(\cos 26) \equiv \arccos[\cos(26 - 8\pi)] \equiv$$
$$\equiv 26 - 8\pi \approx 0{,}87.$$

Ответ. $26 - 8\pi \approx 0{,}87$.

Пример 3. Вычислить

$$\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-8)].$$

Решение. Найдем, между какими последовательными кратными $\frac{\pi}{2}$ значениями заключено $-8$. Подбором получаем

$$-\frac{6\pi}{2} < -8 < -5\frac{\pi}{2},$$

или

$$-3\pi < -8 < -\frac{5}{2}\pi,$$

откуда

$$0 < 3\pi - 8 < \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}(3\pi - 8) = \operatorname{tg}(-8)$, то, применяя формулу (11.15), получим

$$\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-8)] \equiv \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(3\pi - 8)] \equiv 3\pi - 8 \approx 1{,}42.$$

Ответ. $3\pi - 8 \approx 1{,}42$.

Пример 4. Вычислить

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 16{,}71).$$

Решение. Число 16,71 заключено между $5\pi$ и $6\pi$, т. е.

$$5\pi < 16{,}71 < 6\pi,$$

откуда

$$0 < 16{,}71 - 5\pi < \pi.$$

Так как $\operatorname{ctg} 16{,}71 \equiv \operatorname{ctg}(16{,}71 - 5\pi)$, то, применяя формулу (11.20), получим

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 16{,}71) \equiv \operatorname{arcctg}[\operatorname{ctg}(16{,}71 - 5\pi)] \equiv 16{,}71 - 5\pi \approx 1{,}00.$$

Ответ. $16{,}71 - 5\pi \approx 1{,}00$.

## § 3. Основные соотношения между обратными тригонометрическими функциями

Рассмотрим формулы преобразования одной обратной тригонометрической функции в другую.

Докажем, что

$$\arcsin x \equiv \arccos \sqrt{1-x^2} \equiv \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \equiv \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \tag{11.23}$$

если $0 < x < 1$.

Доказательство. Обозначим $\arcsin x \equiv \alpha$; тогда $\sin \alpha \equiv x$ и, так как $0 < x < 1$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Зная $\sin \alpha \equiv x$, найдем $\cos \alpha \equiv \sqrt{1-\sin^2 \alpha} \equiv \sqrt{1-x^2}$, т. е.

$$\cos \alpha \equiv \sqrt{1-x^2} \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Применяя формулу (11.10), получим

$$\arccos(\cos \alpha) \equiv \arccos \sqrt{1-x^2},$$

или

$$\alpha \equiv \arccos \sqrt{1-x^2},$$

т. е.

$$\arcsin x \equiv \arccos \sqrt{1-x^2} \qquad (0 < x < 1). \tag{11.23а}$$

Найдем

$$\operatorname{tg} \alpha \equiv \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \equiv \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha \equiv \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

По формуле (11.15) находим

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) \equiv \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

или

$$\alpha \equiv \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е.

$$\arcsin x \equiv \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (0 < x < 1). \tag{11.23б}$$

Наконец, найдем

$$\operatorname{ctg} \alpha \equiv \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \equiv \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

или

$$\operatorname{ctg} \alpha \equiv \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, применяя формулу (11.20), находим

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) \equiv \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

или

$$\alpha \equiv \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \text{т. е.}$$

$$\arcsin x \equiv \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad (0 < x < 1). \qquad (11.23в)$$

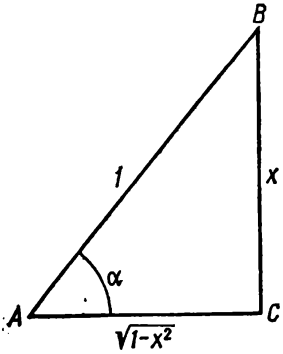


Рис. 171.

При преобразованиях обратных тригонометрических функций формулы (11.23а), (11.23б), (11.23в) или тождества (11.23) удобно получать из прямоугольного треугольника $ABC$, катет $BC$ которого равен $x$, гипотенуза $AB$ равна 1 $(0 < x < 1)$ и острый угол $\angle ABC$ равен $\alpha$ (рис. 171). Тогда второй катет треугольника (по теореме Пифагора) будет равен $\sqrt{1-x^2}$. Из этого треугольника находим

$$\sin\alpha \equiv x,$$

$$\cos\alpha \equiv \sqrt{1-x^2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \equiv \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \equiv \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то

$$\alpha \equiv \arcsin x \equiv \arccos\sqrt{1-x^2} \equiv \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \equiv \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Аналогично тождеству (11.23) доказываются тождества:

$$\arccos x \equiv \arcsin\sqrt{1-x^2} \equiv \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \equiv \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (11.24)$$

если $0 < x < 1$;

$$\operatorname{arctg} x \equiv \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \equiv \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \equiv \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}, \qquad (11.25)$$

если $0 < x < +\infty$;

$$\operatorname{arcctg} x \equiv \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \equiv \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \equiv \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \qquad (11.26)$$

если $0 < x < +\infty$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Решение. По формуле (11.24) преобразуем

$$\arccos\frac{3}{5}\equiv\arcsin\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\equiv\arcsin\frac{4}{5};$$

тогда

$$\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\equiv\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\equiv\frac{4}{5}.$$

Ответ. $\frac{4}{5}$.

Пример 2. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$.

Решение. Пользуясь формулой (11.23б), найдем

$$\arcsin\frac{5}{13}\equiv\operatorname{arctg}\frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}}\equiv\operatorname{arctg}\frac{5}{12};$$

тогда

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\equiv\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)\equiv\frac{5}{12}.$$

Ответ. $\frac{5}{12}$.

Пример 3. Вычислить $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-\arccos\frac{12}{13}\right)$.

Решение. Обозначив данное выражение буквой $A$ и применив формулу (10.28), находим

$$A=\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\arccos\frac{12}{13}\right)-\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\sin\left(\arccos\frac{12}{13}\right).$$

Применяя формулы (11.24) и (11.25), получим

$$\arccos\frac{12}{13}\equiv\arcsin\frac{5}{13},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\equiv\arcsin\frac{3}{5}\equiv\arccos\frac{4}{5}.$$

Тогда

$$A=\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arccos\frac{12}{13}\right)-\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right);$$

применяя формулы (11.4) и (11.9), получим

$$A\equiv\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}\equiv\frac{16}{65}.$$

Ответ. $\frac{16}{65}$.

Пример 4. Вычислить $\operatorname{tg}\left(3\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Обозначим $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}=\alpha$; тогда, используя формулу (10.54), получим

$$\operatorname{tg}\left(3\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\equiv\operatorname{tg}3\alpha\equiv\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

По формуле (11.23б)

$$\alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\quad\text{поэтому}\quad\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2};$$

тогда

$$\operatorname{tg}\left(3\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\equiv\frac{3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{1-3\cdot\frac{1}{4}}=\frac{11}{2}=5{,}5.$$

Ответ. 5,5.

Пример 5. Вычислить $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Решение. Обозначим $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}=\alpha$; тогда $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Находим

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\equiv\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\equiv\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{\sqrt{10}}}{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3}}=3+\sqrt{10}.$$

Ответ. $3+\sqrt{10}$.

Пример 6. Доказать, что

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)\equiv\frac{1}{5}.$$

Доказательство. а) Вычислим

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\equiv2\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\equiv$$

$$\equiv2\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\equiv2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}.$$

б) Вычислим

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)\equiv\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{15}{17}\right)}{\sin\left(\arcsin\frac{15}{17}\right)}\equiv\frac{1-\cos\left(\arccos\frac{8}{17}\right)}{\frac{15}{17}}\equiv$$

$$\equiv\frac{1-\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

Тогда

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)\equiv\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}.$$

Пример 7. Доказать, что $\cos(2\operatorname{arcctg}7)\equiv\sin(4\operatorname{arcctg}3)$.

Доказательство. а) Вычислим

$$\cos(2\operatorname{arcctg}7)\equiv2\cos^2(\operatorname{arcctg}7)-1\equiv2\cos^2\left(\arccos\frac{7}{\sqrt{1+7^2}}\right)-$$

$$-1\equiv2\cdot\left(\frac{7}{\sqrt{50}}\right)^2-1\equiv\frac{48}{50}=\frac{24}{25}.$$

б) Вычислим

$$\sin(4\operatorname{arcctg}3)\equiv2\sin(2\operatorname{arcctg}3)\cdot\cos(2\operatorname{arcctg}3)\equiv$$

$$\equiv4\sin(\operatorname{arcctg}3)\cos(\operatorname{arcctg}3)\left[\cos^2(\operatorname{arcctg}3)-\sin^2(\operatorname{arcctg}3)\right]\equiv$$

$$\equiv4\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\cos\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left[\cos^2\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right]\equiv4\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\left(\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)=\frac{24}{25}.$$

Таким образом,

$$\cos(2\operatorname{arcctg}7)\equiv\sin(4\operatorname{arcctg}3)\equiv0{,}96.$$

## § 4. Формулы сложения и вычитания обратных тригонометрических функций

Докажем тождество

$$\arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2},\quad -1\leqslant x\leqslant1. \tag{11.27}$$

Доказательство. Обозначим $\arcsin x=\alpha$, $\arccos x=\beta$; тогда

$$\sin\alpha\equiv x,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\quad\text{и}\quad\cos\beta\equiv x,\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi;$$

$$\arcsin x+\arccos x\equiv\alpha+\beta,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha+\beta\leqslant\frac{3\pi}{2}.$$

Таким образом, $\sin\alpha\equiv\cos\beta\equiv x$, или $\sin\alpha\equiv\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$,

откуда

$$\alpha = (-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \pi n, \quad n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ \ldots$$

Учитывая условие $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha + \beta \leqslant \frac{3\pi}{2}$, получаем при $n = 0$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Остальные значения $n$ условию не удовлетворяют.

Аналогично доказывается тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x \equiv \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{11.28}$$

Рассмотрим несколько примеров на сложение и вычитание обратных тригонометрических функций.

Пример 1. Найти сумму

$$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13}.$$

Решение. Обозначим $\alpha = \arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13}$ и найдем

$$\sin \alpha \equiv \sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right) \equiv \sin\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) \times$$

$$\times \cos\left(\arcsin \frac{5}{13}\right) + \sin\left(\arcsin \frac{5}{13}\right) \cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{3}{5}\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{5}{13}\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \equiv \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{56}{65},$$

т. е. $\sin \alpha \equiv \frac{56}{65}$.

Поскольку $0 < \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0 < \frac{5}{13} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$0 < \arcsin \frac{3}{5} < \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad 0 < \arcsin \frac{5}{13} < \frac{\pi}{4};$$

отсюда

$$0 < \arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} < \frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\alpha = \arcsin \frac{56}{65};$$

или

$$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} \equiv \arcsin \frac{56}{65} \approx 1{,}04.$$

Ответ.

$$\arcsin \frac{56}{65} \approx 1{,}04.$$

Пример 2. Найти сумму $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{15}{17}$.

Решение. Обозначим $\alpha=\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{15}{17}$ и найдем

$$\sin\alpha\equiv\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{15}{17}\right)\equiv\frac{4}{5}\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}+\frac{15}{17}\times$$

$$\times\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\equiv\frac{77}{85},\ \text{т. е.}\ \sin\alpha\equiv\frac{77}{85};$$

отсюда

$$\alpha=(-1)^n\arcsin\frac{77}{85}+\pi n,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Поскольку $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{4}{5}<1$, $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{15}{17}<1$, то

$$\frac{\pi}{4}<\arcsin\frac{4}{5}<\frac{\pi}{2},\quad\frac{\pi}{4}<\arcsin\frac{15}{17}<\frac{\pi}{2}$$

и

$$\frac{\pi}{2}<\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{15}{17}<\pi,\ \text{т. е.}\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$$

Учитывая это условие, находим при $n=1$ (остальные значения не удовлетворяют условию)

$$\alpha\equiv\pi-\arcsin\frac{77}{85}\approx2.$$

Ответ.

$$\pi-\arcsin\frac{77}{85}\approx2.$$

При решении примеров 1 и 2 сумму арксинусов можно было выразить не только через арксинус, а и через любую другую обратную тригонометрическую функцию. В данных примерах удобнее было выражать через арккосинус.

Действительно, при $0\leqslant x\leqslant1$ и $0\leqslant y\leqslant1$ соответственно имеем

$$0\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}\quad\text{и}\quad0\leqslant\arcsin y\leqslant\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$0\leqslant\arcsin x+\arcsin y\leqslant\pi.$$

Обозначив

$\alpha=\arcsin x+\arcsin y$,

найдем $\cos\alpha\equiv\cos(\arcsin x+\arcsin y)\equiv\cos(\arcsin x)\cos(\arcsin y)-$ $-\sin(\arcsin x)\sin(\arcsin y)\equiv\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy$, т. е. $\cos\alpha\equiv$ $\equiv\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy$.

Тогда $\arccos(\cos\alpha)\equiv\arccos(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy)$; так как $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, то по формуле (11.10) получим

$$\alpha\equiv\arccos(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy)$$

или

$$\arcsin x + \arcsin y \equiv \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right)$$

при

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

По этой формуле в примере 1 получаем

$$\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13} \equiv \arccos\left(\sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\sqrt{1-\frac{25}{169}} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}\right) \equiv \arccos\frac{33}{65} \equiv \arcsin\sqrt{1-\left(\frac{33}{65}\right)^2} \equiv \arcsin\frac{56}{65},$$

а в примере 2

$$\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{15}{17} \equiv \arccos\left(\sqrt{1-\frac{16}{25}}\cdot\sqrt{1-\frac{225}{289}} - \frac{4}{5}\cdot\frac{15}{17}\right) \equiv$$

$$\equiv \arccos\left(-\frac{36}{85}\right) = \pi - \arccos\frac{36}{85} \equiv \pi - \arcsin\frac{77}{85}.$$

Аналогично, если надо найти сумму $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$ при $0 < x < +\infty$ и $0 < y < +\infty$, можно, учитывая, что

$$0 < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \pi,$$

и обозначив $\alpha \equiv \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$, найти

$$\operatorname{ctg}\alpha \equiv \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) \equiv \frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} - 1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \equiv \frac{1-xy}{x+y},$$

или

$$\operatorname{ctg}\alpha \equiv \frac{1-xy}{x+y},$$

откуда

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) \equiv \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}. \qquad (1)$$

Применяя формулу (11.20) к левой части тождества (1), получим

$$\alpha \equiv \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y},$$

или

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \equiv \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}$$

при $0 < x < +\infty$ и $0 < y < +\infty$.

Пример 3. Найти сумму $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Решение. По формуле

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \equiv \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}$$

находим

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\equiv\operatorname{arcctg}\frac{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\equiv\operatorname{arcctg}1\equiv\frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

Пример 4. Найти разность $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$.

Решение. Обозначим $\alpha\equiv\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$ и найдем

$$\cos\alpha\equiv\cos\left(\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\right)\equiv$$

$$\equiv\cos\left(\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\right)+\sin\left(\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\times$$

$$\times\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\right)\equiv\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}+\sqrt{1-\frac{2}{3}}\times$$

$$\times\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\right)^2}\equiv\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{6}\equiv$$

$$\equiv\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}{6}\equiv\frac{3\sqrt{3}}{6}\equiv\frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{т. е. } \cos\alpha\equiv\frac{\sqrt{3}}{2};$$

отсюда

$$\arccos(\cos\alpha)\equiv\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\equiv\frac{\pi}{6}. \qquad (1)$$

Поскольку $\sqrt{\frac{2}{3}}<\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$, то $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}>\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$;

тогда

$$0<\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}<\pi,\ \text{т. е. } 0<\alpha<\pi.$$

Применяя к левой части тождества (1) формулу (11.10), получим

$$\alpha\equiv\frac{\pi}{6},$$

или

$$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\equiv\frac{\pi}{6}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{6}$.

Рассмотрим сумму арксинусов

$$\arcsin x+\arcsin y\ \text{ при }\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1.$$

Учитывая, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}$, имеем

$$-\pi \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \pi.$$

Обозначим эту сумму

$$z \equiv \arcsin x + \arcsin y$$

и найдем

$$\sin z \equiv \sin(\arcsin x + \arcsin y) \equiv x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}, \text{ или}$$

$$\sin z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}, \text{ где } -\pi \leqslant z \leqslant \pi,$$

откуда

$$z = (-1)^n \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Условию $-\pi \leqslant z \leqslant \pi$ удовлетворяют значения $n = 0$, $n = 1$ и $n = -1$; поэтому

$$z_1 = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}),$$
$$z_2 = \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}),$$
$$z_3 = -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

Выясним, как по значениям $x$ и $y$ определить, какой из корней будет суммой $\arcsin x + \arcsin y$.

1. Если значение одной из переменных $x$ и $y$ неотрицательно, а другой неположительно, т. е. $xy \leqslant 0$, то сумма $\arcsin x + \arcsin y$ заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Действительно, пусть, например, $1 \geqslant x \geqslant 0$, а $-1 \leqslant y \leqslant 0$; тогда

$$0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

и

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin y \leqslant 0;$$

складывая почленно эти неравенства, получим

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\arcsin x + \arcsin y \equiv z_1 \equiv \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}),$$
$$\text{если } xy \leqslant 0.$$

2. Пусть $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$; тогда

$$0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

и

$$0 \leqslant \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2};$$

отсюда

$$0 \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \pi.$$

Рассмотрим случай, когда

$$0 \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

В этом случае $\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} - \arcsin y$, или, учитывая соотношение (11.23),

$$\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos \sqrt{1 - y^2},$$

откуда, применяя (11.27), получим

$$\arcsin x \leqslant \arcsin \sqrt{1 - y^2}.$$

Так как арксинус — функция возрастающая, то

$$x \leqslant \sqrt{1 - y^2},$$

откуда

$$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

В случае $xy \geqslant 0$ и $x^2 + y^2 \leqslant 1$ имеем

$$\arcsin x + \arcsin y \equiv z_1 \equiv \arcsin (x \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - x^2}).$$

Теперь рассмотрим случай, когда

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \pi.$$

В этом случае

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin y \leqslant \arcsin x,$$

или

$$\arccos y \leqslant \arcsin x.$$

Как и в предыдущем случае, находим

$$\arcsin \sqrt{1 - y^2} \leqslant \arcsin x, \quad \sqrt{1 - y^2} \leqslant x,$$

или

$$x^2 + y^2 \geqslant 1.$$

Следовательно, при $xy \geqslant 0$ и $x^2 + y^2 \geqslant 1$ имеем

$$\arcsin x + \arcsin y \equiv z_2 \equiv \pi - \arcsin (x \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - x^2}).$$

Дадим геометрическую иллюстрацию случая, когда $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ (рис. 172).

На рис. 172, *а* взято точку $B(x, y)$, которая лежит внутри четверти единичного круга, т. е. $OB < OA$, или $x^2 + y^2 < 1$. Построенные дуги $\arcsin x$ и $\arcsin y$, соответствующие значениям $x$ и $y$, в сумме составляют меньше четверти единичной окружности, т. е. $0 \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}$, причем $\arcsin x + \arcsin y \equiv \frac{\pi}{2}$, если точка $B$ лежит на окружности, т. е. $x^2 + y^2 = 1$.

На рис. 172, *б* точка $B(x, y)$ лежит вне четверти единичного круга, т. е. $OB > OA$, или $x^2 + y^2 > 1$.

Дуги $\arcsin x$ и $\arcsin y$, соответствующие значениям $x$ и $y$, имеют общую часть, поэтому $\frac{\pi}{2} < \arcsin x + \arcsin y \leqslant \pi$.

3. Пусть $-1 \leqslant x < 0$ и $-1 \leqslant y < 0$; тогда

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x < 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin y < 0$$

и, следовательно,

$$-\pi \leqslant \arcsin x + \arcsin y < 0.$$

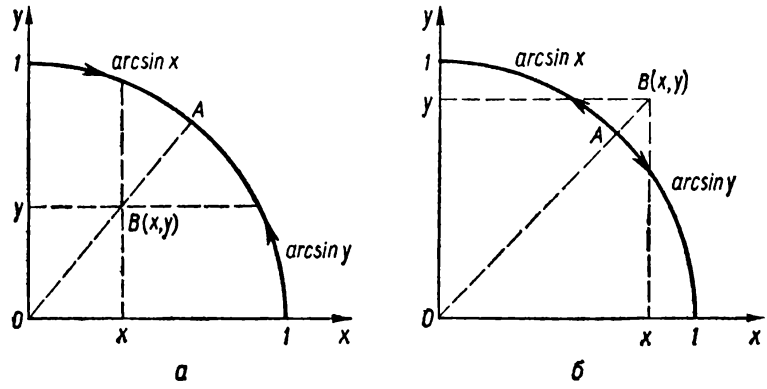



Рис. 172.

Учитывая нечетность функции арксинус, получим

$$-\pi \leqslant -\arcsin(-x) - \arcsin(-y) < 0,$$

или

$$0 < \arcsin(-x) + \arcsin(-y) \leqslant \pi,$$

т. е. исследование приводится к рассмотренному предыдущему случаю.

Если $0 < \arcsin(-x) + \arcsin(-y) \leqslant \frac{\pi}{2}$, то при $-x > 0$ и $-y > 0$ и $x^2 + y^2 \leqslant 1$ имеем

$$\arcsin x + \arcsin y \equiv z_1 \equiv \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$(xy \geqslant 0 \text{ и } x^2 + y^2 \leqslant 1).$$

Если $\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(-x) + \arcsin(-y) \leqslant \pi$, то при $x^2 + y^2 \geqslant 1$ и $xy \geqslant 0$ имеем

$$\arcsin x + \arcsin y \equiv z_2 \equiv -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Таким образом, для сложения двух арксинусов имеем формулы

$$\arcsin x + \arcsin y \equiv \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } xy \leqslant 0 \text{ или } x^2+y^2 \leqslant 1; \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x>0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1; \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \\ \text{если } x<0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1. \end{cases} \tag{11.29}$$

Аналогично доказываются следующие формулы сложения и вычитания обратных тригонометрических функций:

$$\arcsin x - \arcsin y \equiv \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } xy \geqslant 0 \text{ или } x^2+y^2 \leqslant 1; \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x>0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1; \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x<0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1. \end{cases} \tag{11.30}$$

$$\arccos x + \arccos y \equiv \begin{cases} \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x+y \geqslant 0; \\ 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x+y<0. \end{cases} \tag{11.31}$$

$$\arccos x - \arccos y \equiv \begin{cases} -\arccos\left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x \geqslant y; \\ \arccos\left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x<y. \end{cases} \tag{11.32}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \equiv \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{ если } xy<1; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \\ \text{если } x>0 \text{ и } xy>1; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \\ \text{если } x<0 \text{ и } xy>1. \end{cases} \tag{11.33}$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y \equiv \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \text{ если } xy>-1; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \\ \text{если } x>0 \text{ и } xy<-1; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \\ \text{если } x<0 \text{ и } xy<-1. \end{cases} \tag{11.34}$$

Пример 5. Вычислить $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}$.

Решение. По формуле (11.29) с учетом того, что $\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2<1$, имеем

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}\equiv\arcsin\left(\frac{4}{5}\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}+\frac{5}{13}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right)\equiv$$

$$\equiv\arcsin\frac{63}{65}.$$

Аналогично складываем

$$\arcsin\frac{63}{65}+\arcsin\frac{16}{65}\equiv\arcsin\left(\frac{63}{65}\sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2}+\frac{16}{65}\sqrt{1-\left(\frac{63}{65}\right)^2}\right)\equiv$$

$$\equiv\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2}$.

Пример 6. Доказать, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

Доказательство. По формуле (11.33), учитывая, что $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}<1$, находим

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\equiv\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}\equiv\operatorname{arctg}\frac{4}{7};$$

аналогично

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\equiv\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}}\equiv\operatorname{arctg}\frac{3}{11}.$$

Тогда, учитывая, что $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}<1$, находим

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\equiv\operatorname{arctg}\frac{4}{7}+\operatorname{arctg}\frac{3}{11}\equiv$$

$$\equiv\operatorname{arctg}\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}}\equiv\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

## § 5. Формулы удвоения обратных тригонометрических функций и деления их на два

Пусть требуется преобразовать $2\arccos x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$. Обозначим $\alpha = 2\arccos x$ и найдем

$$\cos\alpha \equiv \cos(2\arccos x) \equiv 2\cos^2(\arccos x) - 1 \equiv 2x^2 - 1,$$

т. е.

$$\cos\alpha \equiv 2x^2 - 1,$$

откуда

$$\arccos(\cos\alpha) \equiv \arccos(2x^2 - 1). \tag{1}$$

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 \leqslant \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$; тогда по формуле (11.10)

$$\arccos(\cos\alpha) \equiv \alpha,$$

т. е. тождество (1) принимает вид

$$\alpha \equiv \arccos(2x^2 - 1),$$

или

$$2\arccos x \equiv \arccos(2x^2 - 1) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Если $-1 \leqslant x < 0$, то $\frac{\pi}{2} < \arccos x \leqslant \pi$ и $\pi < \alpha \leqslant 2\pi$ или $0 < \alpha - \pi < \pi$; так как $\cos\alpha \equiv -\cos(\alpha - \pi)$, то получаем

$$\arccos(\cos\alpha) \equiv \arccos[-\cos(\alpha - \pi)] \equiv$$
$$\equiv \pi - \arccos[\cos(\alpha - \pi)] \equiv \pi - \alpha + \pi \equiv 2\pi - \alpha.$$

Тогда тождество (1) принимает вид

$$2\pi - \alpha \equiv \arccos(2x^2 - 1),$$

откуда

$$\alpha \equiv 2\pi - \arccos(2x^2 - 1),$$

или

$$2\arccos x \equiv 2\pi - \arccos(2x^2 - 1) \quad (-1 \leqslant x < 0).$$

Таким образом,

$$2\arccos x \equiv \begin{cases} \arccos(2x^2 - 1) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2\pi - \arccos(2x^2 - 1) \text{ при } -1 \leqslant x < 0. \end{cases} \tag{11.35}$$

Замечание 1. Вывод этой формулы можно получить по-другому. Из условия, что $\cos\alpha \equiv 2x^2 - 1$, получим

$$\alpha \equiv \pm \arccos(2x^2 - 1) + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Дальше вывод предлагается провести читателю.

Аналогично доказываются соотношения:

$$2\arcsin x \equiv \begin{cases} \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } |x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } \frac{\sqrt{2}}{2} < x \leqslant 1; \\ -\pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } -1 \leqslant x < -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \tag{11.36}$$

$$2\operatorname{arctg} x \equiv \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}, & \text{если } |x| < 1; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}, & \text{если } x > 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}, & \text{если } x < -1. \end{cases} \tag{11.37}$$

Замечание 2. Формулы (11.35), (11.36) и (11.37) получаются из формул (11.29), (11.31) и (11.33), если в них положить $y = x$.

Пример 1. Вычислить

$$2\arcsin\frac{15}{17}.$$

Решение. По формуле (11.32), учитывая, что $\frac{15}{17} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, находим

$$2\arcsin\frac{15}{17} \equiv \pi - \arcsin\left(2\cdot\frac{15}{17}\sqrt{1-\frac{225}{289}}\right) \equiv \pi - \arcsin\frac{240}{289}.$$

Ответ. $\pi - \arcsin\frac{240}{289}$.

Пример 2. Вычислить $2\operatorname{arctg}(-2) + 2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Решение. По формуле (11.37), учитывая, что $-2 < -1$, находим

$$2\operatorname{arctg}(-2) \equiv -\pi + \operatorname{arctg}\frac{2\cdot(-2)}{1-4} \equiv -\pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

По формуле (11.35), учитывая, что $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant 1$, находим

$$2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} \equiv \arccos\left[2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1\right] \equiv \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) \equiv$$
$$\equiv \pi - \arccos\frac{3}{5}.$$

Тогда

$$2\operatorname{arctg}(-2)+2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\equiv-\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi-\arccos\frac{3}{5}\equiv$$

$$\equiv\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\arccos\frac{3}{5}\equiv\arccos\frac{3}{5}-\arccos\frac{3}{5}\equiv 0.$$

Ответ. 0.

Формулы деления обратных тригонометрических функций на два:

$$\frac{1}{2}\arcsin x\equiv\begin{cases}\arcsin\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ -\arcsin\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, & \text{если } -1\leqslant x<0.\end{cases}\tag{11.38}$$

$$\frac{1}{2}\arccos x\equiv\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}},\ \text{если } -1\leqslant x\leqslant 1.\tag{11.39}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\equiv\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & \text{если } x\neq 0;\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}\tag{11.40}$$

Пример 3. Вычислить $\frac{1}{2}\arcsin(-0{,}6)$.

Решение. Применяя формулу (11.38), получим

$$\frac{1}{2}\arcsin(-0{,}6)\equiv-\arcsin\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-(0{,}6)^2}}{2}}\equiv-\arcsin\sqrt{0{,}1}.$$

Ответ. $-\arcsin\sqrt{0{,}1}$.

## § 6. Тождественные преобразования с обратными тригонометрическими функциями

Пример 1. Вычислить $\sin(2\operatorname{arctg}2)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)$.

Решение. Найдем $\sin(2\operatorname{arctg}2)\equiv 2\sin(\operatorname{arctg}2)\cos(\operatorname{arctg}2)\equiv$

$$\equiv 2\sin\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+2^2}}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+2^2}}\right)\equiv 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\equiv\frac{4}{5}$$

и

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)\equiv\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{15}{17}\right)}{\sin\left(\arcsin\frac{15}{17}\right)}\equiv\frac{1-\sqrt{1-\frac{225}{289}}}{\frac{15}{17}}\equiv\frac{3}{5}.$$

Тогда

$$\sin(2\operatorname{arctg}2)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)\equiv\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}.$$

Ответ. $\frac{1}{5}$.

Пример 2. Вычислить

$$\cos^6\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos 0{,}8\right)+\cos^6\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin 0{,}8\right).$$

Решение. Преобразуем данное выражение, обозначив его буквой $A$.

$$A=\cos^6\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos 0{,}8\right)+\cos^6\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin 0{,}8\right)\equiv$$

$$\equiv\sin^6\left(\frac{1}{2}\arccos 0{,}8\right)+\sin^6\left(\frac{1}{2}\arcsin 0{,}8\right)\equiv$$

$$\equiv\left(\frac{1-\cos(\arccos 0{,}8)}{2}\right)^3+\left(\frac{1-\cos(\arcsin 0{,}8)}{2}\right)^3\equiv$$

$$\equiv\left(\frac{1-0{,}8}{2}\right)^3+\left(\frac{1-0{,}6}{2}\right)^3\equiv 0{,}001+0{,}008\equiv 0{,}009.$$

Ответ. 0,009.

Пример 3. Доказать, что $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}\equiv\frac{\pi}{4}$.

Доказательство. Применяя формулу (11.37), найдем

$$2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\equiv\operatorname{arctg}\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}\equiv\operatorname{arctg}\frac{5}{12};$$

тогда, по той же формуле,

$$4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\equiv 2\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\equiv\operatorname{arctg}\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}}\equiv\operatorname{arctg}\frac{120}{119}.$$

Применяя формулу (11.34), находим

$$\operatorname{arctg}\frac{120}{119}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}\equiv\operatorname{arctg}\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}\equiv\operatorname{arctg}1\equiv\frac{\pi}{4}.$$

Пример 4. Доказать, что

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}\equiv\frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. По формуле (11.29) находим

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}\equiv\arcsin\left(\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{25}{169}}+\frac{5}{13}\sqrt{1-\frac{16}{25}}\right)\equiv$$

$$\equiv\arcsin\frac{63}{65}\equiv\arccos\sqrt{1-\left(\frac{63}{65}\right)^2}\equiv\arccos\frac{16}{65}.$$

Используя тождество (11.27), находим

$$\arcsin\frac{16}{65}+\arccos\frac{16}{65}\equiv\frac{\pi}{2},\ \text{т. е.}$$

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}\equiv\frac{\pi}{2}.$$

## § 7. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции

Пример 1. Решить уравнение $x=\arcsin(\sin 2x)$.

Решение. Данное уравнение определено при $-\infty<x<+\infty$. Поскольку при всех действительных значениях $x$ правая часть уравнения ограничена $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin(\sin 2x)\leqslant\frac{\pi}{2}$, то уравнение может иметь решения, которые принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Так как углы равны, то синусы их также равны, т. е.

$$\sin x=\sin(\arcsin(\sin 2x)),$$

откуда получаем

$$\sin x=\sin 2x.$$

Решив это уравнение, найдем $\left(\text{учитывая, что } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

$$x_1=-\frac{\pi}{3},\quad x_2=0,\quad x_3=\frac{\pi}{3}.$$

Ответ. $x_1=-\frac{\pi}{3},\quad x_2=0,\quad x_3=\frac{\pi}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)=\frac{\pi}{4}.$$

Решение. Если углы равны, то и их тангенсы равны:

$$\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)]=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{x+2-(x+1)}{1+(x+2)(x+1)}=1;$$

$$(x+2)(x+1)=0;$$

$$x_1=-2;\ x_2=-1.$$

Ответ. $x_1=-2,\ x_2=-1$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\arccos 2x+\arcsin\sqrt{1-x^2}=\frac{4}{3}\pi.$$

Р е ш е н и е. Область определения уравнения есть отрезок $-\frac{1}{2} \leqslant$ $\leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Учитывая, что $\sqrt{1-x^2} > 0$, имеем $0 < \arcsin\sqrt{1-x^2} \leqslant$ $\leqslant \frac{\pi}{2}$; тогда уравнение может иметь решения, если

$$\frac{5\pi}{6} \leqslant \arccos 2x \leqslant \pi;$$

отсюда

$$-1 \leqslant 2x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

или

$$-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

По формуле (11.23) находим

$$\arcsin\sqrt{1-x^2} \equiv \arccos\sqrt{1-(1-x^2)} \equiv \arccos|x|.$$

Учитывая, что решением уравнения может быть только отрицательное значение $x$, получаем

$$\arccos 2x + \arccos(-x) = \frac{4}{3}\pi,$$

или

$$\pi - \arccos(-2x) + \arccos(-x) = \frac{4}{3}\pi,$$

откуда

$$\arccos(-x) - \arccos(-2x) = \frac{\pi}{3}.$$

Взяв косинус от обеих частей уравнения, получим

$$(-x)(-2x) + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = \frac{1}{2},$$

или

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = \frac{1}{2} - 2x^2.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат и упростив, получим

$$x^2 = \frac{1}{4},$$

откуда

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Значение $x = \frac{1}{2} > 0$ не является решением уравнения, его решение —

$$x = -\frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right].$$

О т в е т. $x = -\frac{1}{2}$.

Пример 4. Решить уравнение $\arccos x + \arccos \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Представим уравнение в виде $\arccos \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Применив к правой части уравнения формулу (11.27), получим

$$\arccos \frac{x}{2} = \arcsin x.$$

Так как $\arccos \frac{x}{2} \geqslant 0$, то решениями могут быть только те значения $x$, при которых $\arcsin x \geqslant 0$, т. е. $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда по формуле (11.23) уравнение можно записать в виде

$$\arccos \frac{x}{2} = \arccos \sqrt{1 - x^2},$$

откуда

$$\frac{x}{2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим

$$\frac{x^2}{4} = 1 - x^2.$$

или

$$5x^2 = 4, \quad x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$x = -\frac{2}{\sqrt{5}} < 0$ не является решением уравнения.

Проверкой убеждаемся, что $x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ есть решение уравнения.

Ответ. $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Пример 5. Решить неравенство $\arcsin x + 2 \arccos x > \frac{2\pi}{3}$.

Решение. Применив формулу (11.27), получим

$$\frac{\pi}{2} - \arccos x + 2 \arccos x > \frac{2\pi}{3}.$$

откуда

$$\arccos x > \frac{\pi}{6},$$

или

$$\frac{\pi}{6} < \arccos x \leqslant \pi.$$

Взяв косинус от каждой из частей двойного неравенства и учитывая, что $\cos x$ на рассматриваемом интервале убывает, получим

$$\cos\frac{\pi}{6} > x \geqslant \cos\pi,$$

или

$$-1 \leqslant x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $-1 \leqslant x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 6. Решить неравенство $\arcsin x < \arcsin(1-x)$.

Решение. Данное неравенство определено при

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant 1-x \leqslant 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -2 \leqslant -x \leqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

откуда находим

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Поскольку арксинус — функция возрастающая, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x < 1-x,$$

откуда

$$x < \frac{1}{2}.$$

С учетом области определения находим решения $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$.

Ответ. $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$.

## § 8. Графические способы решения уравнений, неравенств и их систем, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции

Предварительно построим несколько графиков функций, содержащих обратные тригонометрические функции.

Пример 1. Построить график функции

$$y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x).$$

Решение. Функция определена при $-\infty < x < +\infty$. По формуле (11.14) имеем

$$y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \equiv x \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty.$$

График данной функции совпадает с графиком функции $y = x$ (рис. 173).

Пример 2. Построить график функции $y = \arccos(\cos x)$.

Решение. Функция $\cos x$ при всех действительных значениях $x$ изменяется на отрезке $[-1; 1]$, поэтому данная функция определена при $-\infty < x < +\infty$.

По формуле (11.10) при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ $y = \arccos(\cos x) \equiv x$.

Учитывая, что функция $y = \arccos(\cos x)$ — четная и периодическая с периодом $2\pi$, строим ее график (рис. 174).

Функцию $\arccos(\cos x)$ можно представить в виде

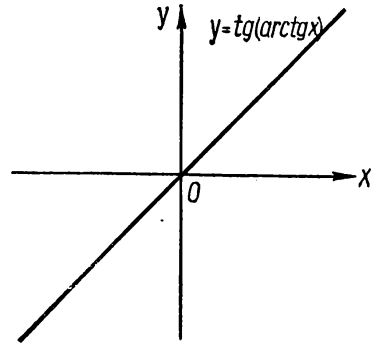



Рис. 173.

$$y = \arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi n & \text{при } 2\pi n \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi, \\ 2\pi n - x & \text{при } (2n-1)\pi \leqslant x \leqslant 2\pi n \end{cases}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример 3. Найти графически действительные корни уравнения

$$2 \lg |x| - \operatorname{arctg} x = 0.$$

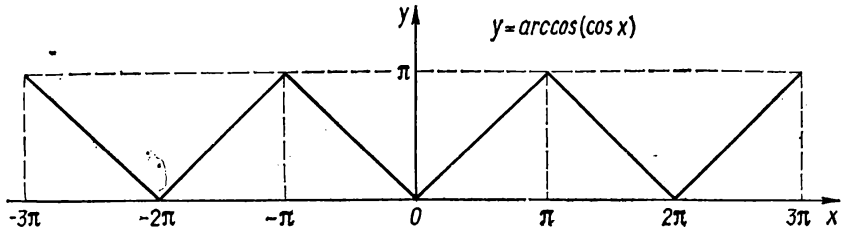



Рис. 174.

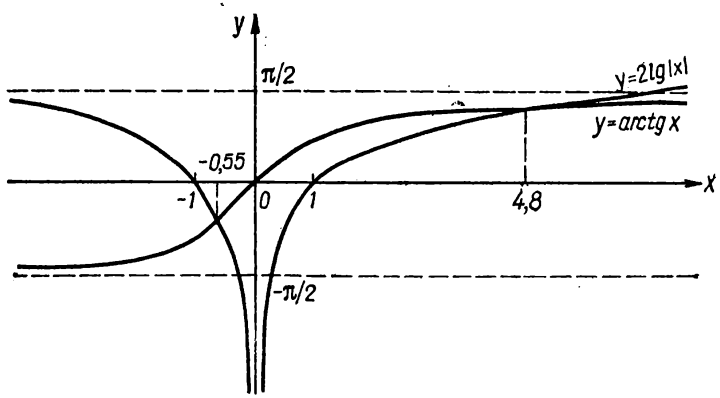



Рис. 175.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в виде

$$2 \lg |x| = \operatorname{arctg} x$$

и построим графики функций $y = 2 \lg |x|$ и $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 175).

По рисунку находим $x_1 \approx -0{,}55$, $x_2 \approx 4{,}8$.

О т в е т. $x_1 \approx -0{,}55$, $x_2 \approx 4{,}8$.

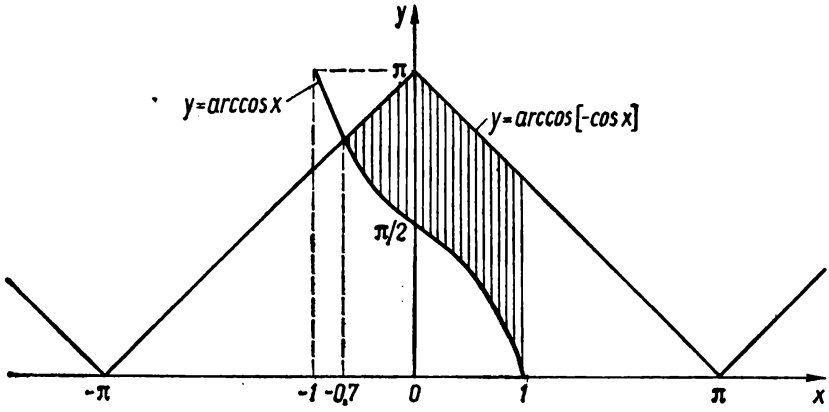



Рис. 176.

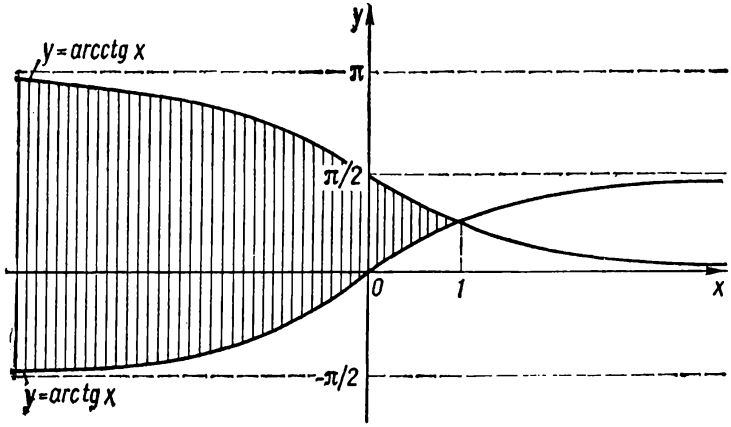



Рис. 177.

П р и м е р 4. Решить графически неравенство $\arccos(-\cos x) > \arccos x$.

Р е ш е н и е. Данное неравенство определено при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Построим графики функций $y = \arccos(-\cos x)$ и $y = \arccos x$ (рис. 176).

Из рисунка 176 находим решения $-0{,}7 < x \leqslant 1$.

О т в е т. $-0{,}7 < x \leqslant 1$.

Пример 5. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant \operatorname{arctg} x, \\ y \leqslant \operatorname{arcctg} x. \end{cases}$$

Решение. Построим графики функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 177).

Из графика находим решения данной системы неравенств (на рис. 177 заштрихованная область).

Аналитически решения данной системы можно записать так:

$$\begin{cases} -\infty < x \leqslant 1, \\ \operatorname{arctg} x \leqslant y \leqslant \operatorname{arcctg} x. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} -\infty < x \leqslant 1, \\ \operatorname{arctg} x \leqslant y \leqslant \operatorname{arcctg} x. \end{cases}$

**Упражнения**

Вычислить.

511. $\arccos(\cos 18) - \arcsin(\sin 16)$.

512. $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-2)] + \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 5)$.

513. $\sin(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2)$.

514. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{5}{13} - \arccos\frac{3}{5}\right)$.

515. $\sin^2\left[3\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

516. $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin\frac{12}{13}\right)$.

517. $\cos\left[\frac{1}{2}\arcsin 0{,}8 - 2\operatorname{arcctg}(-0{,}5)\right]$.

518. $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arctg} 1 - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

519. $\arccos\{\cos[2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)]\}$.

520. $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}} + \arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$.

Доказать тождества.

521. $\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) - \operatorname{arcctg}\sqrt{2} \equiv \frac{\pi}{4}$.

522. $2\operatorname{arctg} 10 + \arcsin\frac{20}{201} \equiv \pi$.

523. $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 \equiv \pi$.

524. $\arcsin 0{,}6 - \arcsin 0{,}8 \equiv -\arcsin 0{,}28$.

525. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arcctg} 4 \equiv \operatorname{arcctg}\frac{43}{32}$.

526. $\arccos\frac{36}{85} - \arccos\frac{15}{17} + \arcsin\frac{4}{5} \equiv \frac{\pi}{2}$.

527. $\cos(2\operatorname{arctg} 2) - \sin(4\operatorname{arctg} 3) \equiv 0{,}36$.

528. $2\operatorname{arctg} x \equiv \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$, если $-1 < x < 1$.

529. $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} \equiv 2 \operatorname{arctg} x$, если $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

530. $4 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 3 \arcsin x \equiv \frac{\pi}{2} + \arccos x$, если $|x| < 1$.

Решить уравнения.

531. $\arcsin x - \arccos x = \frac{\pi}{3}$.

532. $\arccos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{arctg}(x-1)$.

533. $\operatorname{arctg}(x+3) - \operatorname{arctg}(x+2) = \frac{\pi}{4}$.

534. $\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} 5x = \frac{\pi}{4}$.

535. $2 \arccos x + \arccos(1-x) = \pi$.

536. $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \frac{3\pi}{4}$.

537. $2 \operatorname{arctg} x + 5 \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

538. $\sin(4 \operatorname{arctg} x) = 1$.

539. $\operatorname{arctg} 3^x - \operatorname{arctg} 3^{-x} = \frac{\pi}{6}$.

540. $3x - \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}\right) = 0$.

541. $\operatorname{arctg}(2+\cos x) - \operatorname{arctg}(1+\cos x) = \frac{\pi}{4}$.

Решить неравенства.

542. $\arcsin x > \operatorname{arcctg} x$.

543. $\operatorname{arctg} x < \arccos(1-x^2)$.

544. $\operatorname{arctg}(x+2) + \operatorname{arctg} x < \operatorname{arctg} 2$.

545. $\lg(\arcsin x) > -1$.

546. $(\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arcctg} x)^2 < \frac{5\pi^2}{36}$.

547. Построить графики функций:

а) $y = \arccos |x|$;

б) $y = \arcsin(\sin x)$;

в) $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$;

г) $y = 1 + |\arcsin x|$;

д) $y = \operatorname{tg}(\arccos x)$;

е) $y = x \sin(\arcsin x)$;

ж) $y = \arccos(x-5)$.

548. Решить графически уравнение $\sqrt{x+1} - \operatorname{arctg} x = 0$.

549. Решить графически неравенство $\pi x^2 - 4 \operatorname{arctg} x > 0$.

550. Решить графически систему неравенств $\begin{cases} 2^{|x|} - 8 > 0, \\ 4 \operatorname{arcctg} \frac{x}{5} - \pi > 0. \end{cases}$

# Глава 12

# СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

## § 1. Соединения (комбинаторика)

Соединениями называются группы (множества), составленные из каких-либо предметов (цифр, букв, книг, геометрических фигур и др.).

Предметы, из которых составлены соединения, называются *элементами*.

В элементарной алгебре рассматривают три вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

**Размещения.** Пусть дано некоторое множество $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$, состоящее из $n$ элементов.

Размещениями из $n$ элементов по $k$ ($k \leqslant n$) называются соединения, в каждое из которых входит $k$ элементов, взятых из данных $n$ элементов, и которые отличаются между собой элементами (хотя бы одним) или их порядком ($k \leqslant n$).

Например, из трех элементов $a_1$, $a_2$, $a_3$ по одному можно образовать три размещения: $a_1$, $a_2$, $a_3$; по два — шесть размещений: $a_1a_2$, $a_1a_3$, $a_2a_3$, $a_2a_1$, $a_3a_1$, $a_3a_2$; по три — шесть размещений: $a_1a_2a_3$, $a_1a_3a_2$, $a_2a_1a_3$, $a_2a_3a_1$, $a_3a_1a_2$, $a_3a_2a_1$.

Основная задача при изучении размещений заключается в том, чтобы, зная число $x$ данных элементов, вывести формулы, по которым можно было бы подсчитать, сколько размещений по $k$ элементов в каждом можно составить из $n$ данных элементов.

Число размещений из $n$ элементов по $k$ обозначается символом $A_n^k$ (от франц. *Arramgement* — размещение). Так, в приведенном примере

$$A_3^1 = 3, \quad A_3^2 = 6, \quad A_3^3 = 6.$$

**Теорема.** *Число всевозможных размещений из n элементов по k равно произведению k последовательных чисел натурального ряда, наибольшим из которых есть n*, т. е

$$A_n^k = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots[n-(k-1)]. \tag{12.1}$$

Например:

$$A_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720;$$

$$A_{19}^2 = 19 \cdot 18 = 342;$$

$$A_{n+3}^{n-1} = (n+3)\,(n+2)\cdots[n+3-(n-1-1)] = (n+3)\,(n+2)\cdots 6 \cdot 5.$$

**Перестановки.** Перестановками из $n$ элементов называются соединения, из которых каждое содержит $n$ элементов и которые отличаются между собой лишь порядком элементов.

Например, из одного элемента $a_1$ можно составить только одну перестановку; из двух элементов $a_1$ и $a_2$ — две перестановки: $a_1a_2$, $a_2a_1$; из трех элементов $a_1$, $a_2$, $a_3$ — шесть перестановок: $a_1a_2a_3$, $a_1a_3a_2$, $a_2a_1a_3$, $a_2a_3a_1$, $a_3a_1a_2$, $a_3a_2a_1$.

Число всех перестановок из $n$ элементов обозначается символом $P_n$.

**Теорема.** *Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно,* т. е.

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n. \tag{12.2}$$

Произведение $n$ натуральных чисел от 1 до $n$ принято сокращенно обозначать $n!$, т. е.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n = n!; \tag{12.3}$$

читается «$n$ факториал» (от лат. *factor* — множитель).

Тогда формулу (11.2) можно переписать в виде

$$P_n = n! \tag{12.4}$$

Например:

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120;$$

$$P_{10} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800.$$

Пользуясь понятием факториала, фурмулу (12.1) для числа размещений можно переписать так:

$$A_n^k = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots [n-(k-1)] =$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots [n-(k-1)]\,(n-k)\,(n-k-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)\,(n-k-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!},$$

т. е.

$$A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{12.5}$$

**Сочетания.** Сочетаниями из $n$ элементов по $k$ ($k \leqslant n$) называются соединения, в каждое из которых входят $k$ элементов, взятых из данных $n$ элементов, и которые отличаются только элементами (хотя бы одним) ($k \leqslant n$).

Например, из одного элемента $a_1$ можно составить только одно сочетание $a_1$; из двух элементов $a_1$ и $a_2$ — два сочетания по одному элементу: $a_1$, $a_2$ — и одно сочетание по два элемента: $a_1a_2$.

Из трех элементов — $a_1$, $a_2$, $a_3$ можно составить три сочетания по одному элементу: $a_1$, $a_2$, $a_3$; три сочетания по два элемента: $a_1a_2$, $a_1a_3$, $a_2a_3$; одно сочетание по три элемента: $a_1a_2a_3$.

Число различных сочетаний из $n$ элементов по $k$ обозначается символом $C_n^k$ (от лат. *combinare* — соединить). Поэтому сочетания называются еще *комбинациями*.

Вместо обозначения $C_n^k$ употребляют также обозначение $\binom{n}{k}$.

**Теорема.** *Число всевозможных сочетаний из n элементов по k равно частному от деления произведения k последовательных чисел натурального ряда, наибольшее из которых равно n, на произведение последовательных натуральных чисел от 1 до k включительно*, т. е

$$C_n^k = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\,k}. \qquad (12.6)$$

Формулу (12.6) для числа сочетаний из $n$ элементов по $k$ можно представить через число размещений и перестановок:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k},$$

или, учитывая (12.5),

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (12.7)$$

Например:

$$C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120,$$

$$C_5^4 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5.$$

Основные свойства числа сочетаний:

1. Имеет место тождество

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (12.8)$$

Рекомендуем читателю, используя формулу (11.7), доказать формулу (12.8).

Формула (12.8) позволяет упростить вычисление числа сочетаний, если $k$ больше половины $n$.

Например:

$$C_{20}^{18} = C_{20}^{20-18} = C_{20}^2 = \frac{20\cdot 19}{1\cdot 2} = 190.$$

2. Имеет место тождество

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \qquad (12.9)$$

Замечание. По определению сочетаний символ $C_n^0$ не имеет смысла. Но в целях единообразной формы записи по определению принимают $C_n^0 = 1$. Аналогично по определению принимают $0! = 1$, $1! = 1$.

Рассмотрим несколько задач и примеров на соединения.

Задача 1. Сколько различных диагоналей можно провести в выпуклом 10-угольнике?

Решение. Вершины выпуклого многоугольника расположены так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Число прямых, которые можно провести через 10 точек — вершин десятиуголь-

ника,— будет равно $C_{10}^2$ (порядок точек, через которые проходит прямая, не учитывается). В это число включены и стороны десятиугольника. Поэтому число диагоналей десятиугольника будет равно

$$C_{10}^2 - 10 = 35.$$

Ответ. 35 диагоналей.

Задача 2. Сколькими различными способами собрание, состоящее из 50-ти человек, может выбрать из своей среды председателя собрания, его заместителя и секретаря?

Решение. Так как из любых трех человек, взятых из данных 50-ти, каждый может быть и председателем, и заместителем, и секретарем, то количество различных способов избрания президиума собрания будет выражаться числом размещений

$$A_{50}^3 = 50 \cdot 49 \cdot 48 = 117600.$$

Ответ: 117 600 способами.

Задача 3. Сколькими способами можно распределить 5 различных предметов между 3 лицами так, чтобы каждое лицо получило по крайней мере по одному предмету?

Решение. Между тремя лицами пять предметов могут быть распределены так: 3, 1 и 1 или 1, 2 и 2.

А. Если первое лицо получает три предмета, то оно их может получить $C_5^3$ способами. Тогда оставшиеся два предмета два остальных лица могут получить двумя способами. Таким образом, если первое лицо получает три предмета, то число способов распределения 5 различных предметов будет равно $C_5^3 \cdot 2 = 2C_5^3$. Но три предмета может получить второе или третье лицо, поэтому общее число способов, когда одно из лиц получает три предмета, составляет $3 \cdot 2 \cdot C_5^3 = 60$.

Б. Если первое лицо получает один предмет, то оно его может получить $C_5^1$ способами. Тогда из оставшихся четырех предметов второе лицо может два предмета получить $C_4^2$ способами; оставшиеся после этого два предмета получит третье лицо. Таким образом, если первое лицо получает один предмет, то число способов распределения предметов будет $C_5^1 \cdot C_4^2$; но один предмет может получить второе или третье лицо, поэтому число способов в этом случае будет $3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^2 = 90$. Искомое число способов составляет $6C_5^3 + 3C_5^1C_4^2 = 150$.

Ответ. 150 способов.

Задача 4. Из ящика, где находится 15 шаров, пронумерованных последовательно от 1 до 15, требуется вынуть три шара. Определить число возможных комбинаций номеров.

Решение. Число возможных комбинаций определяется числом сочетаний

$$C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

Ответ. 455.

Задача 5. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили два числа?

Решение. Так как дроби, составленные из двух чисел — $a$ и $b$, $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$,— различны, то число дробей определяется числом размещений

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Ответ. 30 дробей.

Задача 6. Каким должно быть $k$, чтобы $C_n^k$ было наибольшим?

Пусть число $n$ задано, а $k$ переменно: $0 < k < n$ ($k \neq 0$ и $k \neq n$, так как $C_n^0 = C_n^n = 1$ не может быть наибольшим).

Решение. Значение $k$, при котором $C_n^k$ будет наибольшим, найдем из системы неравенств

$$\begin{cases} C_n^k \geqslant C_n^{k-1}, \\ C_n^k \geqslant C_n^{k+1}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} \geqslant \dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}, \\ \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} \geqslant \dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}, \end{cases}$$

откуда после упрощений получаем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{n-k+1}, \\ \dfrac{1}{n-k} \geqslant \dfrac{1}{k+1} \end{cases} \quad (0 < k < n),$$

или

$$\begin{cases} n-k+1 \geqslant k, \\ k+1 \geqslant n-k; \end{cases} \quad \begin{cases} 2k \leqslant n+1, \\ 2k \geqslant n-1; \end{cases} \quad \frac{n-1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Если $n = 2p+1$ ($n$ нечетное), то $p \leqslant k \leqslant p+1$, т. е. $k = \frac{n-1}{2}$ или $k = \frac{n+1}{2}$; если $n = 2p$ ($n$ четное), то $p - \frac{1}{2} \leqslant k \leqslant p + \frac{1}{2}$, т. е. $k = p = \frac{n}{2}$.

Ответ. При четном $n$ $k = \frac{n}{2}$, при нечетном $n$ $k = \frac{n-1}{2}$ и $k = \frac{n+1}{2}$.

Пример 1. Решить уравнение

$$12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^2.$$

Решение. Пользуясь формулой (12.8), перепишем уравнение в виде

$$12C_{x+3}^4 = 55A_{x+1}^2$$

или

$$12\,\frac{(x+3)\,(x+2)\,(x+1)\,x}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=55\,(x+1)\,x,$$

откуда следует

$$\frac{(x+3)\,(x+2)}{2}=55,\ \text{или}\ (x+3)\,(x+2)=110=11\cdot 10.$$

Так как $x$ — натуральное число, то $x+3=11$ и $x=8$.

Ответ. $x=8$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}.$$

Решение. По условию $x$ — целое число, удовлетворяющее неравенствам $0<x\leqslant 4$ Пользуясь формулой (12.7), перепишем уравнение в виде

$$\frac{x!\,(4-x)!}{4!}-\frac{x!\,(5-x)!}{5!}=\frac{x!\,(6-x)!}{6!},$$

или

$$1-\frac{5-x}{5}=\frac{(5-x)\,(6-x)}{30},$$

откуда после упрощений получаем $x^2-17x+30=0$, или $x_1=2$, $x_2=15$; $x_2=15>4$ не пригодно к решению уравнения.

Ответ. $x=2$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} C_x^y=C_x^{y+2}, \\ C_x^2=153. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения находим

$$\frac{x\,(x-1)}{1\cdot 2}=153,\ \text{или}\ x^2-x-306=0.$$

Решая последнее уравнение, получаем $x_1=-17$, $x_2=18$; $x_1=-17$ не пригодно к решению уравнения, значит, $x=18$.

Подставляя $x=18$ в первое уравнение системы, найдем

$$C_{18}^y=C_{18}^{y+2}.$$

По свойству (11.8) получаем $y+y+2=18$, или $2y=16$, $y=8$.

Ответ. (18; 8).

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_{5x}^{y-3}:A_{5x}^{y-2}=1:7, \\ C_{5x}^{y-2}:C_{5x}^{y-3}=7:4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \dfrac{(5x)!}{(5x-y+3)!} : \dfrac{(5x)!}{(5x-y+2)!} = \dfrac{1}{7}, \\ \dfrac{(5x)!}{(y-2)!\,(5x-y+2)!} : \dfrac{(5x)!}{(y-3)!\,(5x-y+3)!} = \dfrac{7}{4}, \end{cases}$$

или, после упрощений,

$$\begin{cases} 5x-y+3=7, \\ \dfrac{5x-y+3}{y-2} = \dfrac{7}{4}, \end{cases}$$

откуда следует $x=2$, $y=6$.

О т в е т. (2; 6).

## § 2. Бином Ньютона

Бином в переводе на русский язык означает двучлен.

**Произведение биномов, отличающихся только вторыми членами.** Рассмотрим произведения двух, трех и четырех биномов вида $x+a$. После умножения и приведения подобных членов по $x$ получим

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd.$$

Рассматривая эти произведения, легко заметить, что произведение биномов, отличающихся только вторыми членами, есть многочлен, упорядоченный по убывающим степеням первого члена $x$, степень которого равна числу перемножаемых биномов. Коэффициент первого члена многочлена равен 1, а последующие образуются так: второй коэффициент равен сумме всех вторых членов биномов, третий — сумме всевозможных произведений вторых членов по два, четвертый — сумме всевозможных произведений вторых членов по три и т. д. Последний член многочлена равен произведению всех вторых членов биномов.

Методом математической индукции можно доказать, что правило образования произведения биномов, отличающихся только вторыми членами, установлен ое из рассмотрения произведений двух, трех и четырех биномов, верно для произведения любого конечного числа биномов.

Для произведения $n$ биномов справедлива формула

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_{n-1})(x+a_n) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \cdots + S_{n-1}x + S_n, \qquad (12.10)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n, \\ S_2 &= a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-2}a_n + a_{n-1}a_n, \\ S_3 &= a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \cdots + a_{n-2}a_{n-1}a_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{n-1} &= a_1a_2a_3\ldots a_{n-1} + \cdots + a_2a_3a_4\ldots a_n, \\ S_n &= a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n. \end{aligned}$$

Заметим, что формула (12.10) верна и тогда, когда вторые члены равны между собой.

Пример 1. Найти произведение биномов

$$(x+1)(x+2)(x+3).$$

Решение. Пользуясь формулой (12.10), находим

$$(x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + (1+2+3)x^2 + (1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3)x + 1\cdot 2\cdot 3 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6.$$

Ответ. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

Пример 2. Найти произведение биномов

$$(x+1)(x+1)(x+1)(x+1).$$

Решение. Пользуясь формулой (12.10), находим

$$(x+1)(x+1)(x+1)(x+1) = x^4 + (1+1+1+1)x^3 + (1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1)x^2 + (1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1)x + 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

Ответ. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

**Формула бинома Ньютона.** Если в формуле (12.10) положить

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = a_n = a,$$

то получим

$$(x+a)^n = x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \cdots + S_{n-1}x + S_n,$$

где

$$S_1 = a + a + \cdots + a = n\cdot a = C_n^1 a,$$

$$S_2 = \underbrace{aa + aa + \cdots + aa}_{\frac{n(n-1)}{2}\text{ раз}} = \frac{n(n-1)}{2}a^2 = C_n^2 a^2,$$

$$S_3 = \underbrace{aaa + aaa + \cdots + aaa}_{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\text{ раз}} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3 = C_n^3 a^3,$$

. . . . . .

$$S_{n-1} = \underbrace{\underbrace{aa\ldots a}_{n-1\text{ раз}} + \cdots + \underbrace{aa\ldots a}_{n-1\text{ раз}}}_{n\text{ раз}} = na^{n-1} = C_n^{n-1}a^{n-1},$$

$$S_n = \underbrace{aaa\ldots a}_{n\text{ раз}} = a^n = C_n^n a^n.$$

Тогда формула (12.10) принимает вид

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + \cdots + C_n^k a^k x^{n-k} + \cdots + C_n^{n-1}a^{n-1}x + a^n. \qquad (12.11)$$

Формула (12.11) называется *формулой бинома Ньютона*, а правая часть ее называется *разложением бинома*.

Например:

$$(x+a)^5 = x^5 + C_5^1 ax^4 + C_5^2 a^2 x^3 + C_5^3 a^3 x^2 + C_5^4 a^4 x + C_5^5 a^5 =$$
$$= x^5 + 5ax^4 + 10a^2 x^3 + 10a^3 x^2 + 5a^4 x + a^5.$$

Свойства разложения бинома Ньютона:

1. Количество членов разложения бинома на единицу больше показателя степени бинома.

2. Все члены разложения имеют одну и ту же степень $n$ относительно первого и второго членов бинома, т. е. разложение есть однородный многочлен, причем показатели первого члена убывают от $n$ до 0, а показатели второго члена возрастают от 0 до $n$.

3. Коэффициенты разложения следуют так: первый равен $1 = C_n^0$, а последующие соответственно равны $C_n^1$, $C_n^2$, $C_n^3$, ..., $C_n^n = 1$, т. е. коэффициент $(k+1)$-го члена равен $C_n^k$. Эти коэффициенты называются *биномиальными*. Заметим, что биномиальные коэффициенты всегда натуральные числа, если показатель бинома натуральное число.

4. Общий член разложения вычисляется по формуле

$$T_{k+1} = C_n^k a^k x^{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k} a^k x^{n-k}. \quad (12.12)$$

5. Биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов разложения, равны между собой.

Действительно, по формуле (11.8)

$$C_n^0 = C_n^n,\ C_n^1 = C_n^{n-1},\ C_n^2 = C_n^{n-2},\ \ldots,\ C_n^k = C_n^{n-k}.$$

6. Из свойств (1) и (5) следует, что если показатель бинома четный, то в разложении бинома средний член имеет наибольший биномиальный коэффициент, а если показатель бинома нечетный, то в разложении имеется два средних члена с одинаковым наибольшим коэффициентом.

7. Последующий биномиальный коэффициент разложения равен предыдущему, умноженному на показатель первого члена бинома в предыдущем члене и деленному на число предыдущих членов:

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k. \quad (12.13)$$

8. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна $2^n$, где $n$ — показатель бинома.

Если в формуле (12.11) положить $x = a = 1$, то получим

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n.$$

9. Если в формуле (12.11) заменить $a$ на $-a$, то получим

$$(x-a)^n = x^n - C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} - \cdots +$$
$$+ (-1)^k C_n^k a^k x^{n-k} + \cdots + (-1)^n a^n. \quad (12.14)$$

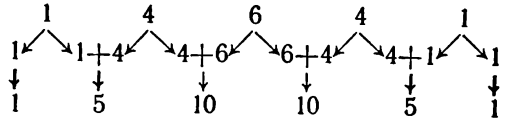
10. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

**Треугольник Паскаля.** Для вычисления биномиальных коэффициентов удобно пользоваться так называемым треугольником Паскаля.

Треугольник Паскаля выглядит так:

| | |
|---|---|
| | 1 |
| $n=1$ | 1 1 |
| $n=2$ | 1 2 1 |
| $n=3$ | 1 3 3 1 |
| $n=4$ | 1 4 6 4 1 |
| $n=5$ | 1 5 10 10 5 1 |
| $n=6$ | 1 6 15 20 15 6 1 |
| $n=7$ | 1 7 21 35 35 21 7 1 |
| . | . . . . . |
| . | |
| . | |

Таблица составлена следующим образом. По боковым сторонам стоят единицы, внутри — числа, получающиеся сложением двух соответствующих чисел предыдущей строки. Например, из 5-й строки 6-я получается так:




Рассмотрим несколько примеров и задач на бином Ньютона.

Пример 1. Найти разложение $(\sqrt{x}+1)^6$.

Решение. Пользуясь формулой (12.11) и треугольником Паскаля ($n=6$), получаем

$$(\sqrt{x}+1)^6=(\sqrt{x})^6+6(\sqrt{x})^5+15(\sqrt{x})^4+20(\sqrt{x})^3+$$
$$+15(\sqrt{x})^2+6\sqrt{x}+1=x^3+6x^2\sqrt{x}+15x^2+$$
$$+20x\sqrt{x}+15x+6\sqrt{x}+1.$$

Пример 2. Найти член разложения

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21},$$

который содержит $a$ и $b$ в одинаковых степенях.

Решение. По формуле (12.12) находим

$$T_{k+1}=C_{21}^k\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^k\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-k}=$$
$$=C_{21}^k\frac{b^{\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{6}}}\frac{a^{\frac{21-k}{3}}}{b^{\frac{21-k}{6}}}=C_{21}^k a^{\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}}b^{\frac{k}{2}-\frac{21-k}{6}}=$$
$$=C_{21}^k a^{\frac{42-3k}{6}}b^{\frac{4k-21}{6}}.$$

По условию задачи $\frac{42-3k}{6}=\frac{4k-21}{6}$, или $7k=63$, $k=9$. Тогда

$$T_{10}=C_{21}^{9}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}=1763580a^{2}\sqrt{ab^{2}}\sqrt{b}.$$

Ответ. $T_{10}=1763580a^{2}b^{2}\sqrt{ab}$.

Пример 3. Найти наименьшее значение $n$ в разложении $(x+a)^n$, при котором отношение двух соседних коэффициентов разложения равно 5 : 8.

Решение. По условию задачи

$$C_n^k : C_n^{k+1}=5:8,$$

или

$$\frac{k+1}{n-k}=\frac{5}{8},$$

откуда следует

$$n=\frac{13k+8}{5}, \text{ или } n=2k+1+\frac{3(k+1)}{5}.$$

Так как $n$ — натуральное число, то оно будет наименьшим при наименьшем натуральном $k$, при котором $k+1$ делится на 5, т. е. при $k=4$. Тогда $n=8+1+3=12$.

Ответ. $n=12$.

Пример 4. При каких значениях $x$ третий член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}+x^{\lg\sqrt{x}}\right)^9$ равен 36000?

Решение. По формуле (12.12) находим

$$T_3=C_9^2\left(x^{\lg\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}\right)^7=36x^{\lg x}\cdot x^{-2}=36x^{\lg x-2}.$$

По условию $36x^{\lg x-2}=36000$, или $x^{\lg x-2}=1000$. Логарифмируя и преобразуя, получим $\lg^2 x-2\lg x-3=0$, откуда следует $\lg x=-1$ и $\lg x=3$, или $x_1=\frac{1}{10}$, $x_2=1000$.

Ответ. $x_1=\frac{1}{10}$, $x_2=1000$.

Пример 5. Найти пятый член разложения $\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt{2^{-1}}\right)^n$, если последний член разложения равен $\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}\right)^{\log_8 8}$.

Решение. По условию последний член разложения

$$\left(-\sqrt{2^{-1}}\right)^n=\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}\right)^{\log_8 8}.$$

Так как показательная функция положительна, то задача имеет решение при $n$ четном. Тогда

$$2^{-\frac{n}{2}}=\left(3^{-\frac{5}{3}}\right)^{\log_3 8}, \text{ или } 2^{-\frac{n}{2}}=\left(3^{\log_3 8}\right)^{-\frac{5}{3}}, \ 2^{-\frac{n}{2}}=2^{-5},$$

откуда следует $-\frac{n}{2}=-5$ и $n=10$.

$$T_5=C_{10}^4\left(\sqrt{2^{-1}}\right)^4\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=210.$$

Ответ. $T_5=210$.

Пример 6. Найти $x$, $y$ и $z$, если известно, что второй, третий и четвертый члены разложения $(x+y)^z$ соответственно равны 240, 720 и 1080.

Решение. По условию и формуле (12.12) имеем

$$\begin{cases} T_2=C_z^1 y x^{z-1}=240, \\ T_3=C_z^2 y^2 x^{z-2}=720, \\ T_4=C_z^3 y^3 x^{z-3}=1080. \end{cases}$$

Решение задачи приводится к решению системы

$$\begin{cases} x^{z-1}yz=240, & (1) \\ x^{z-2}y^2z(z-1)=1440, & (2) \\ x^{z-3}y^3z(z-1)(z-2)=6480. & (3) \end{cases}$$

Разделив почленно уравнение (2) на (1) и (3) на (2), получим

$$\begin{cases} x^{-1}y(z-1)=6, \\ x^{-1}y(z-2)=\frac{9}{2}, \end{cases}$$

откуда следует $\frac{z-1}{z-2}=\frac{6}{\frac{9}{2}}$, $z=5$. Зная $z$, находим $y=3$, $x=2$.

Ответ. $x=2$, $y=3$, $z=5$.

Пример 7. Определить показатель $n$ разложения $\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)^n$, если 10-й член этого разложения по убывающим степеням величины $x$ имеет наибольший коэффициент.

Решение. По формуле (12.12) находим

$$T_{k+1}=C_n^k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{1}{5}x\right)^{n-k}=\left(C_n^k\cdot\frac{2^k}{5^n}\right)\cdot x^{n-k}.$$

Коэффициент $(k+1)$-го члена равен $C_n^k\cdot\frac{2^k}{5^n}$.

По условию коэффициент 10-го члена разложения больше коэффициентов 9 и 11-го членов, т. е.

$$\begin{cases} C_n^9 \cdot \frac{2^9}{5^n} > C_n^8 \cdot \frac{2^8}{5^n}, \\ C_n^9 \cdot \frac{2^9}{5^n} > C_n^{10} \cdot \frac{2^{10}}{5^n}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2(n-8) > 9, \\ 10 > 2(n-9), \end{cases}$$

откуда следует $12{,}5 < n < 14$.

Ответ. $n = 13$.

Пример 8. Найти сумму коэффициентов разложения

$$(3x + 2y - 3)^{10}.$$

Решение. Запишем данное выражение в виде

$$(3x + 2y - 3)^{10} = A_1 x^{10} + A_2 x^9 y + \cdots + A_n.$$

Подставив в это тождество $x = y = 1$, получим

$$(3 + 2 - 3)^{10} = A_1 + A_2 + \cdots + A_n,$$

откуда следует $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 2^{10} = 1024$.

Ответ. Сумма коэффициентов разложения равна 1024.

Пример 9. Доказать, что при всяком натуральном $n$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Решение. Разложим левую часть неравенства по формуле (12.11):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n-1}{2!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Пример 10. Доказать, что $(n+1)^n < n^{n+1}$, где $n$ — натуральное число, не меньше 3 ($n \geqslant 3$).

Доказательство. Разделим обе части данного неравенства на $n^n > 0$; получим неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n,$$

равносильное данному.

Так как по условию $n \geqslant 3$, а

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

то по транзитивному свойству получаем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n,$$

откуда

$$(n+1)^n < n^{n+1}.$$

### Упражнения

551. На плоскости даны $n$ точек, расположенных так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Определить, сколько различных прямых можно провести через эти точки.
552. Сколькими способами можно распределить 6 различных предметов между 3 лицами так, чтобы каждое лицо получило 2 предмета?
553. Сколькими способами можно расставить на полке четыре различные книги по алгебре и три различные книги по геометрии с учетом их порядка, чтобы все книги по геометрии стояли подряд?
554. Сколько чисел, бóльших миллиона, можно составить из цифр 2, 3, 0, 5, 4, 1, 8?
555. Сколькими способами можно выставить дозор из трех солдат и одного офицера, если есть 80 солдат и 3 офицера?
556. Доказать

$$\frac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{n-1}} = 1.$$

557. Доказать

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + 2^nC_n^n = 3^n.$$

558. Решить уравнение

$$\frac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42.$$

559. Решить уравнение

$$C_{x+3}^{x+1} = C_{x+1}^{x-1} + C_{x+1}^{x} + C_x^{x-2}.$$

560. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_x^{y-3} : A_x^{y-2} = 1 : 8, \\ C_x^{y-3} : C_x^{y-2} = 5 : 8. \end{cases}$$

561. В разложении $\left(x\sqrt[3]{x} - \sqrt{2}\right)^n$ найти член, содержащий $x^4$, если коэффициент третьего члена разложения равен 90.
562. Коэффициенты пятого, шестого и седьмого членов разложения $(1+x)^n$ образуют арифметическую прогрессию. Найти $n$.
563. Коэффициенты 4-го и 6-го членов разложения $(1+x)^{n+1}$ равны между собой. Найти $n$.
564. Определить $x$ так, чтобы третий член разложения $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}} + \right.$ $\left. + \frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ равнялся 240.
565. Найти наибольший член разложения $(1+\sqrt{2})^{50}$.
566. Сумма коэффициентов разложения $(1+x)^n + (1+x)^{n+1}$ равна 1536. Найти коэффициент при $x^6$.
567. Доказать

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \cdots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

568. Девятый член разложения

$$\left[\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{x})^{5\lg x}} + x^{2\lg \sqrt[x]{x}}\right]^{10}$$

равен 450. Найти $x$.
569. Найти сумму коэффициентов разложения $(2a - 5b + 1)^6$.
570. Доказать, что $23^n - 1$ делится на 22.

# Глава 13

# ПРЕДЕЛЫ

## § 1. Предел последовательности. Свойства бесконечных последовательностей

Постоянное число $a$ называется *пределом последовательности*

$$\{u_n\} = u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N$, начиная с которого все последующие члены последовательности удовлетворяют неравенству

$$|u_n - a| < \varepsilon \quad (n > N). \tag{13.1}$$

Записывают это так:

$$u_n \to a \text{ при } n \to +\infty \text{ или } \lim_{n \to +\infty} a_n = a$$

(читают: «$u_n$ стремится к $a$ при $n$ стремится к бесконечности или предел $u_n$ при $n$ стремится к бесконечности равен $a$»).

Неравенство (13.1) можно переписать в виде

$$-\varepsilon < u_n - a < \varepsilon,$$

или

$$a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon. \tag{13.2}$$

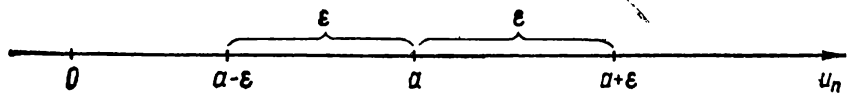



Рис. 178.

Интервал (промежуток) $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется *$\varepsilon$-окрестностью точки $a$* (рис. 178).

Пользуясь понятием $\varepsilon$-окрестности, определение предела числовой последовательности можно сформулировать следующим образом: число $a$ есть предел последовательности $\{u_n\}$, если можно указать такой номер $N$, что все члены последовательности с номерами, бóльшими $N$, находятся в $\varepsilon$-окрестности точки $a$, где $\varepsilon$ — любое как угодно малое положительное число ($\varepsilon > 0$), т. е. все члены последовательности с номерами, бóльшими $N$, на оси $Ou_n$ (см. рис. 178) изображаются точками, лежащими от точки $a$ на расстоянии, меньшем $\varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Пример. Доказать, что предел последовательности с общим членом $u_n = \frac{3n}{n+1}$ равен 3, т. е.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n}{n+1} = 3.$$

Решение. По определению предела последовательности число 3 будет пределом данной последовательности, если для любого $\varepsilon > 0$ укажем такой номер $N$, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|u_n - 3| < \varepsilon,$$

или

$$\left| \frac{3n}{n+1} - 3 \right| < \varepsilon.$$

Пусть задано произвольное положительное число $\varepsilon$; тогда из последнего неравенства находим $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$, или $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$.

Если теперь в качестве $N$ взять любое натуральное число не меньше $\frac{3}{\varepsilon} - 1$, то при всех $n > N$ для любого $\varepsilon > 0$ будет выполняться неравенство

$$|u_n - 3| < \varepsilon, \text{ или } \left| \frac{3n}{n+1} - 3 \right| < \varepsilon;$$

значит, по определению,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n}{n+1} = 3.$$

Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}1$; тогда $\frac{3}{\varepsilon} - 1 = \frac{3}{0{,}1} - 1 = 29$ и $N = 29$. Возьмем любой член данной последовательности с номером, бóльшим 29, например $u_{40} = \frac{3 \cdot 40}{40+1} = \frac{120}{41}$, и найдем величину

$$|u_{40} - 3| = \left| \frac{120}{41} - 3 \right| = \frac{3}{41} < 0{,}1.$$

Если $\varepsilon = 0{,}0001$, то $\frac{3}{\varepsilon} - 1 = 29\,999$ и $N = 29\,999$. Возьмем произвольный член последовательности с номером, бóльшим $N$, например $u_{50\,000} = \frac{3 \cdot 50\,000}{50\,000+1} = \frac{150\,000}{50\,001}$, и найдем величину

$$|u_{50\,000} - 3| = \left| \frac{150\,000}{50001} - 3 \right| = \frac{3}{50\,001} < 0{,}0001.$$

Для любого $\varepsilon > 0$, пользуясь выражением $\frac{3}{\varepsilon} - 1$, можно подобрать натуральное число $N \geqslant \frac{3}{\varepsilon} - 1$ такое, что все члены последовательности с номерами, бо́льшими $N$, будут находиться в $\varepsilon$-окрестности числа 3, а это значит (по определению), что $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$.

Ответ. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$.

Бесконечные последовательности обладают следующими свойствами:

1. Если к бесконечной последовательности приписать или отбросить от нее конечное число членов, сходимость последовательности не изменится.

2. Если все члены последовательности умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то сходимость последовательности не изменится. Предел сходящейся последовательности в данном случае тоже умножится или разделится на это число, т. е. если

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = a, \text{ то } \lim_{n \to +\infty} (cu_n) = ac \text{ и } \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{c} = \frac{a}{c} \ (c \neq 0).$$

3. Сходящиеся последовательности можно почленно складывать и вычитать; в результате получаются сходящиеся последовательности, пределы которых равны соответственно сумме или разности пределов данных последовательностей, т. е. если

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = a \text{ и } \lim_{n \to +\infty} v_n = b,$$

то

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = a + b \text{ и } \lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = a - b.$$

## § 2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

*Бесконечно малой последовательностью* называется такая последовательность, предел которой равен нулю, т. е. $\{u_n\}$ — бесконечно малая последовательность, если

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Если не пользоваться понятием предела последовательности, то определение бесконечно малой последовательности можно сформулировать так: последовательность $\{u_n\}$ называется бесконечно малой, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такой номер $N$, начиная с которого все члены последовательности удовлетворяют неравенству

$$|u_n| < \varepsilon \ (n > N). \tag{13.3}$$

Последовательность, все члены которой равны нулю, также называется бесконечно малой.

Пример. Показать, что последовательность $\{u_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ — бесконечно малая.

Решение. Покажем, что предел $u_n = \frac{1}{n}$ при $n \to +\infty$ равен 0. Пусть задано любое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неравенство

$$|u_n - 0| < \varepsilon, \text{ или } \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

откуда $n > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. как только номер членов последовательности $n > N$, где $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, имеет место неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Следовательно,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

т. е. последовательность $\{u_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ — бесконечно малая.

**Основные свойства бесконечно малых последовательностей.**

1. Бесконечно малая последовательность есть ограниченная последовательность.
2. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
3. Произведение бесконечно малой последовательности $\{u_n\}$ на число $c$ есть бесконечно малая последовательность $\{cu_n\}$.
4. Частное от деления бесконечно малой последовательности $\{u_n\}$ на число $c \neq 0$ есть бесконечно малая последовательность $v_n = \left\{\frac{u_n}{c}\right\}$.

Последовательность $\{u_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для всякого как угодно большого положительного числа $M$ $(M > 0)$ можно указать такой номер $N$, начиная с которого все последующие члены последовательности удовлетворяют неравенству

$$|u_n| > M \ (n > N). \tag{13.4}$$

Если последовательность $\{u_n\}$ — бесконечно большая, то пишут

$$u_n \to \infty \text{ при } n \to +\infty \text{ или } \lim_{n \to +\infty} u_n = \infty$$

(читают: «$u_n$ стремится к бесконечности при $n$ стремится к плюс бесконечности или предел $u_n$ и $n$ стремится к бесконечности равен бесконечности»).

Бесконечно большая последовательность может принимать, начиная с некоторого номера, только положительные значения (тогда пишут $u_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ или $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$) или только отрицательные (тогда пишут $u_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$ или $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

Символ $\infty$ ($+\infty$ или $-\infty$) не является числом, а употребляется только для условной краткой записи предложения: «величина $u_n$ в процессе изменения по абсолютной величине неограниченно возрастает». Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ не является равенством (а только символической записью), так как $\infty$ не является числом. Говорить о каких-либо действиях над $\infty$ не имеет смысла. Однако пользоваться символическими записями с помощью $\infty$ удобно.

**Основные свойства бесконечно больших последовательностей.**

1. Арифметическая сумма нескольких бесконечно больших последовательностей одного и того же знака есть бесконечно большая последовательность.

Например, если $u_n \to +\infty$ и $v_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, то и $u_n + v_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$; если $u_n \to -\infty$ и $v_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$, то и $u_n + v_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$.

2. Сумма бесконечно большой и ограниченной последовательностей есть последовательность бесконечно большая.

Если $u_n \to \infty$ при $n \to +\infty$, а $|v_n| < M$, где $M > 0$ — постоянная величина, то $u_n + v_n \to \infty$ при $n \to +\infty$.

3. Произведение бесконечно большой последовательности $\{u_n\}$ на постоянное число $c \neq 0$ есть бесконечно большая последовательность.

Если $u_n \to \infty$ при $n \to +\infty$ и $c \neq 0$ — постоянная величина, то $cu_n \to \infty$ при $n \to +\infty$.

4. Частное от деления бесконечно большой последовательности $\{u_n\}$ на постоянное число $c \neq 0$ есть бесконечно большая последовательность.

Если $u_n \to \infty$ при $n \to +\infty$ и $c \neq 0$ — постоянное число, то $\frac{u_n}{c} \to \infty$ при $n \to +\infty$.

5. Если последовательность $\{u_n\}$ — бесконечно большая, причем $u_n \neq 0$ ни при каком $n$, то последовательность $\left\{\frac{1}{u_n}\right\}$ — бесконечно малая. Наоборот, если последовательность $\{v_n\}$ — бесконечно малая, причем $v_n \neq 0$ ни при каком $n$, то последовательность $\left\{\frac{1}{v_n}\right\}$ — бесконечно большая.

Если $u_n \to \infty$ при $n \to +\infty$, причем $u_n \neq 0$ при всех значениях $n$, то $\frac{1}{u_n} \to 0$ при $n \to +\infty$. Если $v_n \to 0$ при $n \to +\infty$, причем $v_n \neq 0$ при всех значениях $n$, то $\frac{1}{v_n} \to \infty$ при $n \to +\infty$.

6. Частное $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ от деления ограниченной последовательности $\{u_n\}$ на бесконечно большую последовательность $\{v_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

Если $|u_n| < M$, где $M > 0$ — некоторое положительное число, и $v_n \to \infty$ при $n \to +\infty$, то $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ — бесконечно малая последователь-

ность, т. е. $\frac{u_n}{v_n} \to 0$ при $n \to +\infty$. В частности, частное от деления бесконечно малой последовательности на бесконечно большую последовательность есть бесконечно малая последовательность.

## § 3. Основные свойства пределов. Признаки существования пределов

1. Последовательность $\{u_n\}$ называется *постоянной*, если все ее члены равны постоянному числу $c$, т. е.

$$u_n = c \text{ при всех } n.$$

Предел постоянной последовательности $\{u_n\} = c$ равен постоянному числу $c$, т. е. если $u_n = c$, то

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = c.$$

2. Если $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, то $\{u_n\} = \{a + x_n\}$, где $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

3. Если последовательность имеет предел (т. е. является сходящейся), то она ограниченная, т. е. если $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, то $|u_n| < M$, где $M > 0$ — некоторое положительное число.

4. Если последовательность имеет предел, то только один.

5. Предел суммы двух последовательностей равен сумме их пределов, если предел каждого слагаемого существует, т. е.

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n + \lim_{n \to +\infty} v_n, \tag{13.5}$$

если пределы справа существуют.

6. Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов, если пределы множителей существуют, т. е.

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n \cdot \lim_{n \to +\infty} v_n, \tag{13.6}$$

если пределы справа существуют.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак *предела*, т. е.

$$\lim_{n \to +\infty} (cu_n) = c \lim_{n \to +\infty} u_n. \tag{13.6,а}$$

Следствие 2. Предел произведения любого конечного количества последовательностей равен произведению пределов множителей, если предел каждого множителя существует.

Следствие 3. Предел степени последовательности, имеющей предел, равен степени предела последовательности, т. е.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n^{\alpha} = \left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right)^{\alpha}, \tag{13.7}$$

если $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ существует.

Следствие 4. Предел корня из сходящейся последовательности равен корню той же степени из предела последовательности, т. е.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[m]{u_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to+\infty} u_n}, \tag{13.8}$$

если предел справа существует (предполагается также, что корни слева и справа существуют, т. е. если корни являются корнями четной степени, то подкоренные выражения неотрицательны).

7. Предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному их пределов, если предел делителя не равен нулю, т. е.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}, \tag{13.9}$$

если пределы справа существуют и $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$.

В тех случаях, когда пределы отдельных последовательностей, над которыми производятся действия, не существуют, то это еще не означает, что не существует общий предел (предел результата действий). Последний может существовать, только он не может быть найден с помощью указанных свойств пределов; его следует находить в каждом отдельном случае особыми приемами.

То же самое можно сказать о пределе частного, когда пределы делимого и делителя равны нулю.

Рассмотрим примеры на нахождение пределов последовательностей.

Пример 1. Дана последовательность $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Найдем разность $|u_n - 2|$

$$|u_n - 2| = \left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2n-6}{n+3}\right| = \frac{5}{n+3}.$$

По определению предела должно выполняться неравенство

$$\frac{5}{n+3} < \varepsilon,$$

откуда

$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 3.$$

Следовательно, $|u_n - 2| < \varepsilon$, если $n > \dfrac{5}{\varepsilon} - 3 = N$.

Поэтому

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

Находить пределы последовательностей, пользуясь непосредственно определением предела, нецелесообразно.

Рассмотренный предел можно найти, применяя свойства пределов:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}2+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to+\infty}1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}}=\frac{2+0}{1+0}=2.$$

Обычно все промежуточные выкладки опускают, и тогда решение выглядит так:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=2.$$

Пример 2. Найти предел

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_{m-1}n+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_{k-1}n+b_k}.$$

Решение. Рассмотрим отдельно три случая: $m<k$, $m=k$ и $m>k$.

а) Пусть $m<k$; тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_{m-1}n+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_{k-1}n+b_k}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{a_0}{n^{k-m}}+\frac{a_1}{n^{k-m+1}}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{n^{k-1}}+\frac{a_m}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{b_k}{n^k}}=0.$$

б) Пусть $m=k$; тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_{m-1}n+a_m}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_{m-1}n+b_m}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{n^{m-1}}+\frac{a_m}{n^m}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{n^{m-1}}+\frac{b_m}{n^m}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

в) Пусть $m > k$; тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_{m-1} n + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_{k-1} n + b_k} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{a_m}{n^m}}{\frac{b_0}{n^{m-k}} + \frac{b_1}{n^{m-k+1}} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{n^{m-1}} + \frac{b_k}{n^m}} = \infty.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_{m-1} n + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_{k-1} n + b_k} =$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } m < k; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, \text{ если } m = k; \\ \infty, \text{ если } m > k. \end{cases}$$

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt[4]{4n^2-3}\right).$$

Решение. Применить непосредственно свойства пределов здесь нельзя. Чтобы найти данный предел, умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt[4]{4n^2-3}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1-\sqrt{4n^2-3}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt[4]{4n^2-3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-\sqrt{4n^2-3}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt[4]{4n^2-3}} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt[4]{4n^2-3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-\sqrt{4n^2-3}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt[4]{4n^2-3}} \text{ (второй предел равен нулю).}$$

К последнему пределу тоже нельзя применить непосредственно свойства пределов. Найдем отдельно предел числителя. Для этого применим тот же прием, т. е.

$$\lim_{n\to+\infty} (2n - \sqrt{4n^2-3}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2 - 4n^2 + 3}{2n + \sqrt{4n^2-3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2n + \sqrt{4n^2-3}} = 0.$$

Следовательно, числитель есть общий член бесконечно малой последовательности. Так как знаменатель — общий член бесконечно большой последовательности, то последовательность

$$\left\{\frac{2n-\sqrt{4n^2-3}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt[4]{4n^2-3}}\right\}$$

бесконечно мала, а ее предел равен нулю.

Ответ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt[4]{4n^2-3}\right)=0.$

Пример 4. Найти предел

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{2n+5}}{\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt[5]{n+3}}.$$

Решение. Применить непосредственно свойства пределов здесь тоже нельзя. Разделим числитель и знаменатель выражения, стоящего под знаком предела, на $\sqrt{n}$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{2n+5}}{\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt[5]{n+3}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3-\frac{1}{n}}-\sqrt[6]{\frac{(2n+5)^2}{n^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[10]{\frac{(n+3)^2}{n^5}}}=\sqrt{3}.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{2n+5}}{\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt[5]{n+3}}=\sqrt{3}.$

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$.

Решение. На основании свойства 6 последовательность $\left\{\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right\}$ бесконечно мала, поэтому предел равен нулю.

Ответ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=0.$

Признаки существования пределов:

1. Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

2. Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ удовлетворяют условию $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$ при всех значениях $n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$.

## § 4. Понятие числового ряда. Сумма ряда. Необходимый признак сходимости. Основные свойства рядов

Пусть дана числовая последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Составим выражение

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \qquad (13.10)$$

Это выражение (13.10) называется *числовым рядом*. Члены последовательности $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$, ... называются *членами ряда*. *Общим* членом ряда называется $n$-й член ряда $a_n$.

Примеры числовых рядов:

1) $1+2+3+\cdots+n+\cdots$

2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

3) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$

4) $-\frac{1}{3}-\frac{3}{3^2}-\frac{5}{3^3}-\cdots-\frac{2n-1}{3^n}-\cdots$

5) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\cdots$

6) $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$

7) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^{3n}}-\frac{1}{2^{3n+1}}-\frac{1}{2^{3n+2}}+\cdots$

Если все члены ряда имеют одинаковые знаки, то ряд называется *знакопостоянным* (знакоположительным или знакоотрицательным). Ряды 1—4 знакопостоянные, причем ряды 1—3 знакоположительные, а ряд 4 — знакоотрицательный.

Если члены ряда имеют различные знаки, то ряд называется *знакопеременным*. Если знаки членов ряда последовательно чередуются, то ряд называется *знакочередующимся*.

Ряды 5—7 знакопеременные, причем ряды 5 и 6 знакочередующиеся.

Сумма $n$ первых членов ряда называется $n$-й *частичной* суммой ряда. Частичная сумма ряда обозначается $S_n$; согласно определению,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{13.11}$$

Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует предел последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм при $n \to +\infty$.

Если предел последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм числового ряда существует, то его обозначают $S$ и называют суммой ряда, т. е.

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n. \tag{13.12}$$

Если предел последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм числового ряда не существует, то ряд называется *расходящимся*.

В случае, когда $S_n \to \infty$ при $n \to +\infty$, числовой ряд называется *собственно расходящимся*.

Если же $S_n$ ни к чему не стремится при $n \to +\infty$, то числовой ряд называется *несобственно расходящимся* или *колеблющимся*.

В дальнейшем под словом *ряд* везде будем понимать числовой ряд.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

Р е ш е н и е. Найдем частичную сумму ряда

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Тогда

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма равна 2.

О т в е т. Ряд сходится; $S = 2$.

П р и м е р 2. Исследовать сходимость ряда

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$$

Р е ш е н и е. Находим

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{1}{2} n (n+1).$$

Тогда

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} n (n+1) = +\infty.$$

Так как предел последовательности $\{S_n\}$ при $n \to +\infty$ не существует, то ряд расходится, причем $S_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, поэтому данный ряд — собственно расходящийся.

О т в е т. Рассматриваемый ряд — собственно расходящийся.

П р и м е р 3. Исследовать сходимость ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$$

Р е ш е н и е. Находим

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 \text{ при } n \text{ нечетном,} \\ 0 \text{ при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ не существует, причем $S_n$ ни к чему не стремится при $n \to +\infty$ ($S_n$ колеблется, принимая поочередно значения 1 или 0).

Поэтому данный ряд — несобственно расходящийся.

О т в е т. Рассматриваемый ряд — несобственно расходящийся.

**Геометрический ряд.** *Геометрическим рядом* называется числовой ряд, члены которого представляют собой геометрическую прогрессию.

Геометрический ряд имеет вид

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0). \tag{13.13}$$

Исследуем сходимость геометрического ряда. Рассмотрим отдельно три случая.

1) $|q| \neq 1$. Находим

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \text{если } |q| < 1, \text{ ряд сходится;} \\ \infty, & \text{если } |q| > 1, \text{ ряд расходится (собственно).} \end{cases}$$

2) $q = 1$. В этом случае

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ раз}} = na.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} na = \infty$$

и ряд собственно расходящийся.

3) $q = -1$. Находим

$$S_n = a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n+1}a = \begin{cases} a, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ не существует; $S_n$ колеблется при $n \to +\infty$. Ряд несобственно расходится (т. е. он колеблющийся).

Вывод: геометрический ряд (13.13) сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

Необходимый признак сходимости числового ряда. Если числовой ряд сходится, то предел его $n$-го члена равен нулю, т. е.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \tag{13.14}$$

Доказательство. Если данный ряд сходится, то существуют пределы

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \text{ и } \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S;$$

учитывая, что

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1},$$

получим

$$\lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad (S - S).$$

Замечание. Следует учесть, что если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя; ряд может сходиться или расходиться.

Если предел $n$-го члена числового ряда не равен нулю, то такой ряд расходится.

**Гармонический ряд.** Ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \tag{13.15}$$

называется *гармоническим.*

Общий член этого ряда $a_n=\frac{1}{n}$ стремится к нулю при $n\to+\infty$. Однако этот ряд расходится. Докажем это.

Рассмотрим частичную сумму гармонического ряда

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\text{ раз}}=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k\text{ раз}}=1+\frac{1}{2}k.$$

Если $n\to+\infty$, то и $k\to+\infty$; поэтому $S_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$ и ряд расходится.

Основные свойства рядов.

1. Сходимость ряда не изменится, если приписать к нему или отбросить от него конечное число членов.

2. Сходимость ряда не изменится, если все его члены умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать; в результате получаются сходящиеся ряды, суммы которых равны соответственно сумме или разности сумм данных рядов.

## § 5. Суммирование некоторых конечных последовательностей

**Суммы одинаковых натуральных степеней $n$ первых чисел натурального ряда.**

Рассмотрим суммы вида

$$S_n^{(p)}=1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p,$$

где $n$ и $p$ — натуральные числа.

Если общий член некоторой последовательности можно представить в виде

$$a_n=f(n)=\varphi(n+1)-\varphi(n), \tag{13.16}$$

то, подставляя $n=1, 2, 3, \ldots$, получим

$$\begin{aligned}
a_1&=\varphi(2)-\varphi(1),\\
a_2&=\varphi(3)-\varphi(2),\\
a_3&=\varphi(4)-\varphi(3),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
a_{k-1}&=\varphi(k)-\varphi(k-1),\\
a_k&=\varphi(k+1)-\varphi(k).
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, найдем

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} + a_k = \varphi(k+1) - \varphi(1),$$

т. е. получим сумму $k$ членов последовательности $\{a_n\}$ как разность $\varphi(k+1) - \varphi(1)$ значений функции $\varphi(n)$ при $n = k+1$ и $n = 1$.

1. Сумма $n$ первых членов натурального ряда

$$S_n^{(1)} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n.$$

По формуле суммы членов арифметической прогрессии находим

$$S_n^{(1)} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (13.17)$$

2. Сумма квадратов $n$ первых членов натурального ряда

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2.$$

В формуле (13.16) в качестве функции $\varphi(n)$ возьмем функцию $\varphi(n) = n^3$; тогда $\varphi(n+1) - \varphi(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$, т. е. имеем тождество

$$3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 - n^3.$$

Подставляя в это тождество $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, получим

$$\begin{aligned}
&3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2^3 - 1^3\\
&3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 3^3 - 2^3\\
&3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 4^3 - 3^3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 = n^3 - (n-1)^3\\
&3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 - n^3.
\end{aligned}$$

Складывая эти тождества, найдем

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n = (n+1)^3 - 1^3,$$

или

$$3S_n^{(2)} + 3\frac{n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1^3,$$

откуда следует

$$S_n^{(2)} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

т. е.

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (13.18)$$

3. Сумма кубов $n$ первых членов натурального ряда

$$S_n^{(3)} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3.$$

В формуле (13.16) в качестве функции $\varphi(n)$ возьмем функцию $\varphi(n) = n^4$; тогда $\varphi(n+1) - \varphi(n) = (n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$, или $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (n+1)^4 - n^4$.

Подставляя $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ и складывая полученные тождества, найдем

$$4S_n^{(3)} + 6S_n^{(2)} + 4S_n^{(1)} + n = (n+1)^4 - 1^4,$$

или

$$4S_n^{(3)} = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 6S_n^{(2)} - 4S_n^{(1)} - n =$$
$$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 2n - n =$$
$$= [n(n+1)]^2,$$

откуда следует

$$S_n^{(3)} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \qquad (13.19)$$

Сопоставляя формулы (13.17) и (13.19), получаем тождество

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3,$$

т. е. $(S_n^{(1)})^2 = S_n^{(3)}$.

Аналогично, взяв в качестве функции $\varphi(n) = n^5$, можно получить

$$S_n^{(4)} = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 \text{ и т. д.}$$

Формулы (13.17) — (13.19) читателю рекомендуется доказать методом математической индукции.

Рассмотрим примеры суммирования некоторых последовательностей.

Пример 1. Найти сумму $n$ членов

$$S_n = 2 + 6 + 12 + 20 + \cdots + n(n+1).$$

Решение. Представим общий член этой суммы в виде

$$a_n = n(n+1) = n^2 + n.$$

Тогда данная сумма может быть записана в виде

$$S_n = (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + \cdots + (n^2 + n) = (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) +$$
$$+ (1 + 2 + \cdots + n) = S_n^{(2)} + S_n^{(1)}.$$

Используя формулы (13.17) и (13.18), получаем

$$S_n = 2 + 6 + 12 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} +$$
$$+ \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Ответ. $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Пример 2. Найти сумму $n$ членов

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n},$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ составляют арифметическую прогрессию.

Представим

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right),$$

где $d$ — разность прогрессии; тогда данную сумму можно переписать в виде

$$S_n = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \cdots + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{d}\,\frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} = \frac{1}{d}\,\frac{a_1 + d(n-1) - a_1}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n},$$

т. е.

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

Ответ: $S_n = \dfrac{n-1}{a_1 a_n}$.

Пример 3. Найти сумму $n$ первых членов последовательности, если $n$-й ее член равен $a_n = na^{n-1}$, т. е.

$$S_n = 1 + 2a + 3a^2 + \cdots + (n-1)\,a^{n-2} + na^{n-1}.$$

Решение. Умножив обе части этого равенства на $a$, получим

$$S_n a = a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + (n-1)\,a^{n-1} + na^n.$$

Вычитая из первого равенства второе, найдем

$$S_n - S_n a = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} - na^n.$$

Использовав формулу суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$S_n(1-a) = \frac{1-a^n}{1-a} - na^n,$$

откуда

$$S_n = \frac{1 - a^n - na^n(1-a)}{(1-a)^2}.$$

Ответ. $S_n = \dfrac{1 - a^n - na^n(1-a)}{(1-a)^2}$.

Пример 4. Найти сумму

$$S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots99}_{n \text{ раз}}.$$

Решение. Представим эту сумму в виде

$$S_n = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \cdots + (10^n - 1) =$$
$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) - n.$$

Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$S_n = \frac{10(1-10^n)}{1-10} - n = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 10 - 9n),$$

т. е.

$$9+99+999+\cdots+\underbrace{99\ldots999}_{n\text{ раз}}=\frac{1}{9}(10^{n+1}-10-9n).$$

Ответ. $S_n=\frac{1}{9}(10^{n+1}-10-9n)$.

Пример 5. Найти сумму

$$S_n=4+44+444+\cdots+\underbrace{44\ldots44}_{n\text{ раз}}.$$

Решение. Представим эту сумму в виде

$$S_n=\frac{4}{9}(9+99+999+\cdots+\underbrace{99\ldots99}_{n\text{ раз}}).$$

Используя результат, полученный при решении примера 4, находим

$$S_n=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}(10^{n+1}-10-9n)=\frac{4}{81}(10^{n+1}-10-9n).$$

Ответ. $S_n=\frac{4}{81}(10^{n+1}-10-9n)$.

## § 6. Суммирование рядов

Если числовой ряд сходится, то возникает задача нахождения его суммы. В общем случае найти точное значение суммы сходящегося числового ряда невозможно. В таком случае находят приближенное значение этой суммы с определенной степенью точности. Для этого заменяют сумму сходящегося ряда его частичной суммой. Количество членов ряда в частичной сумме выбирают в зависимости от требуемой точности.

В отдельных случаях можно найти точно суммы рядов, а в случае расходящихся рядов — найти их частичные суммы в компактном виде.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

Решение. Чтобы найти $n$-ю частичную сумму ряда, представим общий член ряда $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ в виде алгебраической суммы двух простейших дробей. Для этого воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

Представим

$$\frac{1}{n(n+1)}\equiv\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},$$

где $A$ и $B$ — неопределенные коэффициенты. После сложения дробей в правой части и приравнивания числителей (знаменатели будут тождественно равны), получим

$$A(n+1)+Bn\equiv 1, \text{ или } (A+B)n+A\equiv 1.$$

Из условия тождественного равенства многочленов (относительно $n$) получаем

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A=1, \end{cases}$$

откуда находим

$$A=1, \quad B=-1.$$

Тогда

$$\frac{1}{n(n+1)}\equiv\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Учитывая это тождество, находим

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

(все промежуточные слагаемые взаимно уничтожились).

Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Ответ. $S=1$.

Пример 2. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$$

Решение. Имеем

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\equiv\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2},$$

откуда

$$A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)\equiv 1.$$

Чтобы найти коэффициенты $A$, $B$ и $C$, дадим $n$ значения 0, —1, —2 (значения действительных корней знаменателя):

$$n=0, \quad 2A=1, \quad A=\frac{1}{2};$$
$$n=-1, \quad -B=1, \quad B=-1;$$
$$n=-2, \quad 2C=1, \quad C=\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \equiv \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Находим

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Тогда

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{4}.$$

Ответ. $S = \frac{1}{4}$.

Пример 4. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots$$

Решение. Находим

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} = 2\left(\frac{1}{2\cdot 2} + \frac{3}{2\cdot 2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2\cdot 2^n}\right) =$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{3}{2^3}\right) + \cdots + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}\right)\right] =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}\right] =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) -$$

$$- \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{3}{2^n} - \frac{2n}{2^n}.$$

Тогда

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(3 - \frac{3}{2^n} - \frac{2n}{2^n}\right);$$

так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2^n}=0$, то

$$S=3-\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2^n};$$

учитывая, что

$$\frac{n}{2^n}=\frac{n}{(1+1)^n}=\frac{n}{1+n+\frac{n(n+1)}{2}+\cdots+1}<$$

$$<\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n+1}\to 0$$

при $n\to+\infty$, имеем $S=3$.

Ответ. $S=3$.

## § 7. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства

Постоянное число $a$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$ (при $x\to x_0$), если для любого положительного $\varepsilon>0$ можно указать такое число $\delta>0$, что для всех $x\neq x_0$ из неравенства $|x-x_0|<\delta$ следует неравенство

$$|f(x)-a|<\varepsilon.$$

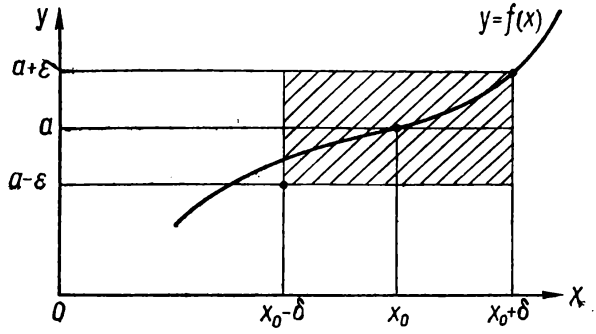



Рис. 179.

Другими словами, постоянное число $a$ называется пределом функции $f(x)$ при $x\to x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое число $\delta>0$, что как только $x$ попадает в $\delta$-окрестность точки $x_0$, то $f(x)$ попадает в $\varepsilon$-окрестность точки $a$ (рис. 179).

Если постоянное число $a$ есть предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$, то это записывают так:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a.$$

Постоянное число $a$ называется пределом функции $f(x)$ при

$x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $M > 0$, чтобы из неравенства $|x| > M$ следовало неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Записывают это так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

Аналогично определяются пределы функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Постоянное число $a'$ называется пределом слева функции $f(x)$ при $x \to x_0$ (в точке $x_0$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $0 < x_0 - x < \delta$ следует неравенство

$$|f(x) - a'| < \varepsilon.$$

Предел слева обозначается символом $f(x_0 - 0)$.

Согласно определению

$$f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x < x_0)}} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a',$$

если $|f(x) - a'| < \varepsilon$ при $0 < x_0 - x < \delta$.

Постоянное число $a''$ называется пределом справа функции $f(x)$ при $x \to x_0$ (в точке $x_0$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $0 < x - x_0 < \delta$ следует неравенство

$$|f(x) - a''| < \varepsilon.$$

Предел справа обозначается символом $f(x_0 + 0)$.

Согласно определению

$$f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x > x_0)}} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a'',$$

если $|f(x) - a''| < \varepsilon$ при $0 < x - x_0 < \delta$.

Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

**Бесконечно малые функции и их свойства.** Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если ее предел при $x \to x_0$ равен нулю, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to \infty$, если $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Рассматривают также отдельно случаи, когда $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Если функция тождественно равна нулю, то она считается бесконечно малой.

Основные свойства бесконечно малых функций следующие.

1. Бесконечно малая функция есть ограниченная функция.

2. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая функция. В частности, произведение постоянной величины на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция. Произведение любого числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

4. Положительная степень (в частности, корень) бесконечно малой функции есть бесконечно малая функция.

5. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую предел, отличный от нуля, есть бесконечно малая функция. Из этого свойства следует, что частное от деления бесконечно малой функции на постоянную величину, отличную от нуля, есть бесконечно малая функция.

**Бесконечно большие функции и их свойства.** Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если для всякого числа $M > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство

$$|f(x)| > M.$$

Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to \infty$, если для всякого числа $M > 0$ можно найти такое число $N > 0$, что из неравенства $|x| > N$ следует неравенство

$$|f(x)| > M.$$

Это записывают так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Рассматривают также отдельно случаи, когда $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Основные свойства бесконечно больших функций следующие.

1. Арифметическая сумма бесконечно больших функций одного и того же знака есть бесконечно большая функция того же знака.

2. Сумма бесконечно большой функции и ограниченной (в частности, постоянной) есть бесконечно большая функция.

3. Произведение бесконечно большой функции на бесконечно большую есть бесконечно большая функция.

4. Произведение бесконечно большой функции на функцию, имеющую предел, отличный от нуля, есть функция бесконечно большая.

5. Положительная постоянная степень (в частности, корень) бесконечно большой функции есть функция бесконечно большая.

6. Частное от деления ограниченной функции (в том числе постоянной) на бесконечно большую функцию есть бесконечно малая функция. В частности, функция, обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая функция, а функция, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая функция.

## § 8. Свойства пределов функции. Признаки существования предела функции

1. Предел постоянной функции равен самой постоянной, т. е.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} C = C.$$

2. Если функция $f(x)$ имеет предел $a$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то ее можно представить в виде суммы постоянной величины $a$ и бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, т. е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, то

$$f(x) = a + \alpha(x), \tag{13.20}$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция.

3. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то она ограниченная (при $x \to x_0$; $x \to \infty$).

4. Функция не может иметь двух разных пределов, т. е. если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то только один.

5. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме пределов каждого из слагаемых, если предел каждого слагаемого существует, т. е.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f_i(x). \tag{13.21}$$

6. Предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов, если предел каждого множителя существует, т. е.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f_i(x). \tag{13.22}$$

Символ $\prod\limits_{i=1}^{n}$ означает произведение $n$ множителей.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} cf(x) = c \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x). \tag{13.23}$$

Следствие 2. Предел натуральной степени функции равен этой степени предела данной функции, т. е.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} [f(x)]^n = \left[\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\right]^n. \tag{13.24}$$

Примечание. Это свойство верно для любого действительного показателя $a$ $\left(\text{при } a < 0 \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) \neq 0\right)$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} [f(x)]^a = \left[\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\right]^a. \tag{13.25}$$

В частности,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)}, \tag{13.26}$$

если корни существуют.

7. Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если предел каждой функции существует и предел делителя (знаменателя) не равен нулю, т. е.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f_1(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f_2(x)}, \tag{13.27}$$

если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f_1(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f_2(x) \neq 0$ существуют.

Если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f_1(x) = a \neq 0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f_2(x) = 0$, то пишут

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty.$$

Эта запись означает, что функция $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ есть бесконечно большая, не имеющая предела.

В тех случаях, когда предел отдельных функций не существует, предел результата производимого над ними действия находится в каждом отдельном случае особо. То же относится к случаю отношения двух функций, если оба предела (и делимого и делителя) равны нулю.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+5}{x+4}$.

Решение. Применяя свойства пределов функций, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+5}{x+4} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+4)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2 - \lim\limits_{x\to 2}3x + \lim\limits_{x\to 2}5}{\lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}4} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2 - 3\lim\limits_{x\to 2}x + 5}{2+4} = \frac{2^2-3\cdot 2+5}{2+4} = \frac{1}{2}.$$

Такие пределы, пользуясь непрерывностью функций (см. § 13 этой главы), находят сразу:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+5}{x+4} = \frac{2^2-3\cdot 2+5}{2+4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. 0,5.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \dfrac{2x+x^3}{3x-4x^2}$.

Решение.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\frac{2x+x^3}{3x-4x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\frac{x(2+x^2)}{x(3-4x)}=\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\frac{2+x^2}{3-4x}=\frac{2}{3}.$$

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+7}{2x-5}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+7}{2x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{7}{x}}{2-\frac{5}{x}}=\frac{3}{2}.$$

Ответ. $\frac{3}{2}$.

Пример 4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}.$$

Решение. Рассмотрим отдельно три случая: а) $n<m$, б) $n=m$ и в) $n>m$.

а) $n<m$. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a_0}{x^{m-n}}+\frac{a_1}{x^{m-n+1}}+\cdots+\frac{a_m}{x^m}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_m}{x^m}}=0.$$

б) $n=m$. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_m}{x^m}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

в) $n>m$. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}}{\frac{b_0}{x^{n-m}}+\frac{b_1}{x^{n-m+1}}+\cdots+\frac{b_m}{x^n}}=\infty.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & \text{если } n<m;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } n=m;\\ \infty, & \text{если } n>m\end{cases}$

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5})$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5})=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}=0.$$

Ответ. 0.

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x}{x-3}$.

Решение. В данном случае предел числителя равен 6, т. е. числитель есть функция ограниченная; предел знаменателя равен 0, т. е. знаменатель есть бесконечно малая функция. Поэтому функция $\dfrac{2x}{x-3}$ есть бесконечно большой. Следовательно,

$$\lim_{x\to3}\frac{2x}{x-3}=\infty.$$

Ответ. $\infty$.

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to1\\(x\neq1)}}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

Решение.

$$\lim_{\substack{x\to1\\(x\neq1)}}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=\lim_{\substack{x\to1\\(x\neq1)}}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{\substack{x\to1\\(x\neq1)}}\frac{x-2}{x-3}=\frac{1}{2}$$

(на $x-1$ имеем право сократить, так как $x\to1$, но $x\neq1$).

Ответ. 0,5.

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\neq a)}}\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$,

если $Q_m(a)=P_n(a)=0$.

Решение. Так как многочлены $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ обращаются в нуль при $x=a$, то их можно представить в виде произведений

$$Q_m(x)=(x-a)\,Q_{m-1}(x),\quad P_n(x)=(x-a)\,P_{n-1}(x).$$

Тогда

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\neq a)}}\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(x\neq a)}}\frac{(x-a)\,Q_{m-1}(x)}{(x-a)\,P_{n-1}(x)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to a\\(x\neq a)}}\frac{Q_{m-1}(x)}{P_{n-1}(x)}=\begin{cases}\dfrac{Q_{m-1}(a)}{P_{n-1}(a)}, & \text{если } P_{n-1}(a)\neq0;\\ \infty, & \text{если } P_{n-1}(a)=0 \text{ и } Q_{m-1}(a)\neq0;\\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\neq a)}}\dfrac{(x-a)\,Q_{m-2}(x)}{(x-a)\,P_{n-2}(x)}, & \text{если } P_{n-1}(a)=Q_{m-1}(a)=0,\end{cases}$$

где $Q_{m-1}(x)=(x-a)\,Q_{m-2}(x)$, $P_{n-1}(x)=(x-a)\,P_{n-2}(x)$.

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+5}-x)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5}-x)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+5}-x)(\sqrt{x^2+5}+x)}{\sqrt{x^2+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+5-x^2)}{\sqrt{x^2+5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{5}{2}.$$

Ответ. 2,5.

Пример 10. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\(x\neq0)}}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\(x\neq0)}}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\(x\neq0)}}\frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)\left[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1\right]}{x\left[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1\right]}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\(x\neq0)}}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{x\left[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1\right]}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1}=\frac{1}{n}.$$

Ответ. $\frac{1}{n}$.

Рассмотрим признаки существования предела функции.

1. Если функция $f(x)$ при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ изменяется монотонно и ограничена, то она имеет предел при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$.

2. Если функции $\varphi(x)$, $f(x)$ и $\psi(x)$ при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ удовлетворяют условию $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$, причем $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\varphi(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\psi(x)=a$, то $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=a$.

## § 9. Два замечательных предела

**Первый замечательный предел.** Докажем, что

$$\lim_{\substack{x\to0\\(x\neq0)}}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{13.28}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $x>0$. Так как $x\to0$, то можно предположить, что $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Возьмем круг единичного радиуса $R=1$ (рис. 180); $R=OA=1$; $\angle AOM=x$ радианов. Найдем площади:

$$S_{\triangle OAM}=\frac{1}{2}OA\cdot OM\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin x;$$

$$S_{\text{сект }OAM}=\frac{1}{2}R^2x=\frac{1}{2}x;$$

$$S_{\triangle OAN}=\frac{1}{2}OA\cdot AN=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x.$$

Так как $S_{\triangle AOM}<S_{\text{сект }OAM}<S_{\triangle OAN}$, то

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$

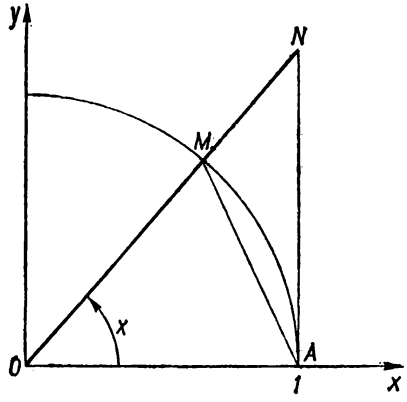



Рис. 180.

или

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x$$

$$\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Учитывая, что $\sin x>0$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$, имеем

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

или

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Предел $\cos x$ при $x\to 0$ равен 1, что следует из непрерывности функции $y=\cos x$ (см. § 16 этой главы); это утверждение можно доказать и без использования непрерывности функции $y=\cos x$. Предел 1 равен 1.

На основании второго признака существования предела функции имеем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Если $x<0$, введем замену $x=-t$; тогда $t=-x$, т. е. $t>0$, причем $t\to 0$ при $x\to 0$. Имеем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\substack{t\to 0\\(t>0)}}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{\substack{t\to 0\\(t>0)}}\frac{-\sin t}{-t}=\lim_{\substack{t\to 0\\(t>0)}}\frac{\sin t}{t}=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Используя этот предел, можно находить другие пределы.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = 1\times$

$\times 1 = 1$.

Ответ. 1.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{2}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Ответ. 0,5.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\(x\neq 1)}} (1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Решение. Введем замену $1-x=y$; тогда $y\to 0$ при $x\to 1$ и $x=1-y$. Имеем

$$\lim_{\substack{x\to 1\\(x\neq 1)}} (1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{\substack{y\to 0\\(y\neq 0)}} y\operatorname{tg}\frac{\pi(1-y)}{2} = \lim_{\substack{y\to 0\\(y\neq 0)}} y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{y\to 0\\(y\neq 0)}} y\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2} = \lim_{\substack{y\to 0\\(y\neq 0)}} \frac{y}{\sin\frac{\pi y}{2}}\cos\frac{\pi y}{2} = \frac{2}{\pi}\lim_{\substack{y\to 0\\(y\neq 0)}} \frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}}\lim_{\substack{y\to 0\\(y\neq 0)}} \cos\frac{\pi y}{2} = \frac{2}{\pi}.$$

Ответ. $\frac{2}{\pi}$.

**Число $e$ (второй замечательный предел).**

Предел

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

где $n$ — натуральное число, называется *неперовым* числом. (Джон Непер, барон Мерчистонский (1550—1617) — шотландский математик).

Неперово число обозначается буквой $e$ ($e$ — первая буква фамилии Эйлер).

Согласно определению

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{13.29}$$

Докажем, что этот предел существует.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$.

Запишем общий член $x_n$ этой последовательности, пользуясь формулой (12.10):

$$x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m} \times$$
$$\times \frac{1}{n^m} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \ldots m} +$$
$$+ \cdots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

При увеличении $n$ количество слагаемых и каждое слагаемое увеличивается, так как в каждой скобке числителей вычитаются меньшие числа, т. е. последовательность $\{x_n\}$ — монотонно возрастающая.

Последовательность $\{x_n\}$ — ограниченная, что следует из решения примера 9, § 2 гл. 12.

На основании первого признака существования предела последовательности последовательность $\{x_n\}$ имеет предел. Предел этой последовательности — число $e$ есть трансцендентное число — бесконечная непериодическая десятичная дробь, не являющаяся корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045\ldots,$$

или, приближенно,

$$e \approx 2{,}72.$$

## § 10. Натуральные логарифмы

Логарифмы при основании $e$ называются *натуральными* логарифмами.

Натуральный логарифм числа $N$ обозначается символом $\ln N$, т. е.

$$\log_e N = \ln N. \tag{13.30}$$

Натуральные логарифмы связаны с десятичными логарифмами на основании формулы (9.30) зависимостью

$$\lg N = \frac{1}{\ln 10} \ln N = M \ln N. \tag{13.31}$$

Число $M = \lg e = \dfrac{1}{\ln 10}$ называется *модулем перехода* от натуральных логарифмов к десятичным:

$$M = \lg e \approx 0{,}434294. \tag{13.32}$$

Наоборот,

$$\ln N = \frac{1}{\lg e} \lg N = \frac{1}{M} \lg N, \tag{13.33}$$

причем

$$\frac{1}{M} = \ln 10 = \frac{1}{\lg e} \approx 2{,}302585. \tag{13.34}$$

**Пределы, связанные с числом *e*.**

1. Докажем, что предел функции $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ равен числу $e$, т. е.

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{13.35}$$

Доказательство. Пусть $x > 0$; тогда при всяком $x$ найдется такое натуральное число $n$, что $n \leqslant x < n + 1$.

На основании свойств степенной функции имеем

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Так как

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \dfrac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e$$

и

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

то

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Если $x < 0$, то, введя замену $x = -(y + 1)$, найдем

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)^{-y-1} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e \cdot 1 = e.$$

2. Введем в (13.35) замену $x = \frac{1}{\alpha}$; тогда $\alpha = \frac{1}{x}$ и $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$. Получим

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ (\alpha \neq 0)}} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{13.36}$$

3. Пусть $\lim\limits_{\substack{x \to a \ (x \neq a) \\ (x \to \infty)}} f(x) = 1$ и $\lim\limits_{\substack{x \to a \ (x \neq a) \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) = \infty$; тогда

$$\lim_{\substack{x \to a \ (x \neq a) \\ (x \to \infty)}} [f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{\substack{x \to a \ (x \neq a) \\ (x \to \infty)}} \varphi(x)[f(x) - 1]} \tag{13.37}$$

**Пример 1.** Доказать, что

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx+c} = e^{ab}. \tag{13.38}$$

**Доказательство.** Находим предел

$$\lim_{x \to \infty} (bx + c)\left[\left(1 + \frac{a}{x}\right) - 1\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{a(bx + c)}{x} = ab.$$

По формуле (13.37) имеем

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx+c} = e^{ab}.$$

**Пример 2.** Доказать, что

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ (\alpha \neq 0)}} (1 + a\alpha)^{\frac{b}{\alpha} + c} = e^{ab}. \tag{13.39}$$

**Доказательство.** В (13.38) введем замену $x = \frac{1}{\alpha}$; тогда $\alpha = \frac{1}{x}$ и $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$.

Подставляя в (13.38), получаем

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ (\alpha \neq 0)}} (1 + a\alpha)^{\frac{b}{\alpha} + c} = e^{ab}.$$

**Пример 3.** Доказать, что

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1. \tag{13.40}$$

**Доказательство.**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \neq 0)}} \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \neq 0)}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Здесь было использовано свойство непрерывности логарифмической функции, которое будет дано в § 16 этой главы. Если функция непрерывная, то символ предела и символ функции можно поменять местами.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \dfrac{\log_a(1+bx)}{x}$.

Решение. По формуле (9.30)

$$\log_a(1+bx)=\frac{\ln(1+bx)}{\ln a}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{\log_a(1+bx)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{\ln(1+bx)}{x\ln a}=\frac{b}{\ln a}\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{\ln(1+bx)}{bx}=\frac{b}{\ln a}.$$

Ответ.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{\log_a(1+bx)}{x}=\frac{b}{\ln a}. \tag{13.41}$$

Пример 5. Доказать, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{e^x-1}{x}=1. \tag{13.42}$$

Доказательство. Введем замену $e^x-1=y$; тогда $y\to 0$ при $x\to 0$ и $x=\ln(1+y)$. Поэтому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{e^x-1}{x}=\lim_{\substack{y\to 0\\(y\neq 0)}} \frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{\substack{y\to 0\\(y\neq 0)}} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \dfrac{a^x-1}{x}$.

Решение. Воспользуемся тождеством $a=e^{\ln a}$; получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{a^x-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{(e^{\ln a})^x-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a.$$

Ответ. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.$ (13.43)

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Решение. Так как $\frac{x+3}{x-2} \to 1$ и $2x-1 \to \infty$ при $x \to \infty$, то находим предел

$$\lim_{x\to\infty}(2x-1)\left(\frac{x+3}{x-2}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5(2x-1)}{x-2}=10.$$

Следовательно, на основании (13.37)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=e^{10}.$$

Ответ. $e^{10}$.

## § 11. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции

В этом параграфе рассматриваемые функции есть бесконечно малые функции при $x \to x_0$ или при $x \to \infty$. В каждом отдельном случае это оговариваться не будет.

1. Если отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая, то бесконечно малая функция $f(x)$ называется бесконечно малой функцией *высшего порядка малости* по сравнению с бесконечно малой функцией $g(x)$, а бесконечно малая функция $g(x)$ называется бесконечно малой функцией *низшего порядка малости* по сравнению с бесконечно малой функцией $f(x)$.

Записывают это так:

$$f(x)=o(g(x)).$$

Например, $\sin^2 x$ — бесконечно малая функция высшего порядка малости по сравнению с $x$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0$.

Если отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ двух бесконечно малых функций есть бесконечно большая функция, то достаточно рассмотреть обратное отношение $\frac{g(x)}{f(x)}$, которое будет бесконечно малой функцией.

2. Если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=a\neq 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, то бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми функциями *одного порядка малости*.

Записывают это так:

$$f(x)=O(g(x)).$$

Например, $\operatorname{tg} 2x$ и $x$ — бесконечно малые функции одного порядка малости при $x \to 0$, так как

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}=2.$$

3. Если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, где $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые функции при $x\to x_0$ или при $x\to\infty$, то бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными.*

Если бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ — эквивалентные, то пишут

$$f(x)\sim g(x).$$

Например, $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

4. Бесконечно малая функция $f(x)$ называется бесконечно малой функцией *k-го порядка малости* по сравнению с бесконечно малой функцией $g(x)$, если $f(x)$ и $[g(x)]^k$ — бесконечно малые функции одного порядка малости, т. е. если

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{[g(x)]^k}=a\neq 0.$$

В этом случае пишут

$$f(x)=O([g(x)]^k).$$

Например, $1-\cos x$ — бесконечно малая функция второго порядка малости по сравнению с $x$ при $x\to 0$, так как

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\frac{1-\cos x}{x^2}=0{,}5\neq 0.$$

Следует заметить, что не всякие две бесконечно малые функции сравнимы между собой. В некоторых случаях можно указать, какая из двух бесконечно малых функций есть функцией высшего порядка малости, но нельзя определить, какого именно, а иногда вообще нельзя определить, какая из двух — функция высшего порядка малости.

Например, бесконечно малая функция $x$ есть бесконечно малая функция высшего порядка малости, чем бесконечно малая функция $\dfrac{1}{\ln|x|}$ при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\dfrac{x}{\frac{1}{\ln|x|}}=0$. Однако определить, какого порядка малости $x$ по сравнению с $\dfrac{1}{\ln|x|}$ при $x\to 0$, невозможно. В этом смысле они несравнимы.

Бесконечно малые функции $x$ и $x\cos\dfrac{1}{x}$ при $x\to 0$ вообще несравнимы, так как предел их отношения $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\dfrac{x\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\cos\dfrac{1}{x}$ не существует.

**Основные свойства эквивалентных бесконечно малых функций.**

1. Если $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \sim \varphi(x)$, то $f(x) \sim \varphi(x)$.

2. Если $f(x) \sim g(x)$, то $f(x) - g(x) = o(f(x))$ и $f(x) - g(x) = o(g(x))$, т. е. разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция высшего порядка малости по сравнению с каждой из них.

3. Если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые функции, причем $f(x) - g(x) = o(f(x))$ или $f(x) - g(x) = o(g(x))$, то $f(x) \sim g(x)$, т. е. если разность двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция высшего порядка малости по сравнению с какой-либо из них, то эти функции есть эквивалентные бесконечно малые функции.

4. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций различного порядка малости эквивалентна бесконечно малой функции низшего порядка малости, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \sim f_k(x),$$

где $f_k(x)$ — бесконечно малая функция низшего порядка малости по сравнению с каждой из остальных.

Замечание. Это свойство верно и в том случае, если не все бесконечно малые функции являются функциями различного порядка малости; существенным является только то, чтобы бесконечно малая функция низшего порядка малости в данной сумме была только одна. Если же их несколько, то сумма всех бесконечно малых функций эквивалентна сумме бесконечно малых функций низшего порядка малости, если они все одинакового знака (если разных знаков, то утверждение в общем случае будет неверным).

5. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей. Например,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

если $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$.

Из свойств 4 и 5 вытекает следующее правило.

*Правило.* При нахождении предела отношения двух бесконечно малых функций в числителе и знаменателе можно отбрасывать слагаемые, являющиеся бесконечно малыми функциями высшего порядка малости.

Пример 1. Доказать, что $\arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$.

Доказательство.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{y}{\sin y} = 1, \text{ где } y = \arcsin x;$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ (y \neq 0)}} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1, \text{ где } y = \operatorname{arctg} x.$$

Пример 2. Доказать, что $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n}$ при $x \to 0$. (13.44)

Доказательство. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{n}$ (см. пример 10, § 8 этой главы).

Поэтому

$$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n},$$

или

$$n(\sqrt[n]{1+x}-1) \sim x.$$

При решении примеров на нахождение пределов удобно пользоваться следующим рядом эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$:

$$\sin f(x) \sim \operatorname{tg} f(x) \sim \arcsin f(x \sim \operatorname{arctg} f(x) \sim$$
$$\sim \ln[1+f(x)] \sim e^{f(x)}-1 \sim n(\sqrt[n]{1+f(x)}-1) \sim f(x),$$
$$\text{если } \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = 0.$$

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{x-\ln(1+x)+\sin 2x}{\operatorname{tg} x - e^x + 1 + 5x}.$$

Решение. Так как $x-\ln(1+x) = o(\sin 2x)$, $\operatorname{tg} x - e^x + 1 = o(5x)$ и $\sin 2x \sim 2x$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{x-\ln(1+x)+\sin 2x}{\operatorname{tg} x - e^x + 1 + 5x} = \lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

Ответ. 0, 4.

## § 12. Сравнение бесконечно больших функций. Эквивалентные бесконечно большие функции

Рассматриваемые в этом параграфе функции являются бесконечно большими при $x \to x_0$ или при $x \to \infty$. Отдельно в каждом случае это не всегда будет оговорено.

1. Если отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ двух бесконечно больших функций есть бесконечно большая функция, то $f(x)$ называется бесконечно большой функцией высшего порядка по сравнению с бесконечно большой функцией $g(x)$, а бесконечно большая функция $g(x)$ называется бесконечно большой функцией низшего порядка по сравнению с бесконечно большой функцией $f(x)$.

В этом случае пишут $g(x) = o(f(x))$ или $f(x) \gg g(x)$.

2. Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = a \neq 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие функции, то $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно большими функциями одного порядка.

Записывают это так: $f(x) = O(g(x))$ или $g(x) = O(f(x))$.

3. Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, где $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие функции, то $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно большими функциями.

Это записывают $f(x) \sim g(x)$.

4. Бесконечно большая функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией $k$-го порядка по сравнению с бесконечно большой функцией $g(x)$, если $f(x)$ и $[g(x)]^k$ есть бесконечно большие функции одного порядка, т. е. если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{[g(x)]^k} = a \neq 0.$$

В этом случае пишут $f(x) = O([g(x)]^k)$.

Так же, как и среди бесконечно малых, среди бесконечно больших функций есть несравнимые.

Например, $x$ и $x(2 + \cos x)$ при $x \to \infty$ есть вообще несравнимые бесконечно большие функции, так как

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x(2 + \cos x)}{x} = \lim_{x \to \infty} (2 + \cos x)$$

не существует.

Бесконечно большие функции $x$, $\ln x$, $e^x$ при $x \to +\infty$ несравнимы между собой в смысле порядка (т. е. здесь указать порядок нельзя), хотя можно указать, какая из них высшего порядка, а какая — низшего, а именно $\ln x \ll x \ll e^x$ при $x \to +\infty$, т. е.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

**Основные свойства эквивалентных бесконечно больших функций.**

1. Если $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \sim \varphi(x)$, то $f(x) \sim \varphi(x)$.

2. Если $f(x) \sim g(x)$, то $f(x) - g(x)$ есть бесконечно большая функция низшего порядка по сравнению с $f(x)$ и $g(x)$ или ограниченная функция.

3. Если $f(x) - g(x)$ есть ограниченная функция или бесконечно большая функция низшего порядка по сравнению с бесконечно большой функцией $f(x)$ или $g(x)$, то $f(x) \sim g(x)$.

4. Алгебраическая сумма бесконечно больших функций различного порядка эквивалентна бесконечно большой функции высшего порядка величины, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \sim f_k(x),$$

где $f_k(x)$ — бесконечно большая функция высшего порядка по сравнению с каждой из остальных.

5. Предел отношения двух бесконечно больших функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей.

Например

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

если $f(x)\sim f_1(x)$ и $g(x)\sim g_1(x)$.

Из свойств 4 и 5 вытекает правило.

*Правило.* При нахождении предела отношения двух бесконечно больших функций в числителе и знаменателе можно отбрасывать слагаемые бесконечно большие функции низшего порядка и ограниченные функции.

6. Предел произведения бесконечно малой функции на бесконечно большую не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей.

Например,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\cdot g(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f_1(x)\cdot g_1(x),$$

если $f(x)\sim f_1(x)$ и $g(x)\sim g_1(x)$.

Пример 1. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x\sqrt{x}-\sin x+5}{2x^3-15x^2+7\cos x^4-8}.$$

Решение. Так как

$$x^3+2x\sqrt{x}-\sin x+5\sim x^3,\quad 2x^3-15x^2+7\cos x^4-8\sim 2x^3,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x\sqrt{x}-\sin x+5}{2x^3-15x^2+7\cos x^4-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}.$$

Ответ. 0,5.

Пример 2. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(3x-2x^2)\operatorname{tg}\frac{x-2}{5-x^3}.$$

Решение. Здесь требуется найти предел произведения бесконечно большой функции на бесконечно малую. Поэтому каждый или один из сомножителей можно заменить эквивалентным.

Учитывая, что $\operatorname{tg}\dfrac{x-2}{5-x^3}\sim\dfrac{x-2}{5-x^3}$ при $x\to\infty$, имеем

$$\lim_{x\to\infty}(3x-2x^2)\operatorname{tg}\frac{x-2}{5-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-2x^2)(x-2)}{5-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3}{-x^3}=2.$$

Ответ. 2.

## § 13. Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$ (при $x = x_0$), если предельное значение функции при $x \to x_0$ равно частному значению ее в точке $x_0$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Для непрерывности функции $y = f(x)$ в данной точке $x_0$ необходимо и достаточно, чтобы предел слева функции при $x \to x_0$ равнялся пределу справа и равнялся значению функции в данной точке, т. е.

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

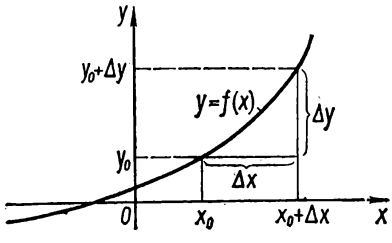



Рис. 181.

Рассмотрим еще два эквивалентных определения непрерывности функции в точке.

Приращением аргумента $x$ (переменной $x$) называется разность двух значений аргумента $x$ (переменной $x$).

Обозначается приращение аргумента $x$ символом $\Delta x$. Согласно определению приращение аргумента в точке $x_0$

$$\Delta x = x - x_0.$$

Приращением $\Delta y$ функции $y = f(x)$ в данной точке $x_0$, соответствующим приращению аргумента $\Delta x$, называется разность значений функций в точках $x = x_0 + \Delta x$ и $x = x_0$, т. е. разность

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Пользуясь понятием приращений аргумента и функции определение непрерывности функции в данной точне $x_0$ можно сформулировать следующим образом: функция $y = f(x)$ называется непрерывной в данной точке $x_0$, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке $\Delta x \to 0$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y \to 0$.

Приращение функции $\Delta y$ и приращение аргумента $\Delta x$ изображены на рис. 181.

Приведем еще одно определение непрерывности функции в точке.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной при $x = x_0$ (в точке $x_0$), если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Все три определения непрерывности функции в данной точке эквивалентны.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в интервале $(a, b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$ слева.

Если $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$ справа.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в интервале $(a, b)$, в точке $a$ справа и в точке $b$ слева.

## § 14. Основные свойства непрерывных функций

1. Алгебраическая сумма или произведение конечного числа непрерывных функций (в точке или в данной области) есть функция непрерывная.

2. Отношение двух непрерывных функций (в точке или данной области) есть функция непрерывная, если делитель (знаменатель) не обращается в нуль (в точке или в данной области).

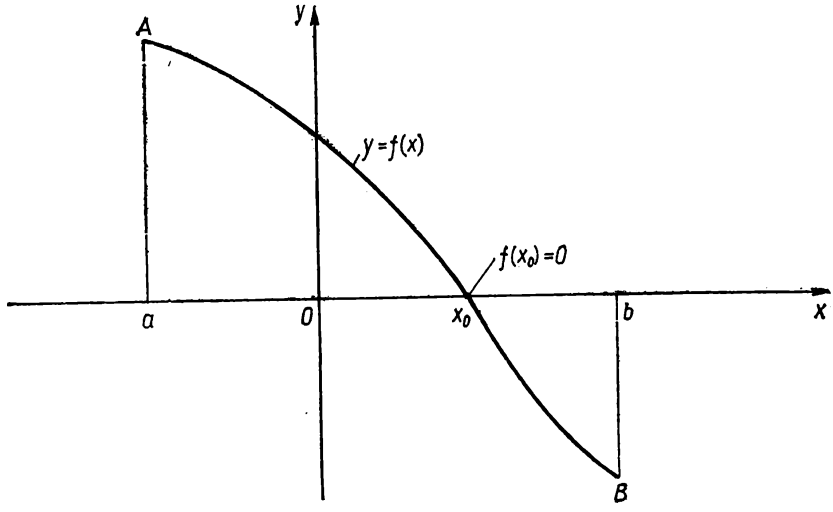



Рис. 182.

3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и принимает значение $y_0 = f(x_0)$, а функция $z = \varphi(y)$ непрерывна в точке $y = y_0$, то сложная функция $z = \varphi[f(x)]$ непрерывна в точке $x = x_0$. Вообще всякая сложная функция, составленная из непрерывных функций, есть функция непрерывная.

4. Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Следует заметить, что требование непрерывности функции и замкнутости отрезка не являются необходимыми. Если какое-либо из этих условий (или оба) не выполняется, то функция может достигать наибольшего и наименьшего значений (но не всегда).

5. Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает все промежуточные значения между наименьшим и наибольшим.

Из этого свойства вытекает утверждение: если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то в интервале $(a, b)$ находится по крайней мере один действительный корень уравнения $f(x) = 0$; если же функция, кроме того, изменяется монотонно, то этот корень будет только один. Геометрически этот факт очевиден (рис. 182).

## § 15. Точки разрыва

Точки, в которых нарушается условие непрерывности функции и которые являются внутренними по отношению к области существования функции, называются *точками разрыва*.

Различают два типа точек разрыва: *первого* и *второго рода*. Точкой разрыва I рода называется такая точка разрыва функции, в которой существуют ее пределы слева и справа, т. е. $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.

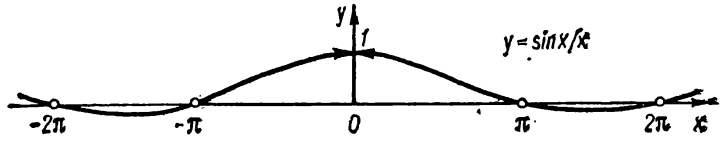



Рис. 183.

Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ ($f(x_0)$ может существовать и не существовать), то точка $x_0$ называется точкой устранимого разрыва I рода функции $f(x)$.

Если же $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют, но не равны между собой, т. е. $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то точка $x_0$ называется точкой неустранимого разрыва I рода функции $f(x)$.

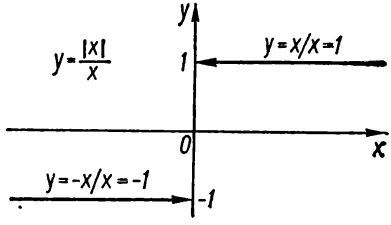



Рис. 184.

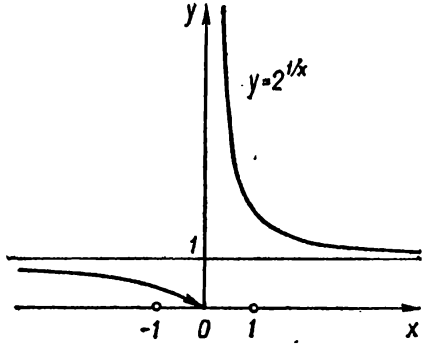



Рис. 185.

Например, функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ имеет устранимый разрыв I рода (рис. 183).

Функция $y = \dfrac{|x|}{x}$ в точке $x = 0$ имеет неустранимый разрыв I рода (рис. 184).

Точка разрыва функции, в которой не существует хотя бы один из односторонних пределов, называется точкой разрыва II рода.

Различают собственные и несобственные разрывы II рода.

Если какой-либо из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ не существует, но при $x \to x_0$ $f(x) \to \infty$, то такой разрыв называется собственным разрывом II рода.

Например, функция $y = 2^{\frac{1}{x}}$ в точке $x = 0$ имеет собственный разрыв II рода (рис. 185).

Если какой-либо из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ не существует и функция $f(x)$ ни к чему не стремится при $x \to x_0$, то такой разрыв называется несобственным разрывом второго рода.

Например, функция $y = \sin \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ имеет несобственный разрыв II рода (рис. 186).

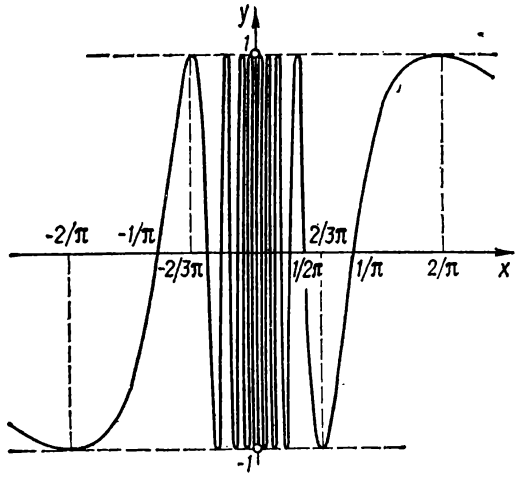



Рис. 186.

## § 16. Непрерывность элементарных функций

Рассмотрим непрерывность основных элементарных функций.

1. $y = C$. При всяком $\Delta x$ для функции $y = C$ $\Delta y = 0$. Поэтому функция $y = C$ непрерывна при всех значениях $x$, т. е. при $-\infty < x < +\infty$.

2. $y = x$. Если аргумент получит приращение $\Delta x$, то функция получит приращение $\Delta y = \Delta x$. При всех значениях $x$ из области определения функции $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому функция $y = x$ непрерывна во всей области определения, т. е. при $-\infty < x < +\infty$.

3. $y = x^n$, где $n$ — натуральное число. Функция определена при $-\infty < x < +\infty$.

Возьмем некоторую фиксированную точку $x$ и найдем приращение функции в этой точке, соответствующее приращению аргумента $\Delta x$:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} \times$$

$$\times x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n = \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \times \right.$$

$$\left. \times x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right] \Delta x.$$

Если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$, поэтому функция $y = x^n$ непрерывна при всех $x$ из области определения, т. е. при $-\infty < x < +\infty$.

На основании свойств непрерывных функций можно сделать вывод, что всякая рациональная функция непрерывна во всей области определения.

4. $y = a^x$. Функция определена при $-\infty < x < +\infty$.

Найдем приращение этой функции в некоторой фиксированной точке, соответствующее приращению аргумента $\Delta x$:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

При $\Delta x \to 0$ приращение функции $\Delta y \to 0$, поэтому функция $y = a^x$ непрерывна во всей области определения, т. е. при $-\infty < x < +\infty$.

5. $y = \log_a x$. Функция определена при $0 < x < +\infty$.

Найдем $\Delta y$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x$:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Так как $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и при всех $x$ из области определения функции, то функция $y = \log_a x$ непрерывна во всей области определения, т. е. при $0 < x < +\infty$.

Функция $y = x^a$, где $a > 0$ действительное число, непрерывна при $0 < x < +\infty$, так как $x^a = e^{a \ln x}$ — сложная функция, составленная из непрерывных функций.

6. $y = \sin x$. Область определения $-\infty < x < +\infty$.

Найдем $\Delta y$:

$$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

При всех $x$ из области определения функции $\Delta y \to 0$, если $\Delta x \to 0$. Поэтому функция $y = \sin x$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$.

Функция $y = \cos x$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$, так как $\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ — сложная функция, составленная из непрерывных функций.

Функции $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ и $y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ непрерывны во всей области определения каждой из функций как частное от деления непрерывных функций.

7. $y = \arcsin x$. Область определения $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Найдем $\Delta y$. При достаточно малых значениях $\Delta x$ для всякого фиксированного значения $x$ на основании (11.30) будет выполняться равенство

$$\Delta y = \arcsin (x + \Delta x) - \arcsin x = \arcsin [(x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2} - x \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}].$$

Так как $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то функция $y = \arcsin x$ непрерывна при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Функции $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$ и $y = \operatorname{arccosec} x$ непрерывны при всех $x$ из области их определения, так как они выражаются через $\arcsin \varphi(x)$, причем $\varphi(x)$ — функция непрерывная.

Таким образом, всякая элементарная функция непрерывна во всей области ее определения.

Замечание. Рассуждения, приведенные в пунктах 4—7, не являются доказательствами. Чтобы они были доказательствами, необходимо сначала доказать непрерывность функций $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \arcsin x$ в точке $x = 0$, а функции $y = \log_a x$ — в точке $x = 1$.

## Упражнения

Найти пределы последовательностей при $n \to +\infty$:

571. $\{x_n\} = \{(-0{,}999)^n\}$.

572. $\{x_n\} = \{2^{\sqrt{n}}\}$.

573. $\{y_n\} = \left\{\dfrac{3n+2}{2^n}\right\}$.

574. $\{z_n\} = \left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}$.

575. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n^k}{a^n}\right\}$, $a > 1$, $k > 0$.

576. $\{y_n\} = \{\sqrt[n]{a}\}$, $a > 0$.

577. $\{z_n\} = \{\sqrt[n]{n}\}$.

578. $\{x_n\} = \{na^n\}$, $|a| < 1$.

579. Доказать, что последовательность

$$\{x_n\} = \{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}\}$$

сходится.

Найти сумму:

580. $\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{4} + \cdots + \dfrac{2^n+1}{2^n}$.

581. $6 + 66 + 666 + \cdots + \underbrace{66\ldots66}_{n \text{ раз}}$,

582. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \cdots + n(3n-1)$.

583. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + (n-1) \cdot n^2$.

Доказать, что:

584. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$

585. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

Найти сумму ряда:

586. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}+\cdots$

587. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

588. $\frac{3}{1^2 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots$

589. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}+\cdots$

Исследовать сходимость ряда:

590. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\cdots+\frac{n}{3n-1}+\cdots$

591. $0{,}6+0{,}51+0{,}501+\cdots+[0{,}5+(0{,}1)^n]+\cdots$

Найти пределы:

592. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$.

593. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

594. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

595. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

596. $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\(x\neq\pi)}}\frac{\sin mx}{\sin nx}$.

597. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

598. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

599. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$.

600. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-5}\right)^{x^2+1}$.

601. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x+5}{2x^2+3x-4}\right)^{2x^2-1}$.

602. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\(x\neq 1)}}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

603. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

604. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\dfrac{e^{x^2}-\cos\sqrt{2}x}{x^2}$.

605. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\neq a)}}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

606. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

607. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

Найти точки разрыва функции и установить характер разрывов:

608. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

609. $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

610. $y=(x-2)\cos\dfrac{\pi}{x-2}$.

611. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+2}$.

612. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$.

# Глава 14

# КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

## § 1. Понятие комплексного числа

**Расширение множества действительных чисел.** Как было указано ранее (гл. 1), множество действительных чисел замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения (возведения в натуральную степень) и деления, за исключением деления на нуль, иными словами, результат действия над двумя или несколькими числами всегда существует и однозначен в множестве действительных чисел. Что же касается извлечения корня, то в множестве действительных чисел оно всегда выполнимо только для неотрицательных чисел. Извлечение корня четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел невыполнимо, здесь выражения $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-81}$ и т. д. не имеют смысла, поэтому уравнения $x^2+1=0$, $x^2-2x+5=0$ и $x^4+81=0$ в этом числовом множестве неразрешимы.

В множестве натуральных чисел не всегда выполнимы действия вычитания и деления. Поэтому множество натуральных чисел было расширено до множества целых чисел присоединением к натуральным нуля и отрицательных чисел; множество целых чисел было расширено до множества рациональных присоединением к целым числам дробных. Множество рациональных чисел было расширено до множества действительных присоединением к рациональным числам иррациональных для того, чтобы действие извлечения корня из неотрицательного числа было всегда выполнимым. Аналогично множество действительных чисел расширяют до множества комплексных присоединением к действительным мнимых чисел для того, чтобы действие извлечения корня сделать всегда выполнимым, а алгебраические уравнения — всегда разрешимыми.

Число, квадрат которого равен $-1$, обозначают буквой $i$ и называют мнимой единицей, т. е., по определению, принимают

$$i^2=-1$$

(буква $i$ — первая буква латинского слова *imaginarius*, что означает «мнимый»).

Определение 1. Выражение

$$a+bi^*,$$

где $a$ и $b$ — действительные числа, а $i$ — мнимая единица, называется комплексным числом.

---

* Заметим, что в выражении $a+bi$ знак «+» пока не имеет смысла сложения, так как мы еще не знаем, как складывать числа $a$ и $bi$, он приобретает этот смысл после введения действия сложения.

Число $a$ называется действительной частью, а выражение $bi$ — мнимой частью комплексного числа $a+bi$. Число $b$ называется коэффициентом при мнимой единице.

Для обозначения действительной части комплексного числа употребляются буквы Re (от франц. *reelle* — действительный), т. е.

$$\operatorname{Re}(a+bi)=a. \tag{14.1}$$

Коэффициент при мнимой единице обозначается символом Im (от франц. *imaginair* — мнимый), т. е.

$$\operatorname{Im}(a+bi)=b. \tag{14.2}$$

Числа $a$ и $b$ называются первой и второй составляющими комплексного числа $a+bi$.

Определение 2. Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ называются равными тогда и только тогда, когда равны и первые, и вторые составляющие, т. е.

$$a+bi=c+di, \text{ если } a=c \text{ и } b=d; \tag{14.3}$$

наоборот,

$$\text{если } a+bi=c+di, \text{ то } a=c \text{ и } b=d. \tag{14.4}$$

Из определения 2 следует, что если комплексное число равно нулю, то обе его составляющие равны нулю, т. е.

$$\text{если } a+bi=0, \text{ то } a=0 \text{ и } b=0. \tag{14.5}$$

Заметим, что комплексные (мнимые) числа по величине не сравниваются, т. е. понятия «больше» и «меньше» в применении к комплексным числам смысла не имеют.

Определение 3. Два комплексных числа, имеющие одинаковые первые составляющие и противоположные вторые, называются взаимно сопряженными, т. е. $a+bi$ и $a-bi$ — взаимно сопряженные комплексные числа.

Если $a$ и $b$ — любые действительные числа, то $a+bi$ называется *комплексным* числом. Если же $b=0$, то $a+0\cdot i=a$, и комплексное число становится действительным, т. е. действительные числа составляют подмножество комплексных.

Если $a=0$, а $b\neq 0$, то число $0+bi=bi$ называют мнимым числом.

## § 2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

**Сложение.** Запись комплексного числа в виде $a+bi$ называется записью в алгебраической форме.

*Суммой двух комплексных чисел* $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(a+c)+(b+d)\,i$, т. е. при сложении комплексных чисел их первые и вторые составляющие складываются:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\,i. \tag{14.6}$$

Например:

$$(5+2i)+(2-3i)=(5+2)+(2-3)i=7-i;$$
$$(6-3i)+(3+3i)=(6+3)+(-3+3)i=9+0i=9;$$
$$(2+5i)+(-2+5i)=(2-2)+(5+5)i=0+10i=10i;$$
$$(3-2i)+(-3+2i)=(3-3)+(-2+2)i=0+0i=0.$$

**Вычитание.** *Разностью двух комплексных чисел* $a+bi$ и $c+di$ называется такое комплексное число $x+yi$, которое в сумме с вычитаемым дает уменьшаемое, т. е.

$$(a+bi)-(c+di)=x+yi,$$
$$\text{если } (x+yi)+(c+di)=a+bi. \tag{14.7}$$

**Теорема.** *Разность двух комплексных чисел* $a+bi$ *и* $c+di$ *равна комплексному числу* $(a-c)+(b-d)i$, *т. е.*

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i. \tag{14.8}$$

Доказательство. По определению, $(a+bi)-(c+di)=x+yi$. При $(x+yi)+(c+di)=a+bi$, складывая числа левой части равенства по правилу (14.6), получим

$$(x+c)+(y+d)i=a+bi,$$

откуда, по условию равенства комплексных чисел (14.3), получаем систему

$$\begin{cases} x+c=a, \\ y+d=b, \end{cases}$$

которая всегда имеет решение и притом единственное:

$$\begin{cases} x=a-c, \\ y=b-d. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Чтобы вычесть из одного комплексного числа другое, достаточно это вычитание произвести отдельно для первых и вторых их составляющих (14.8). Например:

$$(10+2i)-(3-4i)=(10-3)+[2-(-4)]i=7+6i;$$
$$(4+5i)-(3+5i)=(4-3)+(5-5)i=1+0i=1;$$
$$(3+8i)-(3+8i)=(3-3)+(8-8)i=0+0i=0.$$

**Умножение.** *Произведением двух комплексных чисел* $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(ac-bd)+(ad+bc)i$, т. е.

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i. \tag{14.9}$$

Умножение комплексных чисел производится как умножение многочленов (по определению) с последующей заменой $i^2$ на $-1$.

Например:

$$(5+2i)(3-4i) = 15+6i-20i-8i^2 = 15-14i-8(-1) = 23-14i;$$
$$(2+i)(2-i) = 4+2i-2i-i^2 = 4+1 = 5:$$
$$(3+3i)(3+3i) = 9+9i+9i+9i^2 = 0+18i = 18i;$$
$$(2+3i)(0+0i) = 0+0i+0i+0i^2 = 0+0i = 0;$$
$$(a+bi)(a-bi) = a^2-abi+abi-b^2i^2 = a^2-b^2(-1) = a^2+b^2.$$

Для любого комплексного числа

$$(a+bi)(0+0i) = 0+0i = 0.$$

**Деление.** *Частным от деления двух комплексных чисел* $a+bi$ на $c+di$ называется такое комплексное число $x+yi$, которое в произведении с делителем дает делимое, т. е.

$$\frac{a+bi}{c+di} = x+yi, \text{ если } (x+yi)(c+di) = a+bi. \qquad (14.10)$$

**Теорема.** *Частное от деления* $a+bi$ *на* $c+di$ $(c+di \neq 0)$ *определено и притом однозначно в множестве комплексных чисел и вычисляется по формуле*

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i \quad (c+di \neq 0). \qquad (14.11)$$

Рекомендуем читателю доказать формулу (14.11) деления комплексных чисел.

На практике при делении комплексных чисел поступают так: делимое и делитель домножают на число, сопряженное с делителем, после чего делитель становится действительным числом; затем составляющие делимого, полученного после умножения на сопряженное с делителем число, делят на это действительное число.

Например:

$$\frac{2+3i}{2+i} = \frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{7+4i}{5} = \frac{7}{5}+\frac{4}{5}\,i;$$
$$\frac{3}{4+3i} = \frac{3(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{12-9i}{25} = 0{,}48-0{,}36i.$$

Если в выражении, составленном из комплексных чисел, над которыми производятся арифметические действия, каждое комплексное число заменить сопряженным с ним, то и значение всего выражения заменится на сопряженное. Число, сопряженное числу $z$, обозначается через $\bar{z}$.

Например, пусть $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5-4i$; тогда их сумма $z_1+z_2 = 7-i$, а сумма сопряженных им чисел $\bar{z}_1+\bar{z}_2 = (2-3i)+(5+4i) = 7+i$, т. е. $\bar{z}_1+\bar{z}_2 = \overline{z_1+z_2}$.

**Основные законы действий над комплексными числами.** Действия сложения, вычитания, умножения и деления (за исключением деления на нуль) в множестве комплексных чисел замкнуты, а результаты этих действий однозначны.

Можно доказать, что для комплексных чисел выполняются следующие основные законы действий:

а) переместительный закон сложения:

$$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi); \tag{14.12}$$

б) сочетательный закон сложения:

$$(a + bi) + (c + di) + (e + fi) = (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)]; \tag{14.13}$$

в) переместительный закон умножения:

$$(a + bi)(c + di) = (c + di)(a + bi); \tag{14.14}$$

г) сочетательный закон умножения:

$$(a + bi)(c + di)(e + fi) = (a + bi)[(c + di)(e + fi)]; \tag{14.15}$$

д) распределительный закон умножения относительно сложения:

$$[(a + bi) + (c + di)](e + fi) = (a + bi)(e + fi) + (c + di)(e + fi). \tag{14.16}$$

Заметим, что ввести комплексные числа, т. е. расширить множество действительных чисел до множества комплексных присоединением к ним мнимых чисел, значит установить правило сравнения этих чисел, правила выполнения действий над ними и основные законы этих действий. Так как действия над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и действия над действительными числами, то порядок выполнения действий, правило раскрытия скобок, формулы сокращенного умножения и деления, формулы корней квадратного уравнения и их свойства и т. д. автоматически сохраняются для комплексных чисел.

В множестве комплексных чисел, в отличие от множества действительных чисел, нет отношения «больше» или «меньше», т. е. множество комплексных чисел не упорядочено, и свойства неравенств, которые имели место для действительных чисел, для комплексных чисел места не имеют.

Пример 1. Выполнить действия

$$A = (1 + i)^6 + (1 - i)^6.$$

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$A = (1 + i)^6 + (1 - i)^6 = [(1 + i)^2]^3 + [(1 - i)^2]^3 = (1 + 2i + i^2)^3 + (1 - 2i + i^2)^3 = (1 + 2i - 1)^3 + (1 - 2i - 1)^3 = (2i)^3 + (-2i)^3 = (2i)^3 - (2i)^3 = 0.$$

Ответ: $A = 0$.

Пример 2. Найти действительные числа $x$ и $y$ из уравнения

$$(2x - 5i) + (7y + 2xi) = -23 + 3yi.$$

Решение. Складывая члены левой части уравнения, получим

$$(2x + 7y) + (-5 + 2x)i = -23 + 3yi.$$

По условию равенства комплексных чисел получаем систему

$$\begin{cases} 2x + 7y = -23, \\ -5 + 2x = 3y, \end{cases}$$

в результате решения которой находим $x = -1{,}7$ и $y = -2{,}8$.

Ответ. $x = -1{,}7$ и $y = -2{,}8$.

Пример 3. Вычислить $A = \sqrt{-15 + 8i}$.

Решение. Пусть $\sqrt{-15 + 8i} = x + iy$, где $x$ и $y$ — действительные числа; тогда по определению корня (см. § 5 этой главы) $(x + iy)^2 = -15 + 8i$, или $(x^2 - y^2) + 2xyi = -15 + 8i$. По условию равенства комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15, \\ 2xy = 8. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим ее действительные решения

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = -4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Тогда $A_1 = -1 - 4i$ и $A_2 = 1 + 4i$, т. е.

$$\sqrt{-15 + 8i} = \pm (1 + 4i).$$

Ответ. $\pm (1 + 4i)$.

Пример 4. Решить уравнение

$$z^2 - (4 - 6i)\, z + (10 - 20i) = 0.$$

Решение. Заметим, что в множестве комплексных чисел корень $n$-й степени из комплексного числа имеет $n$ значений. Поэтому формула для корней квадратного уравнения

$$az^2 + bz + c = 0,$$

где $a$, $b$, $c$ — комплексные (в том числе действительные) числа ($a \neq 0$), имеет вид

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (14.17)$$

т. е. перед корнем квадратным из дискриминанта уравнения в числителе берем только знак «+» (в множестве действительных чисел были знаки «∓», так как квадратный корень был арифметическим).

Решая данное уравнение, получим

$$z_{1,2} = 2 - 3i + \sqrt{(2 - 3i)^2 - 10 + 20i} = 2 - 3i + \sqrt{-15 + 8i},$$

или (см. пример 3)

$$z_{1,2} = 2 - 3i \pm (1 + 4l);\ z_1 = 1 - 7i;\ z_2 = 3 + l.$$

Ответ. $z_1 = 1 - 7i$, $z_2 = 3 + i$.

Пример 5. Решить уравнение $x^3 + 27 = 0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители как сумму кубов:

$$(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0,$$

откуда следует $x+3=0$, $x_1=-3$ и $x^2-3x+9=0$,

$$x_{2,3}=\frac{3+\sqrt{9-36}}{2}=\frac{3+3\sqrt{-3}}{2}=\frac{3}{2}(1\mp i\sqrt{3}).$$

Ответ. $x_1=-3$, $x_{2,3}=\frac{3}{2}(1\pm i\sqrt{3})$.

## § 3. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа

**Геометрическое изображение комплексных чисел.** Подобно тому, как между множеством действительных чисел и точками числовой оси устанавливается взаимно однозначное соответствие, между комплексными числами и точками плоскости, называемой числовой, также устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Каждому комплексному числу $a+bi$ ставится в соответствие точка плоскости с координатами $(a, b)$, и, наоборот, каждой точке плоскости с координатами $(a, b)$ ставится

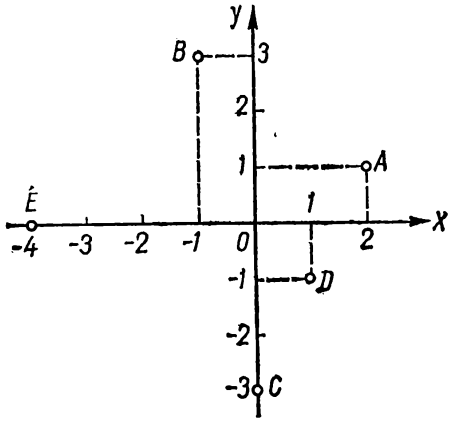



Рис. 187.

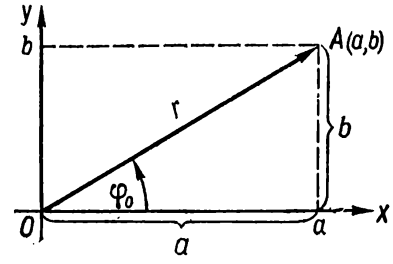



Рис. 188.

в соответствие комплексное число $a+bi$. На рис. 187 изображены точками: $A$ — число $2+i$, $B$ — число $-1+3i$, $C$ — число $-3i$, $D$ — число $1-i$, $E$ — число $-4$.

Таким образом, между множеством всех комплексных чисел и множеством всех точек числовой плоскости существует взаимно однозначное соответствие.

Точка $A(a, b)$, соответствующая комплексному числу $a+bi$, называется аффиксом данного комплексного числа.

Комплексным числам дают и другую геометрическую интерпретацию. Каждому комплексному числу $a+bi$ ставят в соответствие радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$, где $O$ — начало координат, а $A$ — аффикс данного комплексного числа (рис. 188).

Таким образом, между всеми комплексными числами и всеми радиусами-векторами плоскости существует взаимно однозначное соответствие. Так, числу $a+bi$ соответствует радиус-вектор $\vec{r}=a\vec{i}+b\vec{j}$ и, наоборот, вектору $\vec{r}=a\vec{i}+b\vec{j}$ соответствует число $a+bi$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$ — орты).

На рис. 189 изображены радиусы-векторы, соответствующие числам $2+3i$ $(\overrightarrow{OA})$, $5-2i$ $(\overrightarrow{OB})$, $-1-3i$ $(\overrightarrow{OC})$, $4i$ $(\overrightarrow{OD})$.

Пользуясь геометрическим изображением комплексных чисел с помощью векторов, легко дать геометрическую интерпретацию сложения и вычитания комплексных чисел.

Сумме двух комплексных чисел $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ соответствует радиус-вектор, равный сумме радиусов-векторов, изображающих каждое из слагаемых (рис. 190).

Действительно, при сложении векторов их соответствующие координаты складываются. Поэтому если числу $a+bi$ соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ с координатами $(a, b)$, а числу $c+di$ соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{OB}$ с координатами $(c, d)$, то числу $(a+c)+(b+d)i$

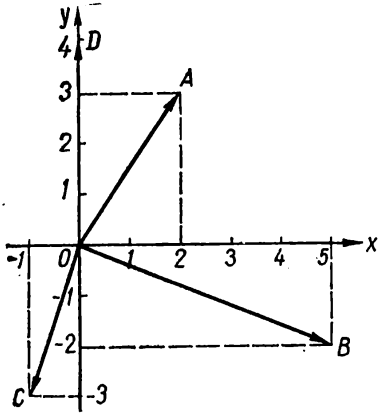



Рис. 189.

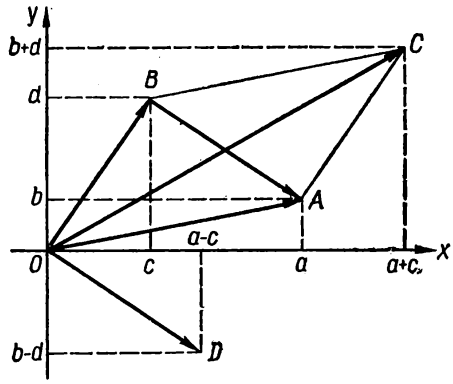



Рис. 190.

соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{OC}$ с координатами $(a+c,\ b+d)$, который представляет сумму векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

Аналогично убеждаемся, что разности двух комплексных чисел $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$ соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{OD}$ (см. рис. 190), равный разности $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ радиусов-векторов, изображающих уменьшаемое и вычитаемое ($\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$; рассматриваются свободные векторы, т. е. векторы, которые можно параллельно перемещать без изменения направления).

### Модуль и аргумент комплексного числа

*Модулем* комплексного числа $a+bi$ называют длину вектора $\overrightarrow{OA}=\vec{r}$ (см. рис. 188), соответствующего данному комплексному числу, т. е.

$$|\vec{r}|=\sqrt{a^2+b^2}$$ — модуль комплексного числа $a+bi$.

Модуль комплексного числа $a+bi$ обозначают $|a+bi|$. Следовательно, по определению

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (14.18)$$

Заметим, что если $b = 0$, то $a + bi = a + 0i = a$ и модуль комплексного числа $|a + 0i| = |a|$.
Например:

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$$
$$|0 - 3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3;$$
$$|5 + 0i| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5;$$
$$|0 + 0i| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.$$

Аффиксы комплексных чисел, имеющих один и тот же модуль, лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом, равным модулю.

*Аргументом* комплексного числа $a + bi$ называется угол $\varphi$ между положительным направлением оси абсцисс (см. рис. 188) и вектором $\overrightarrow{OA}$, соответствующим числу $a + bi$.

Так как этот угол определяется с точностью до $2\pi n$, где $n$ — любое целое число, то, обозначив наименьший по абсолютной величине угол между осью абсцисс и вектором $\overrightarrow{OA}$ через $\varphi_0$, получим

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Наименьшее по абсолютной величине значение угла $\varphi_0$ (рис. 188), которое находится в интервале $-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi$, называется *главным значением* аргумента комплексного числа $a + bi$.

Аргумент комплексного числа $a + bi$ обозначают символом $\operatorname{Arg}(a + bi)$, а главное значение аргумента комплексного числа $\arg(a + bi)$.

По определению,

$$\operatorname{Arg}(a + bi) = \arg(a + bi) + 2\pi n, \tag{14.19}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример. Найти главные значения аргументов комплексных чисел: 1) $1 + i$; 2) $-3 + 3i$; 3) $-1 - i\sqrt{3}$; 4) $2 + 0i$; 5) $0 - 3i$; 6) $-2 + 0i$.

Решение. Построив векторы, соответствующие данным числам (рис. 191), найдем главные значения аргументов этих чисел:

1) $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$; 2) $\arg(-3 + 3i) = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\arg(-1 - \sqrt{3}i) = -\frac{2\pi}{3}$;

4) $\arg(2 + 0i) = 0$; 5) $\arg(0 - 3i) = -\frac{\pi}{2}$; 6) $\arg(-2 + 0i) = \pi$.

Заметим, что $\arg z = 0$, если $z = a > 0$ — положительное действительное число; $\arg z = -\pi$, если $z = a < 0$ — отрицательное действительное число; $\arg z = \frac{\pi}{2}$, если $z = bi$ $(b > 0)$ — чисто мнимое число с положительным коэффициентом, и $\arg z = -\frac{\pi}{2}$, если $z = bi$ $(b < 0)$ — чисто мнимое число с отрицательным коэффициентом.

Главное значение аргумента комплексного числа $a+bi$ однозначно определяется из системы уравнений (см. рис. 188, $\triangle OAa$):

$$\begin{cases} \cos\varphi_0 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi_0 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{b}{r} \quad (-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi). \end{cases} \tag{14.20}$$

Для числа 0 аргумент неопределенный.

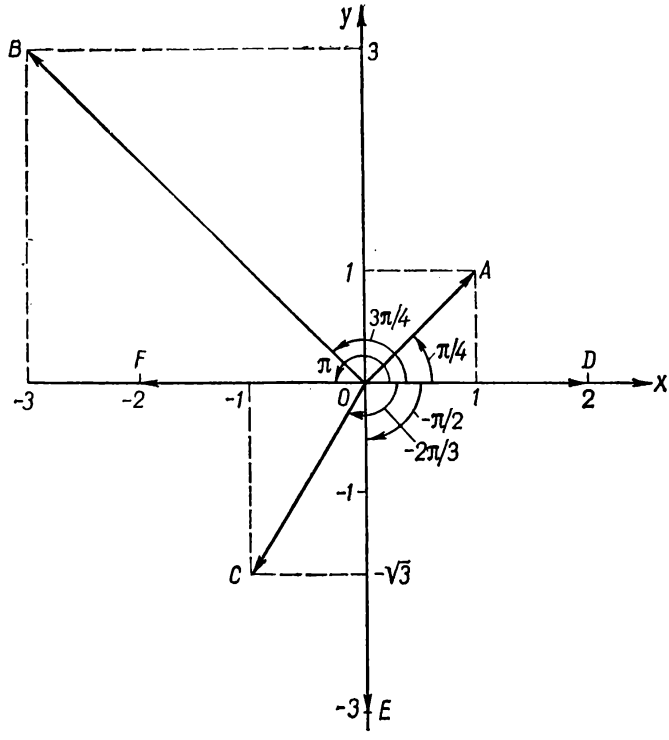



Рис. 191.

## § 4. Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть дано комплексное число $a+bi$ (см. рис. 188). По формуле (14.20)

$$\begin{cases} \cos\varphi_0 = \dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi_0 = \dfrac{b}{r}, \end{cases}$$

откуда

$$a = r\cos\varphi_0, \quad b = r\sin\varphi_0.$$

Тогда

$$a + bi = r(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0). \qquad (14.21)$$

Правая часть равенства (14.21) называется тригонометрической формой комплексного числа $a + bi$.

Для всякого комплексного числа имеет место равенство

$a + bi = r[\cos(\varphi_0 + 2\pi n) + i\sin(\varphi_0 + 2\pi n)]$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

или

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (14.22)$$

где

$$\varphi = \operatorname{Arg}(a + bi),\ r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Пример. Представить в тригонометрической форме $2 + 2i$ и $1 - \sqrt{3}i$.

Решение. По формуле (14.18) найдем

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

По формуле (14.20) из системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\varphi_0 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi_0 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

находим $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

По формуле (14.21) получим

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Аналогично находим модуль второго числа

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

и из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi_0 = \dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

его аргумент $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{3}$.

Тогда

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Ответ. $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны между собой тогда и только тогда, когда равны их модули и главные значения аргументов (или аргументы отличаются на величину, кратную $2\pi$).

Если $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то $r_1 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

## § 5. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

**Умножение.** При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (14.23)$$

Пример 1. Вычислить

$$[2(\cos 36^\circ + i\sin 36^\circ)] \cdot [3(\cos 54^\circ + i\sin 54^\circ)].$$

Решение. Применяя правило (14.23), получим

$$[2(\cos 36^\circ + i\sin 36^\circ)] \cdot [3(\cos 54^\circ + i\sin 54^\circ)] = 2 \cdot 3[\cos(36^\circ + 54^\circ) + i\sin(36^\circ + 54^\circ)] = 6(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = 6i.$$

Ответ. $6i$.

Пример 2. Вычислить

$$[5(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)] \cdot [2(\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ)].$$

Решение. По формуле (14.23) получаем

$$[5(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)] \cdot [2(\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ)] = [5(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)] \cdot [2(\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ))] = 5 \cdot 2 \cdot [\cos(120^\circ - 60^\circ) + i\sin(120^\circ - 60^\circ)] = 10(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 10\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5 + 5\sqrt{3} \cdot i.$$

Ответ. $5 + 5\sqrt{3} \cdot i$.

Рассмотрим правило умножения комплексных чисел с геометрической точки зрения. Сложение и вычитание комплексных чисел геометрически иллюстрируется как сложение и вычитание соответствующих векторов. Для умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме такой простой геометрической иллюстрации с помощью соответствующих векторов не получается. Но легко дать геометрическую иллюстрацию умножения и деления векторов в тригонометрической форме. Умножим

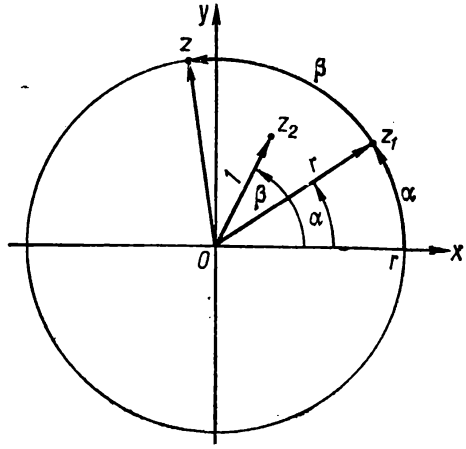



Рис. 192.

комплексное число $z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ на комплексное число, модуль которого равен 1, т. е. на $z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$. Получим $z = z_1 \cdot z_2 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot 1(\cos\beta + i\sin\beta) = r[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]$ и изобразим компоненты и произведение на рис. 192.

Таким образом, при умножении комплексного числа на число, модуль которого равен 1, вектор, соответствующий множимому числу, поворачивается на угол, равный аргументу множителя, а модуль вектора остается без изменения.

Если перемножить два или несколько векторов, модули которых равны 1, то аффиксы их произведений будут лежать на единичной окружности.

Умножим комплесное число

$$z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

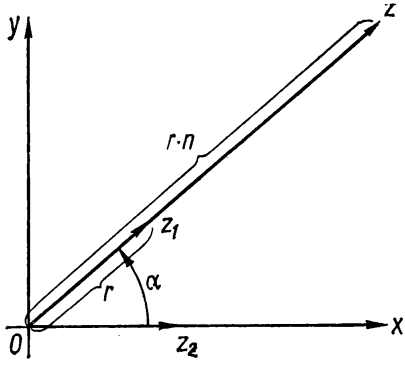



Рис. 193.

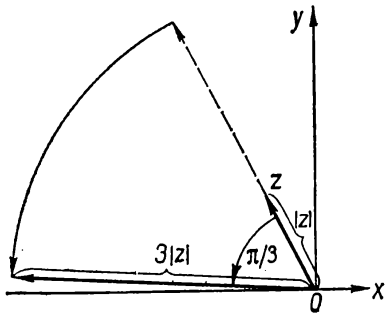



Рис. 194.

на число

$$z_2 = r_2(\cos 0 + i\sin 0),$$

аргумент которого равен 0, а модуль $r_2 \neq 1$.

Получим $z = z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)\, r_2(\cos 0 + i\sin 0) = r_1 r_2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Изобразим компоненты и произведение на рис. 193.

Таким образом, при умножении комплексного числа на число, аргумент которого равен 0 (или $2\pi k$), вектор, соответствующий множимому числу, растягивается в число раз, равное модулю множителя.

Если $r_2 > 1$, то имеет место растяжение в $r_2$ раз; если $0 < r_2 < 1$— сжатие в $\frac{1}{r_2}$ раз.

Если умножить некоторое комплексное число на комплексное число, модуль которого отличен от единицы, а аргумент отличен от 0 (или $2\pi k$), то вектор, соответствующий произведению, получается из вектора, соответствующего множимому, путем растягивания его в число раз, равное модулю множителя, и поворота на аргумент множителя.

Например, умножение комплексного числа $z$ на $i$ геометрически означает, что вектор, соответствующий произведению, получается из вектора, соответствующего числу $z$, только поворотом на угол $\arg i = \frac{\pi}{2}$, причем длина вектора сохраняется, так как $|i| = 1$.

При умножении числа $z$ на $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ модуль вектора, соответствующего произведению, получается из вектора, соответствующего числу, растяжением в три раза и поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$ (рис. 194).

Растяжение и поворот вектора при умножении обладают переместительным свойством.

**Деление.** При делении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \quad (14.24)$$

Например:

а) $\dfrac{10(\cos 163^\circ+i\sin 163^\circ)}{2(\cos 73^\circ+i\sin 73^\circ)}=5(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)=5i$;

б) $\dfrac{3(\cos\pi+i\sin\pi)}{5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=0{,}6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Делению комплексных чисел можно дать геометрическую интерпретацию, аналогичную интерпретации действия умножения, а именно: при делении комплексного числа на комплексное модуль вектора, соответствующий делимому, сжимается в число раз, равное модулю делителя, а сам вектор поворачивается в отрицательном направлении на угол, равный аргументу делителя.

**Возведение в степень.** Чтобы комплексное число, заданное в тригонометрической форме, возвести в целую степень, достаточно модуль этого числа возвести в эту степень, а аргумент умножить на показатель степени:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^a\equiv r^a(\cos a\varphi+i\sin a\varphi) \quad (14.25)$$

$$(r\neq 0;\ \text{если } r=0,\ \text{то } a>0).$$

При $r=1$ и $a=n$ ($n$ — натуральное число) из (14.25) получаем формулу

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi, \quad (14.26)$$

которая называется *формулой Муавра.*

Пример 1. Вычислить $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$.

Решение. Применяя формулу (14.25), получим

$$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6=2^6\left[\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$
$$=64(\cos\pi+i\sin\pi)=64(-1+0i)=-64.$$

Ответ. $-64$.

Пример 2. Вычислить $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$.

Решение. Запишем основания слагаемых степеней в тригонометрической форме и, применив формулу (14.25), получим

$$(1+i)^{10}+(1-i)^{10}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10}+$$

$$+\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right)+$$

$$+(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right)=32i-32i=0.$$

Ответ. 0.

С помощью формулы Муавра, формулы бинома Ньютона и условия равенства комплексных чисел можно получить формулы для косинуса и синуса кратных углов. Например, по формуле бинома Ньютона

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos^3\alpha+3i\cos^2\alpha\sin\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha-i\sin^3\alpha=$$
$$=(\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha)+i(3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha),$$

а по формуле Муавра

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha;$$

сравнивая

$$\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha=(\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha)+i(3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha)$$

по условию равенства комплексных чисел, находим формулы тройных углов косинуса и синуса:

$$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha,$$
$$\sin 3\alpha=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha.$$

**Извлечение корня.** В множестве действительных чисел мы пользовались в основном понятием арифметического корня. В множестве комплексных чисел рассматривается общее определение корня.

*Корнем n-й степени из комплексного числа z* называется любое комплексное число, $n$-я степень которого равна данному числу $z$.

Записывается корень так же, как и в множестве действительных чисел:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{a+bi}\quad(z=a+bi).$$

Покажем, что в множестве комплексных чисел корень $n$-й степени имеет $n$ различных значений.

Пусть комплексное число $z$ задано в тригонометрической форме

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

и

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi).\qquad(1)$$

По определению корня

$$[\rho(\cos\psi+i\sin\psi)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi);$$

применяя формулу (14.25) к левой части равенства, получим

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

По условию равенства комплексных чисел

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\psi = \varphi, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\psi = \varphi_0 + 2\pi k, \end{cases}$$

где $\varphi_0$ — главное значение аргумента данного числа $z$.

Из последней системы находим

$$\rho = \sqrt[n]{r} \text{ (арифметическое значение)}$$

и

$$\psi = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$

Легко показать, что различные значения $\psi$ получаются при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, а последующие будут отличаться от этих на число, кратное $2\pi$.

Таким образом, подставляя $\rho$ и $\psi$ в равенство (1), получаем правило извлечения корня из комплексного числа в тригонометрической форме в виде формулы

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right), \quad (14.27)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ($\sqrt[n]{r}$ — арифметический корень).

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)}$.

Решение. Обозначим

$$z_k = \sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)}.$$

Тогда по формуле (14.27) находим

$$z_k = \sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$.

При $k = 0$ получаем

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

При $k = 1$ получаем

$$z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2.$$

При $k = 2$ получаем

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Ответ. $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_1 = -2$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Пример 2. Найти $\sqrt[n]{1}$.

Решение. Представим 1 в тригонометрической форме

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

Применяя формулу (14.27), получим

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{n},$$

или

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi}{n} k + i \sin \frac{2\pi}{n} k.$$

Ответ.

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi}{n} k + i \sin \frac{2\pi}{n} k, \qquad (14.28)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример 3. Найти $\sqrt[n]{-1}$.

Решение. Представим $-1$ в тригонометрической форме $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$.

Тогда

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{n},$$

или

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{-1} = \cos \frac{\pi}{n} (2k + 1) + i \sin \frac{\pi}{n} (2k + 1),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Ответ.

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{-1} = \cos \frac{\pi}{n} (2k + 1) + i \sin \frac{\pi}{n} (2k + 1), \qquad (14.29)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример 4. Вычислить $\sqrt[6]{1}$.

Решение. Пользуясь формулой (14.28), находим

$$\varepsilon_k = \sqrt[6]{1} = \cos \frac{\pi}{3} k + i \sin \frac{\pi}{3} k \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5);$$

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$\varepsilon_4 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_5 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_3 = -1$, $\varepsilon_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

На рис. 195 изображены аффиксы корней шестой степени из 1.

Пример 5. Найти суммы

$$S_n = 1 + a\cos x + a^2\cos 2x + \cdots + a^n \cos nx$$

и

$$T_n = a\sin x + a^2 \sin 2x + \cdots + a^n \sin nx.$$

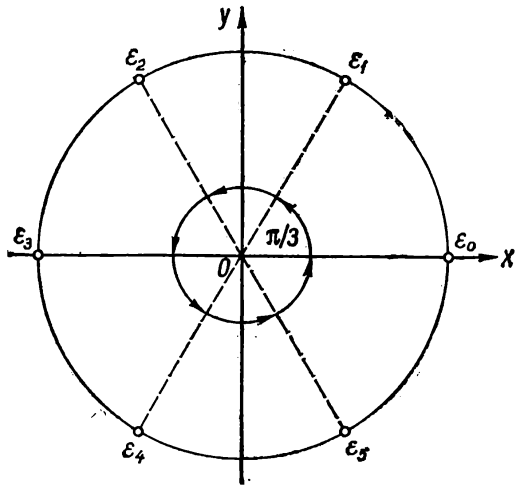



Рис. 195.

Решение.

Найдем сумму

$$S_n + T_n i = (1 + a\cos x + a^2\cos 2x + \cdots + a^n \cos nx) + i\,(a\sin x + a^2 \sin 2x + \cdots + a^n \sin nx) = 1 + a\,(\cos x + i\sin x) + a^2\,(\cos 2x + i\sin 2x) + \cdots + a^n\,(\cos nx + i\sin nx) = 1 + a\,(\cos x + i\sin x) + a^2\,(\cos x + i\sin x)^2 + \cdots + a^n\,(\cos x + i\sin x)^n.$$

Обозначим $y = \cos x + i\sin x$. Тогда

$$S_n + T_n i = 1 + ay + a^2y^2 + \cdots + a^n y^n = \frac{a^{n+1}y^{n+1} - 1}{ay - 1}.$$

Умножив числитель и знаменатель последней дроби на $\frac{a}{y} - 1$, получим

$$S_n + T_n i = \frac{a^{n+2}y^n - a^{n+1}y^{n+1} - \frac{a}{y} + 1}{a^2 - a\left(y + \frac{1}{y}\right) + 1}.$$

Подставляя в правую часть этого равенства значение $y$ и учитывая, что $\frac{1}{y} = \frac{1}{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x$,

$$y + \frac{1}{y} = (\cos x + i \sin x) + (\cos x - i \sin x) = 2 \cos x,$$

находим

$$S_n + T_n i = \frac{a^{n+2}(\cos nx + i \sin nx) - a^{n+1}[\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x] - a \cos x + ai \sin x + 1}{a^2 - 2a \cos x + 1},$$

или

$$S_n + T_n i = \frac{a^{n+2} \cos nx - a^{n+1} \cos(n+1)x - a \cos x + 1}{a^2 - 2a \cos x + 1} + \frac{a^{n+2} \sin nx - a^{n+1} \sin(n+1)x + a \sin x}{a^2 - 2a \cos x + 1} i,$$

Ответ. $S_n = 1 + a \cos x + a^2 \cos^2 x + \cdots + a^n \cos nx = \frac{a^{n+2} \cos nx - a^{n+1} \cos(n+1)x - a \cos x + 1}{a^2 - 2a \cos x + 1}$,

$$T_n = a \sin x + a^2 \sin 2x + \cdots + a^n \sin nx = \frac{a^{n+2} \sin nx - a^{n+1} \sin(n+1)x + a \sin x}{a^2 - 2a \cos x + 1}.$$

### Упражнения

613. Выполнить действия:

а) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$;

б) $5(\cos 20° + i \sin 20°) \cdot 3(\cos 25° + i \sin 25°)$;

в) $6(\cos 45° + i \sin 45°) : 2(\cos 15° + i \sin 15°)$;

г) $(3 + i\sqrt{2})^8 + (3 - i\sqrt{2})^8$;

д) $\sqrt[5]{\cos 225° + i \sin 225°}$;

е) $\sqrt[4]{-2 - 2i\sqrt{3}}$.

614. Составить квадратное уравнение по его корням:

а) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$;

б) $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2 - i$;

в) $z_1 = \frac{1-i}{2}$, $z_2 = \frac{1+2i}{2}$.

615. Решить уравнения:

а) $2z^2 - (5 - i)z + 6 = 0$;

б) $(1 + i)z^2 - (2 + i)z + (3 + i) = 0$;

в) $z^2 - 2(i - 1)z + 1 - 2i = 0$.

616. Найти действительные значения $x$ и $y$ из равенства

$$(x+y)^2+6+xi=5(x+y)+(y+1)i.$$

617. Пусть $z_1$ и $z_2$ — комплексные числа. Доказать, что

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

618. Показать, что

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{6}.$$

619. Вычислить модуль комплексного числа

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}+i\sqrt{2xy}}{(x-y)+2i\sqrt{xy}}.$$

620. Найти главное значение аргумента комплексного числа

$$\frac{4}{1+i\sqrt{3}}.$$

621. Показать, что если $n$ — натуральное число, кратное 3, то

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=2.$$

622. Найти геометрическое место аффиксов комплексных чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$1<|z-i|<2.$$

623. Пользуясь векторным изображением комплексных чисел, показать, что модуль суммы нескольких комплексных чисел не превышает суммы модулей каждого из слагаемых, т. е.

$$|(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)+\cdots+(a_n+b_ni)|\leqslant$$
$$\leqslant|a_1+b_1i|+|a_2+b_2i|+\cdots+|a_n+b_ni|.$$

В каком случае достигается равенство?

624. При каких условиях: а) модуль суммы двух комплексных чисел равен разности модулей слагаемых? б) модуль разности двух комплексных чисел равен сумме модулей уменьшаемого и вычитаемого?

625. Пользуясь формулой Муавра и формулой бинома Ньютона, показать, что:

$$\text{а) } \cos n\alpha=\begin{cases}\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-\\ \qquad-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\alpha \text{ при } n \text{ четном},\\ \cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-\\ -\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}C_n^{n-1}\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha \text{ при } n \text{ нечетном};\end{cases}$$

б) $\sin n\alpha = \begin{cases} C_n^1 \cos^{n-1}\alpha \sin\alpha - C_n^3 \cos^{n-3}\alpha \sin^3\alpha + \\ + C_n^5 \cos^{n-5}\alpha \sin^5\alpha - \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{n-1} \cos\alpha \sin^{n-1}\alpha \\ \text{при } n \text{ чётном,} \\ C_n^1 \cos^{n-1}\alpha \sin\alpha - C_n^3 \cos^{n-3}\alpha \sin^3\alpha + \\ + C_n^5 \cos^{n-5}\alpha \sin^5\alpha - \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n\alpha \text{ при } n \text{ нечетном } (n \text{ — натуральное число, большее 1).} \end{cases}$

в) используя предыдущие пункты, выразить $\operatorname{tg} n\alpha$ через степени $\operatorname{tg}\alpha$.

Найти суммы:

626. $S_n = 1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \cdots + 2\cos nx$.

627. $S_n = \sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n-1)x$.

628. $S_n = \sin x + a\sin(x+\alpha) + a^2\sin(x+2\alpha) + \cdots + a^n \sin(x+n\alpha)$.

# Глава 15

# УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

## § 1. Целое алгебраическое уравнение с одним неизвестным и его некоторые свойства

Целым алгебраическим уравнением $n$-й степени с одним неизвестным называется уравнение вида

$$f_1(x) = f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — целые алгебраические функции (многочлены) от переменной $x$, причем хотя бы одна из них $n$-й, а вторая не выше $n$-й степени.

Всякое целое алгебраическое уравнение $n$-й степени можно представить в простейшем виде:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (15.1)$$

где $a_n \neq 0$, $a_{n-1}$, ..., $a_1$, $a_0$ — любые комплексные числа.

Например:

$5x^5 + 3x^2 - \sqrt{2}\,x + 1 = 0$ — уравнение 5-й степени;

$x^6 - 3ix^5 - (1+i)\,x^4 + 3x^2 - \sqrt{3}\,x + \sqrt{6} = 0$ — уравнение 6-й степени.

В предыдущих главах уравнения рассматривались в множестве действительных чисел. В гл. 4 были рассмотрены следующие свойства уравнения (15.1) с действительными коэффициентами.

1. Если $x = a$ — корень уравнения (15.1), то левая часть этого уравнения делится без остатка на $x - a$.

Это свойство уравнения (15.1) имеет место и в множестве комплексных чисел.

2. Если приведенное ($a_n = 1$) уравнение (15.1) с целыми коэффициентами имеет целый корень $x = k$, то свободный член этого уравнения делится нацело на этот корень, т. е. $\frac{a_0}{k}$ — целое число.

Таким образом, если приведенное уравнение (15.1) с целыми коэффициентами имеет целые корни, то ими могут быть только делители свободного члена.

3. Приведенное целое алгебраическое уравнение (15.1) с целыми коэффициентами не может иметь дробных корней.

4. Всякое целое алгебраическое уравнение (15.1) с рациональными коэффициентами можно преобразовать в целое алгебраическое приведенное уравнение с целыми коэффициентами.

Эти свойства уравнения (15.1) позволяют находить рациональные корни этого уравнения, если все его коэффициенты рациональные.

В множестве комплексных чисел уравнение (15.1) обладает еще несколькими важными свойствами. Укажем на некоторые из них.

**Теорема 1** (основная теорема алгебры — теорема Гаусса). *Всякое целое алгебраическое уравнение* (15.1) *с любыми комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень (действительный или мнимый).*

Доказательство этой теоремы выходит за пределы программы средней школы (она доказывается в курсе высшей алгебры).

На основании теоремы Гаусса и свойства 1 алгебраического уравнения для (15.1) можно доказать следующую теорему.

**Теорема 2.** *Всякое целое алгебраическое уравнение n-й степени* (15.1) *с любыми комплексными коэффициентами имеет точно n корней, среди которых могут быть равные между собой.*

На основании теоремы 2 всякий многочлен $n$-й степени — левая часть уравнения (15.1) может быть представлен и притом единственным способом (не учитывая порядка множителей) в виде

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \\ = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n), \qquad (15.2)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные или комплексные корни уравнения (15.1).

Представление левой части уравнения (15.1) в виде (15.2) называется представлением левой части уравнения в канонической форме.

Если среди корней уравнения (15.1) есть равные между собой (кратные), то каноническая форма левой части уравнения (15.1) может быть представлена в виде

$$a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = \\ = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m}, \qquad (15.3)$$

причем $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Тогда корень $x_1$ имеет кратность $k_1$, корень $x_2$ — кратность $k_2$ и т. д. Корень первой кратности называется *простым.*

Например, при решении уравнения

$$(x - 1)^3 (x + 2)^2 (x + 3) = 0$$

получаем $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = -2$ и $x_6 = -3$, т. е. $x = 1$ — корень третьей кратности, корень $x = -2$ — второй кратности, а $x = -3$ — простой корень.

Пользуясь понятием кратности корней уравнения (15.1), теорему 2 можно сформулировать так: *целое алгебраическое уравнение n-й степени имеет n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

**Теорема 3.** *Если все коэффициенты уравнения* (15.1) — *действительные числа и уравнение имеет корень* $\alpha + \beta i$, *то корнем этого уравнения будет и число* $\alpha - \beta i$, *сопряженное с данным.*

Доказательство. Если подставить в уравнение (15.1) $x = \alpha + \beta i$, произвести соответствующие действия и собрать отдельно члены, содержащие и не содержащие $i$, то получим

$$A + Bi \equiv 0,$$

откуда $A \equiv 0$ и $B \equiv 0$.

Подставим теперь в уравнение (15.1) вместо $x$ число $\alpha - \beta i$. Тогда в результате получим число, сопряженное с числом $A + Bi$, т. е. $A - Bi$.

Так как $A \equiv B \equiv 0$, то $A - Bi \equiv 0$; следовательно, $\alpha - \beta i$ есть корень уравнения (15.1). Теорема доказана.

Следствие. Если уравнение (15.1) с действительными коэффициентами имеет комплексные корни, то только попарно сопряженные.

Пример. Решить уравнение

$$3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0,$$

если известно, что его корнем есть число $1 + i$.

Решение. Так как все коэффициенты уравнения — действительные числа, то по теореме 3 уравнение имеет корень $1 - i$, сопряженный с данным.

Составим трехчлен с корнями $1 + i$ и $1 - i$:

$$[x - (1 + i)][x - (1 - i)] = x^2 - 2x + 2.$$

Разделив левую часть уравнения на этот трехчлен, получим

$$(3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2) : (x^2 - 2x + 2) = 3x^2 + x - 1.$$

Тогда уравнение можно переписать в виде

$$(x^2 - 2x + 2)(3x^2 + x - 1) = 0.$$

Корни первого сомножителя левой части уравнения известны. Найдем корни второго сомножителя

$$3x^2 + x - 1 = 0,$$

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Ответ. $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$, $x_3 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}$, $x_4 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$.

Из теоремы 3 следует, что уравнение (15.1) нечетной степени с действительными коэффициентами всегда имеет по крайней мере один действительный корень.

Из теоремы 3 и соотношения (15.2) следует, что всякий многочлен $n$-й степени, все коэффициенты которого — действительные числа, всегда можно представить и притом единственным способом (с точностью до порядка сомножителей) в виде произведения линейных двучленов и квадратных трехчленов с действительными коэффициентами (и множителя $a_n$):

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \\ = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m} (x^2 + p_1 x + \\ + q_1)^{l_1} \ldots (x^2 + p_r x + q_r)^{l_r}, \qquad (15.4)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, q_1, \ldots, p_r, q_r$ — действительные числа и $k_1 + k_2 + \cdots + k_m + 2(l_1 + \cdots + l_r) = n$.

Заметим, что дискриминанты квадратных трехчленов в этом разложении отрицательные (корни трехчленов $x^2 + p_s x + q_s$ — комплексные, кратности $l_s$, $s = 1, 2, \ldots, r$).

## § 2. Составление целого алгебраического уравнения по его корням. Теорема Виета

**Теорема 4.** *Каковы бы ни были числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *можно составить целое алгебраическое уравнение* $n$-*й степени, корнями которого будут эти и только эти числа.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0. \qquad (15.5)$$

Корнями этого уравнения являются числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так как при этих значениях $x$ хотя бы один множитель равен нулю.

Покажем, что никакое число $a$, отличное от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не может быть корнем этого уравнения.

При $x = a$ левая часть уравнения принимает вид $(a - x_1)(a - x_2) \ldots (a - x_n)$. Так как ни один множитель этого произведения не равен нулю, то и произведение не равно нулю. А это значит, что $x = a$ не является корнем уравнения.

Таким образом, уравнение (15.5) имеет корнями только числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем уравнение (произведение биномов, отличающихся только вторыми членами)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Пример 1. Составить целое алгебраическое уравнение третьей степени, корнями которого являются числа

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1 + i, \quad x_3 = 1 - i,$$

Решение. По формуле (15.5) получаем $\left(x - \frac{1}{2}\right)[x - (1+i)] \times$ $\times [x - (1 - i)] = 0$, или, после раскрытия скобок, $x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x - 1 = 0$, откуда следует $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$.

Ответ. $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$.

Пример 2. Составить целое алгебраическое уравнение пятой степени, корни которого $x_1 = i$, $x_2 = 2$, $x_3 = -i$, $x_4 = 3$, $x_5 = 3$.

Решение. По формуле (15.4) получаем уравнение

$$(x - i)(x - 2)(x + i)(x - 3)(x - 3) = 0,$$

или

$$(x - 2)(x - 3)^2(x^2 + 1) = 0.$$

Раскрывая скобки, находим

$$x^5 - 8x^4 + 22x^3 - 26x^2 + 21x - 18 = 0.$$

Ответ. $x^5 - 8x^4 + 22x^3 - 26x^2 + 21x - 18 = 0$.

Заметим, что если в условии на составление целого алгебраического уравнения по его корням не указана степень уравнения, то задача становится неопределенной, так как корни уравнения могут быть кратными (как в примере 2 : $x_4 = x_5 = 3$); кроме того, и другие числа могут быть корнями этого уравнения. Можно ставить задачу

о нахождении уравнения наименьшей степени, корнями которого были бы данные числа. Из теоремы 4 следует, что если дано $n$ различных чисел, то наименьшая степень уравнения, корнями которого будут эти и только эти числа, равна $n$.

Пользуясь свойствами целых алгебраических уравнений, можно получить условие тождественного равенства двух многочленов. Докажем предварительно следующую теорему.

**Теорема 5.** *Если многочлен*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

*с комплексными коэффициентами обращается в нуль при $n+1$ различных значениях $x$, то он тождественно равен нулю.*

Доказательство. Предположив, что $a_n \neq 0$, запишем этот многочлен в виде (15.2):

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена. Из $n+1$ данных различных значений хотя бы одно не совпадает ни с одним корнем многочлена. Обозначим это значение $x = x_{n+1}$ ($x_{n+1}$ не равно ни одному из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

По условию теоремы

$$P_n(x_{n+1}) = a_n (x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \ldots (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Так как ни один из сомножителей, стоящих в скобках, не равен нулю, то $a_n = 0$. Тогда данный многочлен принимает вид $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, если $a_{n-1} \neq 0$.

Повторив аналогичные рассуждения относительно многочлена $P_{n-1}(x)$, получим $a_{n-1} = 0$ и т. д. Следовательно, $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = a_{n-3} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$, т. е. все коэффициенты данного многочлена равны нулю. Тогда при всех $x$

$$P_n(x) \equiv 0.$$

Следствие. Если многочлен $P_n(x)$ тождественно равен нулю то все его коэффициенты равны нулю.

**Теорема 6.** *Если два многочлена $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ тождественно равны друг другу, то их коэффициенты при одинаковых степенях $x$ равны между собой.* (Это утверждение было сформулировано без доказательства в гл. 2).

Доказательство. Пусть

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

и

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

По условию многочлены тождественно равны, т. е.

$$P_n(x) \equiv Q_n(x),$$

или

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Перенесем все члены тождества в левую часть и представим это тождество в виде

$$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) \equiv 0.$$

По теореме 5 все коэффициенты многочлена в левой части последнего тождества равны нулю:

$$a_n - b_n = 0,\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0,\ \ldots,\ a_1 - b_1 = 0,\ a_0 - b_0 = 0.$$

Отсюда следует:

$$a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ \ldots,\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0.$$

### Понятие о методе неопределенных коэффициентов

На теореме 6 о тождественности многочленов основан так называемый метод неопределенных коэффициентов. Этот метод применяется, если при преобразованиях известно, что в результате получится выражение* определенного вида; тогда это выражение записывают с неизвестными (неопределенными) коэффициентами, а затем из условия тождественности выражений вычисляют эти коэффициенты.

Пример 1. Найти произведение $(x-1)(x+1)(x+2)$.

Решение. Ясно, что в произведении получим многочлен 3-й степени со старшим коэффициентом, равным 1, и свободным членом, равным $-2$:

$$(x-1)(x+1)(x+2) = x^3 + ax^2 + bx - 2.$$

Это равенство есть тождество, из которого находим

$$\left.\begin{array}{l} \text{при}\quad x = 1\ \ 0 = 1 + a + b - 2, \\ \text{при}\ x = -1\ \ 0 = -1 + a - b - 2. \end{array}\right\}$$

Решая полученную систему, получим

$$a = 2,\ b = -1.\ \text{Таким образом,}$$
$$(x-1)(x+1)(x+2) = x^3 + 2x^2 - x - 2.$$

Ответ. $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

В данном примере $x$ придавали значения, при которых левая часть тождества обращается в нуль. Можно было взять какие-либо другие два значения; получили бы другую систему, определяющую коэффициенты $a$ и $b$. Переменной $x$ придают столько различных значений, сколько нужно найти коэффициентов. Такой способ определения коэффициентов называется *способом произвольных значений.*

Пример 2. Разделить многочлен $4x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 3x + 18$ на $x^2 + 2x + 3$.

Решение. Пусть при делении получим частное $Q = ax^2 + bx + c$ и остаток $R = mx + n$ (степень остатка ниже степени делителя). Тогда, по определению деления с остатком, имеем тождество

$$4x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 3x + 18 \equiv (x^2 + 2x + 3)(ax^2 + bx + c) + mx + n.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$4x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 3x + 18 \equiv ax^4 + (2a + b)x^3 + (3a + 2b + c)x^2 + (3b + 2c + m)x + (3c + n).$$

---

* Метод неопределенных коэффициентов применяется не только для многочленов.

По теореме 6 коэффициенты при одинаковых степенях $x$ должны быть равны между собой, т. е.

$$\begin{cases} a = 4, \\ 2a + b = 3, \\ 3a + 2b + c = 8, \\ 3b + 2c + m = -3, \\ 3c + n = 18. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a = 4$, $b = -5$, $c = 6$, $m = 0$ и $n = 0$. Таким образом,

$$4x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 3x + 18 = (x^2 + 2x + 3)(4x^2 - 5x + 6);$$

остаток $R = 0$,

Ответ. $4x^2 - 5x + 6$.

В примере 2 тождество представлено в виде равенства двух многочленов; приравняв коэффициенты при одинаковых степенях этих многочленов, получили систему для определения искомых коэффициентов. Такой способ называется *способом приравнивания коэффициентов*.

**Теорема 7** (теорема Виета). *Корни уравнения*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

*с его коэффициентами связаны следующими соотношениями:*

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ &x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_1x_2x_3 \cdots x_{n-1}x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.6)$$

Доказательство. Представим левую часть уравнения в виде

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv$$
$$\equiv a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения. Правую часть тождества преобразуем, пользуясь правилом (12.10) умножения биномов, отличающихся только вторыми членами:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \cdots + S_{n-1}x + S_n), \qquad (1)$$

где

$$S_1 = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$
$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = (-x_1)(-x_2) \cdots (-x_n) = (-1)^n x_1x_2 \cdots x_n.$$

Раскрыв скобки в правой части равенства (1), получим

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n x^n + a_n S_1 x^{n-1} + \\ + a_n S_2 x^{n-2} + \cdots + a_n S_{n-1} x + a_n S_n.$$

Из последнего тождества (по теореме 6) получаем

$$\begin{aligned} a_n &= a_n, \\ a_{n-1} &= a_n S_1, \\ a_{n-2} &= a_n S_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_1 &= a_n S_{n-1}, \\ a_0 &= a_n S_n, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ S_2 &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S_{n-1} &= \frac{a_1}{a_n}, \\ S_n &= \frac{a_0}{a_n}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2x_3 \cdots x_{n-1}x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Например, для кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ теорема Виета имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}, \end{cases} \tag{15.7}$$

для уравнения четвертой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ $(a \neq 0)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}, \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a}. \end{cases} \tag{15.8}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти зависимость между коэффициентами биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$, если его корни составляют арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть корнями уравнения есть $x_1$, $x_2$, $x_3$ и $x_4$.

Так как корни биквадратного уравнения попарно противоположны, то обозначим их $x_1 = -\alpha$, $x_2 = -\beta$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \alpha$. По условию они составляют арифметическую прогрессию $-\alpha, -\beta, \beta, \alpha$.

На основании свойства членов арифметической прогрессии $2(-\beta) = -\alpha + \beta$ или $\alpha = 3\beta$.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = p, \\ x_1x_2x_3x_4 = q, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = -p, \\ \alpha^2\beta^2 = q. \end{cases}$$

Исключая из этой системы $\alpha$ и $\beta$ с учетом $\alpha = 3\beta$ получим $9p^2 = 100q$.

Ответ. $9p^2 = 100q$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 22x - 12\sqrt{2} = 0$, зная, что его корни образуют арифметическую прогрессию.

Решение. По условию корни $x_1$, $x_2$, $x_3$ этого уравнения образуют арифметическую прогрессию; тогда $2x_2 = x_1 + x_3$. По теореме Виета $x_1 + x_2 + x_3 = 6\sqrt{2}$, или $3x_2 = 6\sqrt{2}$, откуда следует $x_2 = 2\sqrt{2}$.

Разделив обе части уравнения на $x - 2\sqrt{2} \neq 0$, получим $x^2 - 4\sqrt{2x} + 6 = 0$, откуда найдем $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_3 = 3\sqrt{2}$.

Ответ. $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 2\sqrt{2}$, $x_3 = 3\sqrt{2}$.

Пример 3. Доказать, что $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_{2n}) = 1$, если $-1$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_{2n}$ — корни уравнения $x^{2n+1} + 1 = 0$.

Доказательство. По формуле (15.2) представим левую часть уравнения в виде

$$x^{2n+1} + 1 = (x + 1)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{2n}).$$

Подставляя в это тождество $x = 1$, получим

$$2 = 2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_{2n}),$$

или

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_{2n}) = 1.$$

Пример 4. Найти сумму восьмых степеней корней уравнения

$$x^3 - x + 1 = 0.$$

Решение. Обозначим корни данного уравнения $x_1 = a$, $x_2 = b$ и $x_3 = c$.

Тогда имеем тождества

$$\begin{cases} a^3 - a + 1 \equiv 0, \\ b^3 - b + 1 \equiv 0, \\ c^3 - c + 1 \equiv 0, \end{cases}$$

откуда находим $a^3 = a - 1$, $b^3 = b - 1$, $c^3 = c - 1$. Умножив эти равенства соответственно на $a$, $b$ и $c$, получим

$$a^4 = a^2 - a, \quad b^4 = b^2 - b, \quad c^4 = c^2 - c.$$

Возведем обе части равенства $a^4 = a^2 - a$ в квадрат; получим $a^8 = a^4 - 2a^3 + a^2$. Учитывая, что $a^4 = a^2 - a$ и $a^3 = a - 1$, получим

$$a^8 = 2a^2 - 3a + 2. \tag{1}$$

Аналогично

$$b^8 = 2b^2 - 3b + 2, \tag{2}$$

$$c^8 = 2c^2 - 3c + 2. \tag{3}$$

Складывая равенства (1), (2) и (3), найдем

$$a^8 + b^8 + c^8 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3(a + b + c) + 6 = \\ = 2[(a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)] - 3(a + b + c) + 6.$$

Учитывая, что по теореме Виета

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ ab + ac + bc = -1, \\ abc = -1, \end{cases}$$

находим

$$a^8 + b^8 + c^8 = 2[0^2 - 2(-1)] - 3 \cdot 0 + 6 = 10.$$

Ответ. $x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = 10$.

Пример 5. Пусть $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Доказать, что имеет место тождество

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \equiv 3\alpha\beta\gamma.$$

Доказательство. Так как $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — корни данного уравнения, то имеем тождества

$$\begin{cases} \alpha^3 + p\alpha + q \equiv 0, \\ \beta^3 + p\beta + q \equiv 0, \\ \gamma^3 + p\gamma + q \equiv 0, \end{cases}$$

после складывания которых получим

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + p(\alpha + \beta + \gamma) + 3q \equiv 0.$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma \equiv 0, \\ \alpha\beta\gamma \equiv -q, \end{cases}$$

или $\alpha+\beta+\gamma \equiv 0$ и $q \equiv -\alpha\beta\gamma$; тогда $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

Пример 6. При каком значении $a$ уравнение

$$x^3+x^2-5x+a=0$$

имеет двукратный корень? Найти этот корень.

Решение. Пусть двукратный корень $x=\alpha$; тогда левая часть уравнения делится на $(x-\alpha)^2 = x^2-2\alpha x+\alpha^2$.

Разделив $x^3+x^2-5x+a$ на $x^2-2\alpha x+\alpha^2$, в остатке получим

$$R = (3\alpha^2+2\alpha-5)\,x+(a-2\alpha^3-\alpha^2).$$

Если $R=0$, то $x=\alpha$ — двукратный корень. Из тождества $(3\alpha^2+2\alpha-5)\,x+(a-2\alpha^3-\alpha^2)=0$ по следствию из теоремы 5 получаем

$$\begin{cases} 3\alpha^2+2\alpha-5=0, \\ a-2\alpha^3-\alpha^2=0, \end{cases}$$

откуда следует $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-\dfrac{5}{3}$, которым соответствуют значения $a_1=3$, $a_2=-\dfrac{175}{27}$.

Ответ. При $a=3$ уравнение имеет двукратный корень $x=1$, а при $a=-\dfrac{175}{27}$ — двукратный корень $x=-\dfrac{5}{3}$.

## § 3. Двучленные и трехчленные уравнения

**Двучленные уравнения.** Двучленным уравнением $n$-й степени называется уравнение вида $a_nx^n+a_0=0$ $(a_n\neq 0,\ a_0\neq 0)$. Двучленное уравнение делением обеих частей на $a_n\neq 0$ всегда можно привести к виду

$$x^n+\frac{a_0}{a_n}=0.$$

Предположим, что $a_n$ и $a_0$ — действительные числа и обозначим $\left|\dfrac{a_0}{a_n}\right| = \alpha^n$, где $\alpha>0$ (если $a_n$ и $a_0$ — комплексные числа, то уравнение решается аналогично). Тогда двучленное уравнение принимает вид

$$x^n \pm \alpha^n = 0. \tag{15.9}$$

При этом знак «+» берется, если $\dfrac{a_0}{a_n}>0$, а знак «—» — если $\dfrac{a_0}{a_n}<0$.

А. Рассмотрим уравнение

$$x^n-\alpha^n=0 \quad (\alpha>0). \tag{15.10}$$

Из последнего находим $x^n = \alpha^n$, или $x = \sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha \sqrt[n]{1}$. Учитывая (14.28), что

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = \varepsilon_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

получаем формулу для корней уравнения (15.10) в виде

$$x_k = \alpha \left( \cos \frac{2\pi}{n} k + i \sin \frac{2\pi}{n} k \right) = \alpha \varepsilon_k,$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Пример. Решить уравнение $x^3 - 8 = 0$.

Решение.

$$x_k = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} k + i \sin \frac{2\pi}{3} k \right),$$

где

$$k = 0, 1, 2,$$

откуда $x_0 = 2 (\cos 0 + i \sin 0) = 2$,

$$x_1 = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$x_2 = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Ответ. $x_1 = 2$, $x_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $x_3 = -1 - i\sqrt{3}$.

Б. Рассмотрим уравнение

$$x^n + \alpha^n = 0 \quad (\alpha > 0). \tag{15.11}$$

Из последнего находим

$$x^n = -\alpha^n,$$

или

$$x = \sqrt[n]{-\alpha^n} = \alpha \sqrt[n]{-1}.$$

Учитывая (14.29), получим

$$x_k = \alpha \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{n} \right) = \alpha \varepsilon_k,$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример. Решить уравнение $x^4 + 81 = 0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$x^4 = -81, \text{ или } x_k = \sqrt[4]{-81} = 3\sqrt[4]{-1} = 3\varepsilon_k =$$

$$= 3 \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), \text{ где } k = 0, 1, 2, 3,$$

или

$$x_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$x_1 = 3\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$x_2 = 3\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$

$$x_3 = 3\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Ответ. $x_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+$ $+i)$, $x_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

**Трехчленные уравнения.** Трехчленным называется уравнение вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0). \qquad (15.12)$$

Трехчленное уравнение заменой $x^n = t$ приводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$, корни которого обозначим $t_1 = r$, $t_2 = s$. Тогда решение трехчленного уравнения приводится к решению двух двучленных уравнений —

$$x^n = r \quad \text{и} \quad x^n = s.$$

Пример. Решить уравнение $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

Решение. Заменим $x^3 = t$; тогда относительно $t$ получаем уравнение

$$t^2 - 9t + 8 = 0,$$

из которого находим

$$t_1 = 1 \quad \text{или} \quad t_2 = 8.$$

А. $x^3 = 1$.

Двучленное уравнение третьей степени можно решить разложением левой части уравнения на множители:

$$x^3 - 1 = 0, \text{ или } (x-1)(x^2+x+1) = 0,$$

откуда следует $x_1 = 1$; $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Б. $x^3 = 8$; $x^3 - 8 = 0$; $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$;

$$x_4 = 2; \quad x_{5,6} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = -1 - i\sqrt{3}$, $x_6 = -1 + i\sqrt{3}$.

В заключение сделаем несколько общих замечаний относительно алгебраических уравнений.

Как уже было отмечено выше, всякое целое алгебраическое уравнение $n$-й степени с комплексными коэффициентами (действительными или мнимыми) имеет ровно $n$ корней (с учетом их кратности). Причем все корни принадлежат множеству комплексных чисел.

Таким образом, всякое целое алгебраическое уравнение разрешимо в множестве комплексных чисел.

Если целое алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами имеет рациональные корни, то всегда можно найти их точные значения, пользуясь способами элементарной математики. В отношении решения целых алгебраических уравнений с произвольными комплексными коэффициентами и нахождения иррациональных и комплексных корней уравнений с рациональными коэффициентами в математике существуют формулы (в радикалах) только для определения корней уравнений 1, 2, 3 и 4-й степени. Для уравнений $n$-й степени при любом $n \geqslant 5$ такие формулы заведомо не могут быть найдены (это утверждение доказано норвежским математиком Н. Абелем в 20-х годах прошлого века). Однако в некоторых частных случаях целые алгебраические уравнения выше четвертой степени решаются в радикалах (например, двучленные и трехчленные уравнения). Полностью вопрос об условиях, при которых данное целое алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах, был исследован французским математиком Э. Галуа в 30-х годах прошлого века. Оказалось, что для всякого $n \geqslant 5$ можно указать неразрешимые в радикалах уравнения $n$-й степени, даже с целочисленными коэффициентами, например уравнение $x^5 - 4x - 2 = 0$.

В связи с этим в математике разработано много различных численных методов решения алгебраических уравнений (и не только алгебраических), позволяющих найти все корни уравнения с любой степенью точности (например, метод известного отечественного математика Н. И. Лобачевского).

Что касается дробных алгебраических уравнений, то их решение всегда можно свести к решению целых алгебраических уравнений.

### Упражнения

629. Решить уравнение $x^3 - 21x^2 + 140x - 300 = 0$, если известно, что один из его корней вдвое больше одного из двух других.
630. Решить уравнение $x^3 - 13x^2 + 39x - 27 = 0$, если известно, что его корни составляют геометрическую прогрессию.
631. Решить уравнение $x^5 + 25x^3 - 8x^2 + k = 0$, зная, что один из его корней равен $5i$.
632. Решить уравнение $4x^4 - 24x^3 + 57x^2 + 18x - 45 = 0$, если один из его корней равен $3 + i\sqrt{6}$.
633. Составить уравнение наименьшей степени с действительными коэффициентами, корнями которого были бы числа $x_1 = 1$, $x_2 = i$, $x_3 = 1 - i$.
634. Не решая уравнения $x^3 - 5x^2 + 10x + 1 = 0$, найти сумму квадратов его корней.
635. Найти $a$, если известно, что сумма двух корней уравнения $18x^3 - 45x^2 + 34x + a = 0$ равна 2.
636. Решить уравнение $x^8 + 17x^4 + 16 = 0$.
637. Решить уравнение $16x^8 - 257x^4 + 16 = 0$.
638. Составить уравнение четвертой степени, корнями которого были бы числа $i$, $2i$, $-3i$, $-2i$.
639. Доказать, что $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_{n-1}) = n$, если $1$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\ldots$, $\alpha_{n-1}$ — корни уравнения $x^n - 1 = 0$.
640. Найти сумму четвертых степеней корней уравнения $x^3 - 5x + 2 = 0$.

641. Уравнения $2x^3 + 5x^2 - 5x - 12 = 0$ и $4x^3 + 4x^2 + \cdot + 6 = 0$ имеют общие корни. Найти эти корни.

642. Найти все действительные значения $a$, при которых уравнение $x^5 - 5x + a = 0$ имеет два равных корня.

643. Доказать, что при любых действительных значениях $a$ корни уравнения $(x - a)(x - a - 1) + 3(x - a - 2)(x - a - 3) = 0$ мнимые.

644. Доказать, что если при вычитании, умножении, делении и возведении в натуральную степень комплексных чисел компоненты действий заменить сопряженными числами, то и результаты данных действий заменятся на сопряженные.

## РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

645. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел, увеличенное на единицу, есть точный квадрат.

646. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} 2\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2^{n-1}}}\right)$.

647. Найти условия, при которых выражение $(x+1)^m+(x-1)^m$ делится на $x$ ($m$ — натуральное число).

648. Разложить на множители с рациональными коэффициентами $a^{10}+a^5+1$.

649. Найти натуральное число $n$ такое, чтобы сумма $1+2+3+\cdots+n$ равнялась трехзначному числу, все цифры которого одинаковы.

650. Даны уравнения $a^3x^2+ax-2=0$ и $(a-1)x^2-2(a+2)x+(a-3)=0$. Доказать, что все корни обоих уравнений одновременно или действительные, или мнимые ($a$ — действительное число).

651. Определить, при каком значении $m$ корни уравнения

$$\frac{x^2-bx}{ax-c}=\frac{m-1}{m+1} \quad (a\neq 0,\ m\neq -1,\ a+b\neq 0,\ ab\neq c,\ abc>0)$$

равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

652. Доказать, что уравнение $x^2+px+q=0$ не может иметь рациональных корней, если $p$ и $q$ — целые нечетные числа.

Решить уравнения:

653. $x^4-8x+63=0$.

654. $x-2\sqrt{x\sqrt{x-1}}+2=0$.

655. $x^4-2x^3+6x-9=0$.

656. $\sqrt[3]{4x^2+10x+4}+\sqrt[3]{2x^2-5x-3}=\sqrt[3]{2x+1}$.

657. $\sqrt[3]{x-4}=1-\sqrt{x+1}$.

658. Решить систему уравнений ($x$, $y$, $z$ — целые числа)

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=5, \\ x^4+y^4+z^4=17. \end{cases}$$

659. Определить знаменатель бесконечной убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый предшествующий член больше суммы всех последующих членов в $n$ раз.

660. Сумма четырех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 1, а сумма кубов этих чисел равна 0,1. Найти эти числа.

661. Доказать, что $5a^2-6ab+5b^2\geqslant 0$ ($a$, $b$—действительные числа).

662. Доказать, что $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant\frac{1}{4}$, если $a+b+c+d=1$ ($a$, $b$, $c$, $d$ — действительные числа).

663. Показать, что в разложении $(1+x)^{p+q}$, где $p$ и $q$ — натуральные числа, коэффициенты при членах, содержащих $x^p$ и $x^q$, равны между собой.

664. Определить наибольший коэффициент в разложении $(3x+2y)^7$.

665. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy(x+y)=42, \\ x^2y^2(x^2+y^2)=1078 \quad (x>0,\ y>0). \end{cases}$$

666. Решить неравенство

$$\frac{1-\log_2(9x^2-9x+2)}{2x-1}>0.$$

667. При каких значениях $m$ функция $y=mx^2-4x+3m+1$ принимает положительные значения при всех $x$?

668. В разложении $\left(1+x+\frac{6}{x}\right)^{10}$ найти слагаемое, не содержащее $x$.

669. Доказать, что квадрат любого целого нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1.

670. Найти, при каких значениях $m$ система уравнений

$$\begin{cases} x-y=m(1+xy), \\ xy+x+y+2=0 \end{cases}$$

имеет действительные решения.

671. Решить уравнение $|z|+z=2+i$, где $z=x+iy$.

672. Доказать, что разность корней уравнения $5x^2-2(5m+3)x+5m^2+6m+1=0$ не зависит от $m$.

673. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\lg(x+y)-2\lg 2}{1-\lg(x+y)}=1, \\ \dfrac{\lg x-\lg 3}{\lg y-\lg 7}=-1. \end{cases}$$

674. Решить уравнение $\sqrt{3^{4x}+1}+\sqrt{3^{4x}+2}=5$.

675. Определить $a$ так, чтобы все корни уравнения $\frac{x^2}{x^2-p^2}+\frac{x^2}{x^2-q^2}=a$ ($p\neq 0$, $q\neq 0$, $a$, $p$, $q$ — действительные числа) были действительными.

676. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-y|=2, \\ |x|+|y|=4. \end{cases}$$

677. Доказать, что $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ образуют арифметическую прогрессию, если $n^2=(kn)^{\log_k m}$.

678. Вычислить коэффициенты $p$ и $q$, зная, что корни уравнения $x^2+px+q=0$, увеличенные каждый на единицу, удовлетворяют уравнению $x^2-p^2x+pq=0$.

Найти области определения выражений и упростить их:

679. $\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)(1-\cos^2\alpha)}$.

680. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}$ $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$.

Найти точные значения выражений:

681. $8\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\sec\frac{\pi}{7}$.

682. $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}$.

683. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{11}\cdot\operatorname{tg}\frac{9\pi}{22}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{13}\cdot\operatorname{tg}\frac{11\pi}{26}$.

Доказать, что:

684. $\cos^3 20^\circ+\cos^3 40^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos 10^\circ$.

685. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x\ (0<x<\pi)$.

686. $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha}=\operatorname{tg}n\alpha$.

687. $\operatorname{tg}22^\circ\operatorname{tg}82^\circ+\operatorname{tg}82^\circ\operatorname{tg}142^\circ+\operatorname{tg}142^\circ\operatorname{tg}202^\circ=-3$.

688. $\cos 6^\circ\cos 66^\circ\cos 42^\circ\cos 78^\circ=\frac{1}{16}$.

689. $\cos 2\alpha=\sin 4\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$.

690. $1-4\sin 10^\circ=\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ$.

691. $\cos^2 73^\circ+\cos^2 47^\circ+\cos 73^\circ\cos 47^\circ=\frac{3}{4}$.

692. $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$, если $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}\ \left[\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right]$.

693. $\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\geqslant 6$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$.

694. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{1}{3}$, если $\sin x+\sin y=2\sin(x+y)$ и $x+y\neq 2k\pi$.

695. $\sin(2\alpha-\beta)=k\sin\beta$, если $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{1-k}{1+k}\operatorname{tg}\alpha$.

696. Какому условию должен удовлетворять параметр $a$, чтобы равенство $\sin\varphi=\frac{2a-3}{4-a}$ имело смысл?

697. Найти $5(\sin 6\alpha+\cos 6\alpha)$, если $\operatorname{tg}3\alpha=2$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$.

698. Вычислить $\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$, если $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$ и $0<x<\frac{\pi}{4}$.

699. Вычислить $\operatorname{tg}^2 y+\sec y\operatorname{cosec}y+\operatorname{ctg}^2 y$, если $\operatorname{tg}y+\operatorname{ctg}y=5$.

700. Упростить выражение $\frac{3\operatorname{ctg}^2 15^\circ-1}{3-\operatorname{ctg}^2 15^\circ}$.

Исключить $\alpha$ и $\beta$ из систем равенств:

701. $\begin{cases} x\sin^2\alpha + y\cos^2\alpha = 1, \\ y\sin^2\beta + x\cos^2\beta = 1, \\ x\operatorname{tg}\alpha - y\operatorname{tg}\beta = 0. \end{cases}$

702. $\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\beta = a, \\ x\sin\beta - y\cos\alpha = b, \\ (x^2+y^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\beta) = 2ab. \end{cases}$

Найти суммы:

703. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 2^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 3^2} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$.

704. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{13} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}$.

Построить графики функций:

705. $y = \cos^4 x + \sin^4 x$.

706. $y = \cos^6 x + \sin^6 x$.

707. $y = \operatorname{tg}(\arcsin x)$.

708. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) - \arcsin(\sin x)$.

709. Найти $\arcsin\frac{\sin x + \cos\alpha}{\sqrt{2}}$, если $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$.

Решить уравнения:

710. $\cos 2x + 2\sin 2x = \frac{2\sqrt{3}+1}{2}$.

711. $4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \operatorname{tg}\frac{x}{8} + 8\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\frac{x}{12}$.

712. $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

713. $2\arccos\sqrt{1-\frac{x^2}{5}} = \arcsin\frac{2x}{5}$.

714. Для функции $y = \operatorname{tg}(\pi\sin x)$ найти область определения и те значения $x$, при которых $y = 1$.

715. Найти наименьший положительный корень уравнения $\sin(\cos x) = \cos\frac{5\pi}{3}$.

716. Доказать, что $\operatorname{tg}^2 20°$, $\operatorname{tg}^2 40°$ и $\operatorname{tg}^2 80°$ есть корни уравнения $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$ (т. е. являются числами алгебраическими).

717. Решить неравенство $\operatorname{arctg} x > \arccos x$.

718. Решить уравнение $\sin^2 x + a\sin^2 2x = \frac{1}{2}$.

719. Доказать, что при любых действительных значениях $x$ имеет место неравенство $x^8 - x^5 + x^3 - x + 1 > 0$.

**1.** 1301. **2.** а) 5; б) —20,384. **3.** 305 и 34. **4.** 959. **5.** Частное не изменится, а остаток увеличится в $n$ раз. **8.** 90 и 126. **9.** $\frac{2}{105}$. **10.** 1,5 и 0,9. **11.** $\frac{15}{32}$; $\frac{25}{24}$; $\frac{9}{16}$. **12.** 3,08 и 16,94. **13.** 810. **14.** 2; 2,4; 2,8; 3,2; 3,6; 4. **15.** 96 и 80. **16.** $\frac{11}{50}$; $\frac{22}{25}$; $\frac{275}{2}$. **20.** 6 и 36; 12 и 18. **21.** 10 кг и 30 кг. **22.** 1550 г. **23.** 500 г. **24.** $\approx 12{,}1\%$. **25.** $\approx 3{,}9$ т. **26.** $\approx 53{,}57$. **27.** $\approx 0{,}33$. **28.** $\approx 7{,}53$. **29.** 2,1 ($\pm 0{,}2$). **30.** 14,8 ($\pm 0{,}2$). **31.** 1. **32.** $x^2 - 2ax$. **33.** $(x+a-1)(x-a-1)(x+1)^2$. **34.** $(x+1)(3x-1)\times(9x^2-6x+4)$. **35.** $(x+2)(x-1)(x^2+x+6)$. **36.** $(z-a)(z+b)\times(z-c)$. **37.** $m=3$. **38.** $a=-4$; $b=-6$. **39.** $k=1$. **40.** $\begin{cases} a_1 = 7; \\ b_1 = -2, \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 = -9{,}25; \\ b_2 = 1{,}25. \end{cases}$ **44.** Указание: возвести обе части равенства $m = n_1^2 + k_1^2$ в квадрат и выделить квадрат разности $(n_1^2 - k_1^2)^2$. **46.** $x+3$. **47.** $12x^4 - 20x^3 + 5x^2 + 5x - 2$. **48.** $a^2 - 1$. **49.** 1. **50.** 1. **51.** $\frac{10x}{x+10}$. **52.** $\frac{(x-1)^2}{x(x^2-x-1)}$. **56.** Указание: для доказательства необходимости надо, пользуясь условием тождественного равенства многочленов, показать, что из независимости значений этой дроби от $x$ следует условие. Для доказательства достаточности надо показать, что из условия $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ следует независимость значений данной дроби от $x$. **59.** Указание: обозначить $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ и воспользоваться свойством ряда равных отношений. **61.** $A = 1$. **62.** $A = \sqrt{a - a^2}$ при $0 \leqslant a < 1$. **63.** $A = \sqrt{\frac{a-2}{a+2}}$. **64.** $A = \begin{cases} \sqrt{\frac{6b}{a}} \text{ при } a^3 \geqslant 3b; \\ a\sqrt{2} \text{ при } a^3 < 3b. \end{cases}$ **65.** $A = 2$. **68.** $A = -2$. **69.** $A = 1$. **70.** $A = 1$. **71.** $-(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})(4 + 2\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3})$. **72.** $\frac{1}{2}(\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{21} - \sqrt{14})$. **73.** $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$. **74.** $\frac{1}{2}(2 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})$.

**75.** $A=\begin{cases}-2, & \text{если } 1\leqslant a<2,\\ 2, & \text{если } a>2.\end{cases}$ **76.** $A=\begin{cases}a-b, & \text{если } a\geqslant b>0,\\ \dfrac{b^2-ab}{a}, & \text{если } b>a>0.\end{cases}$

**77.** $A=\begin{cases}\dfrac{a}{b}, & \text{если } a>b>0,\\ \dfrac{b}{a}, & \text{если } b>a>0.\end{cases}$ **78.** $A=\dfrac{1}{m}$. **79.** $A=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}$, если $|a|\geqslant 1$ и $|b|\geqslant 1$ или $0<|a|\leqslant 1$ и $0<|b|\leqslant 1$; $A=\dfrac{a^2b^2+1}{a^2+b^2}$, если $|a|>1$ и $0<|b|<1$ или $0<|a|<1$ и $|b|>1$. **80.** $-\sqrt{2x}$. **81.** Решений нет. **82.** $x=1\dfrac{6}{13}$. **83.** $x_1=-5$, $x_2=x_3=-1$, $x_4=3$. **84.** $x_1=-\dfrac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$, $x_2=-\dfrac{1}{2}(7-3\sqrt{5})$, $x_3=x_4=1$. **85.** $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=4$. **86.** $x_1=x_2=-1-\sqrt{2}$, $x_3=x_4=-1+\sqrt{2}$. **87.** $x_1=-2$, $x_2=1$. **88.** $x_1=x_2=-4$. **89.** $x_1=-2-2\sqrt{2}$, $x_2=-2+2\sqrt{2}$. **90.** $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{7}{2}$. **91.** $x_1=-1$, $x_2=3$. **92.** $x_1=-3$, $x_2=x_3=2$. **93.** $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=x_4=x_5=1$. **94.** $x_1=-6$, $x_2=0{,}5$, $x_3=2$, $x_4=3$. **95.** $x=3+\sqrt[3]{3}$. **96.** Решений нет. **97.** $x_1=x_2=-1-\sqrt{2}$, $x_3=x_4=-1+\sqrt{2}$. **98.** $x_1=\dfrac{17}{19}$, $x_2=3$. **99.** $x=7$. **100.** $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=4$. **101.** $k=5$. **102.** $k=4$. **103.** $x^2+(p^3-p^2-3pq+2q)x+(p^2-3q)(3pq-p^3)=0$. Указание: воспользоваться теоремой Виета. **104.** $a_1=-2{,}5$; $a_2=1{,}5$. **105.** $a_1=-3$, $a_2=5$. **106.** $a=1$. **107.** $m=12$, $x_2=-1{,}5$, $x_3=\dfrac{2}{3}$. **108.** $a=-15$, $b=12$. **109.** Указание: показать, что все коэффициенты уравнения — рациональные числа и его дискриминант — точный квадрат рационального числа. **112.** $x=6$. **113.** $x=-8$. **114.** $x_1=-2{,}4$, $x_2=5$. **115.** $x_1=-27$, $x_2=64$. **116.** $x=\dfrac{81-9\sqrt{97}}{8}$. **117.** $x_1=-\dfrac{30}{127}$, $x_2=5$. **118.** $x_1=0$, $x_2=2$. **119.** $x_1=-5$, $x_2=0$. **120.** $x_1=-24$, $x_2=2$. **121.** $x_1=-1$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$, $x_3=0$. **122.** $x_1=-79$, $x_2=1$. **123.** $3\leqslant x\leqslant 8$. **124.** $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **125.** $x=1\dfrac{9}{16}$. **126.** $x_1=1$, $x_2=\dfrac{5+2\sqrt{7}}{3}$. **127.** Решений нет. **128.** $x=-1$. **129.** $x=a^2-1$, если $a\neq 0$ и $a\neq\pm 1$; $x$ — любое действительное число, не равное нулю ($x\neq 0$), если $a=0$, и не равное 1 ($x\neq 1$), если $a=1$; уравнение не имеет числового смысла, если $a=-1$. **130.** $x_1=b$, $x_2=2a+b$, если $a\neq\pm b$; $x=3a$, если $a=b\neq 0$; $x=-a$, если $a=-b\neq 0$; уравнение не имеет числового смысла, если $a=b=0$. **131.** $x_1=n^2-p^2$, $x_2=n+p$, если $n\neq\pm p$; $x=2n$, если $n=p\neq 0$; уравнение не имеет числового смысла, если $n=-p$. **132.** $x=\dfrac{n+1}{n-1}$, если $n\neq 1$, $n\neq 0$; $x=-1$, если $n=1$; уравнение не имеет числового

смысла, если $n = 0$. 133. $x = -a$, если $a \leqslant 0$; $x = a$, если $a \geqslant 0$. 134. $x = \frac{(a-1)^2}{4}$, если $a \geqslant 1$; $x = 0$, если $a = 0$; решений нет, если $a < 1$ и $a \neq 0$. 135. На 10%. 136. 19%. 137. 6 ведер и 4 ведра. 138. 6 л. 139. 2850 км, 2250 км и 1950 км. 140. Скорость автомобиля — 100 или 80 км/ч, а катера — 80 или 60 км/ч. 141. 2 м. 142. 54. 143. 36. 144. 1375 км. 145. 14 и 16 км. 146. 5, 15 и 25 км/ч. 147. 20 ч. 148. 50 км. 149. 14 ч. 150. 1,5 кг. 151. 500, 1000 и 1500 л. 152. 2 : 7 : 1. 153. 6 и 10 мин. 154. 45 и 36 дней. 155. 60 и 80 км/ч. 156. 60 км/ч. 157. $\frac{\sqrt{a^2t^2 + 4abt} - at}{2t}$ (км/час). 158. 1-й стан — за $\frac{2t + p + \sqrt{4t^2 + p^2}}{2}$ (ч), 2-й — за $\frac{2t - p + \sqrt{4t^2 + p^2}}{2}$ (ч). 160. $(2n - 1)\,p\%$. 161. (—5; 2), (3; 2). 162. (0,25; 2,25). 163. (1; 0). 164. (1; —0,5), $\left(2; -\frac{2}{3}\right)$. 165. (1; 5), (5; 1). 166. $\left(-\frac{67}{29}; \frac{21}{29}\right)$, (1; 1). 167. (0; 2), (3; 2), $(2 - \sqrt{5}; -\sqrt{5})$, $(2 + \sqrt{5}; \sqrt{5})$. 168. (—3; —2), (—1; —4), (4; 5), (6; 3). 169. (0; 1), $\left(\frac{24}{19}; \frac{47}{19}\right)$, $\left(\frac{15}{13}; \frac{8}{13}\right)$, (2; 1). 170. (—3; —2), (—2; —3), (0; 0), (2; 3), (3; 2), $(-\sqrt{19}; \sqrt{19})$, $(-\sqrt{7}; -\sqrt{7})$, $(\sqrt{19}; -\sqrt{19})$, $(\sqrt{7}; \sqrt{7})$. 171. (—3; —2), (3; 2), $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 172. (1; 3), (3; 1). 173. (0; 0), $(-\sqrt[4]{8}; -\sqrt[4]{2})$, $(\sqrt[4]{8}; \sqrt[4]{2})$, $\left(-\frac{1}{2}\sqrt[4]{108}; -\frac{1}{2}\sqrt[4]{12}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{108}; \frac{1}{2}\sqrt[4]{12}\right)$. 174. (2; 1), $\left(\frac{19\sqrt[4]{4}}{4}; -\frac{17\sqrt[4]{4}}{4}\right)$. 175. (—4; —1), (—1; —4), (—1; 5). 176. (1; 2), (2; 1). 177. (—3; —2), (—2; —3), (2; 3), (3; 2). 178. (1; 2), (2; 1). 179. (3; —4; —2). 180. (3; 1; 2), (3; 2; 1). 181. (1; 2; 5), (1; 5; 2), (2; 1; 5), (2; 5; 1), (5; 1; 2), (5; 2; 1). 182. (0; 0; 0), (1; 2; 1), (2; 1; 1), $\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\right)$. 183. (4; 6; 9). 184. (—5; —2; —7), (5; 2; 7). 185. $\left(\frac{24}{23}; 24\right)$, $\left(3; \frac{3}{2}\right)$. 186. (—5; —3), (3; 1), $\left(-\sqrt{10} - 1; -\frac{4\sqrt{10} + 5}{5}\right)$, $\left(\sqrt{10} - 1; \frac{4\sqrt{10} - 5}{5}\right)$. 187. (5; —3), (5; 3), $\left(-\frac{\sqrt{118}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{118}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. 188. (2,5; 6). 189. (16; 25); (25; 16). 190. (4; 9). 191. а) $\left(\frac{2(m-1)}{3m-1}; \frac{m+1}{1-3m}\right)$, если $m \neq -1$ и $m \neq \frac{1}{3}$; б) при $m = -1$ — бесчисленное множество решений; в) при

$m = \frac{1}{3}$ — нет решений. **192.** 8 км. **193.** 15 и 30 дней. **194.** 12 и 30 кг. **195.** 12 руб. или 9 руб. 50 коп. **196.** 15 участников; двое выбывших не играли между собой. **197.** 40 часов. **198.** 230 000. **199.** 50, 20, 15, 10 лет. **200.** 720-й, 800-й и 930-й пробы. **211.** $x < 0$ или $1 < x < 6$. **212.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$ или $3 \leqslant x \leqslant 5$. **213.** $1 < x < \frac{8}{3}$. **214.** $x < -2$, $-\frac{5}{4} < x < -1$ или $1 < x < 5$. **215.** $x < -\frac{4}{3}$, $-\frac{79}{75} < x < \frac{3}{2}$, $x > 2$. **216.** $x > 5$. **217.** $-2 < x < 1 - \sqrt{7}$, $x > 2\sqrt{2}$. **218.** $-1 < x < 2$. $3 < x < 6$. **219.** $1 < x < 3$. **220.** $x > -4$. **221.** $x > 34 + 2\sqrt{197}$ **222.** $x > -1$. **223.** $x > \frac{1}{2}(\sqrt{34} - 1)$. **224.** $x > 5$. **225.** $2 < x < 8$. **226.** $x > 4\frac{1}{3}$. **227.** $-13 < x < -6$, $2 < x < 5$. **228.** $\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < x < 2$. **229.** $x = 4$, $5 \leqslant x \leqslant 7$. **230.** $1\frac{3}{4} \leqslant x < 4$. **231.** $\frac{8}{3} < k < 4$, $4 < k < 6$. **232.** $m > -10$. **233.** $2 < a \leqslant 6$. **234.** $-2 < m < \frac{1}{4}$. **235.** $2 - \frac{\sqrt{2}}{2} < a < 2$. **236.** $\frac{b-a}{m-n}$, если $a > b$ и $m > n$ или $a < b$ и $m < n$. **237.** $\frac{aq + 100b}{p+q}$ кг, $\frac{ap - 100b}{p+q}$ кг; $a > 0$, $b > 0$, $0 < p < 100$, $0 < q < 100$ и $ap > 100b$. **238.** $\frac{2bt + 3a + \sqrt{(2bt+3a)^2 - 16abt}}{4t}$ км/ч, если $a > 0$, $b > 0$, $t > 0$ и $(2bt + 3a)^2 \geqslant 16abt$. **239.** $\frac{k}{2}[k - a \pm \pm \sqrt{(k-a)^2 - 4c}]$ при $a > 0$, $c > 0$ и $k \geqslant a + 2\sqrt{c}$. **240.** $\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{ab}{c}}$ (рабочих), если $a > 0$, $c > 0$ и $b$, $\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{ab}{c}}$ — натуральные числа. **241.** $-3 < x < 3$. **242.** $-\infty < x < 2$, $2 < x < +\infty$. **243.** $-\infty < x < -2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} < x < +\infty$. **244.** $(-\infty; -3)$, $(-3; 0)$, $(0; 3)$, $(3; +\infty)$. **245.** $x = 1$. **246.** $(-\infty; 0)$. **247.** Функция не существует. **248.** Функция не существует. **249.** $(-1; 1)$, $(2; 10)$. **250.** $(-\infty; -0{,}4)$, $x = 0$, $[6; +\infty]$. **251.** Ни чётная, ни нечетная. **252.** Четная. **253.** Нечетная. **254.** Ни четная, ни нечетная. **255.** Нечетная. **256.** $(-6; 1)$, $(4; +\infty)$. **257.** $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$. **258.** $(-\infty; -3)$, $(1; 5)$. **259.** $6 \leqslant x \leqslant 10$. **260.** $x_1 = -5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$. **261.** $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. **262.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ — интервал убывания, $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ — интервал возрастания. **263.** $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ — интервалы

убывания. **264.** $(-1; +\infty)$ — интервал возрастания. **265.** Наименьшее значение функции равно 1, а наибольшее — 5. **266.** Наименьшего значения нет; наибольшее равно $\frac{1}{7}$. **267.** Наименьшего значения нет; наибольшее равно $\frac{17}{4}$. **268.** Рис. 196. **269.** Рис. 197. **270.** Рис. 198. **271.** Рис. 199. **272.** Рис. 200. **273.** Рис. 201. **274.** Рис. 202. **275.** Рис. 203. **276.** Рис. 204. **277.** Рис. 205. **278.** $x_1 = 1$. $x_2 = 2$. **279.** $x = 2$. **280.** $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **281.** $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 \approx 2{,}3$. **282.** $(2; 1)$. **283.** $(-1; -1)$, $(1; 1)$. **284.** $\frac{1}{3} < x < 1$. **285.** $(-\infty; 1)$, $(4; +\infty)$. **286** $(2; +\infty)$. **287.** $-0{,}6 < x < 0{,}4$. **288.** $-\infty < x < -2$, $4 < x < +\infty$. **289.** $1 < x < 2$. **290.** $-10 < x < -4$ или $4 < x < 10$. **291.** $-1 - \sqrt{2{,}5} < a < -1 + \sqrt{2{,}5}$. **292.** $a > 1$. **293.** $m > 0$. **294.** $m = 5$. **295.** $a = 2$, $b = -16$, $c = 24$. **296.** $R = \frac{p}{2}$. **297.** $h = \sqrt{2S}$. **298.** $\begin{cases} -2 < x < 0, \\ -2x - 2 < y < \frac{4-x}{3} \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 \leqslant x < 1, \\ 3x - 2 < y < \frac{4-x}{3}. \end{cases}$

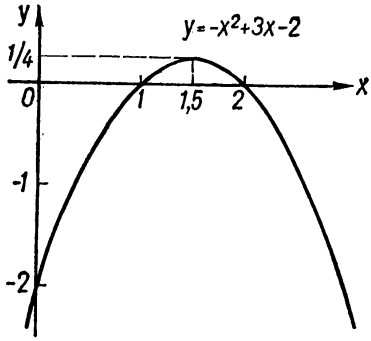


Рис. 196.

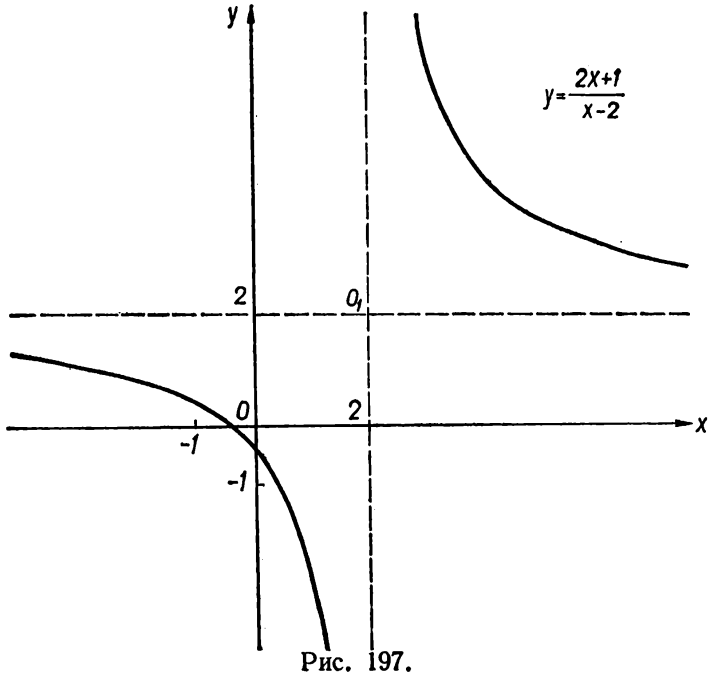


Рис. 197.

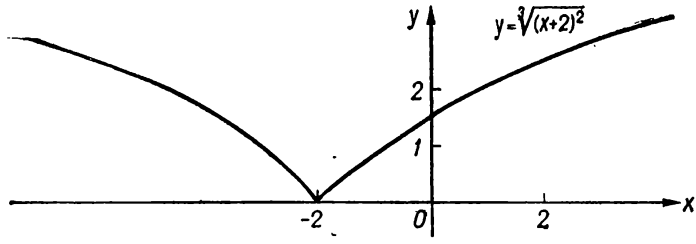



Рис. 198.

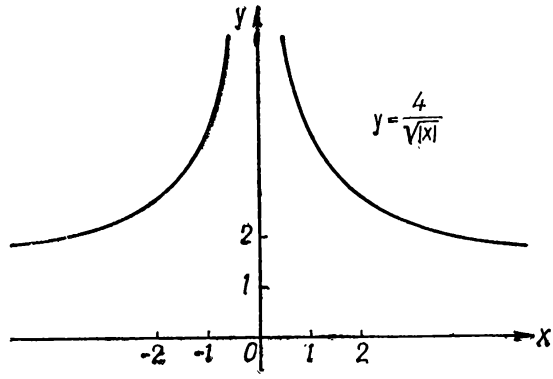



Рис. 199.

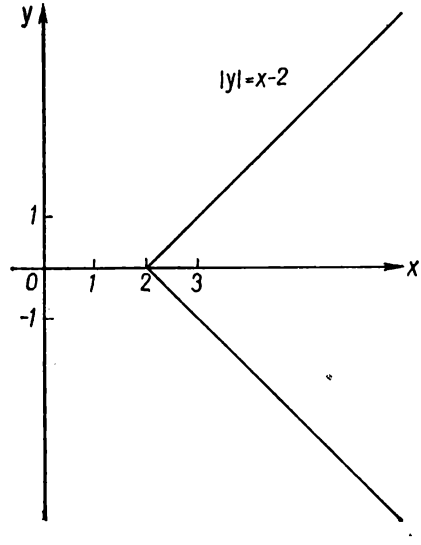



Рис. 200.

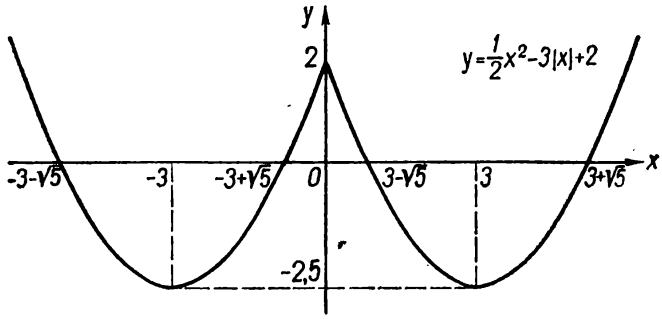



Рис. 201.

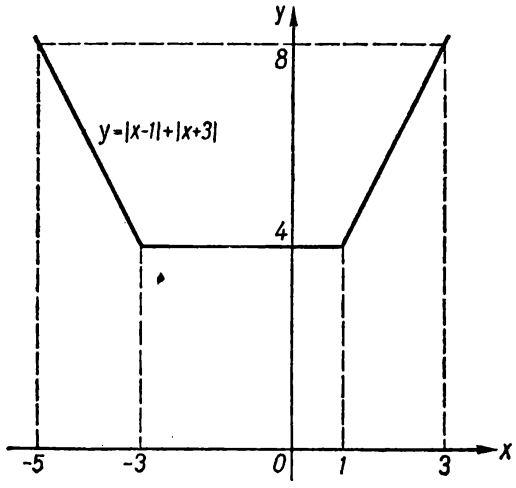



Рис. 202.

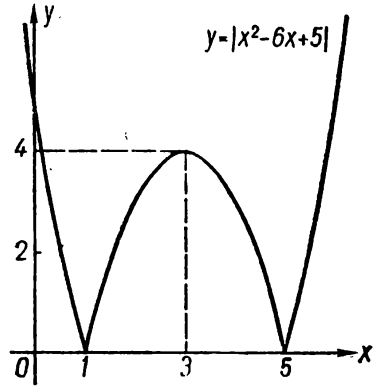



Рис. 203.

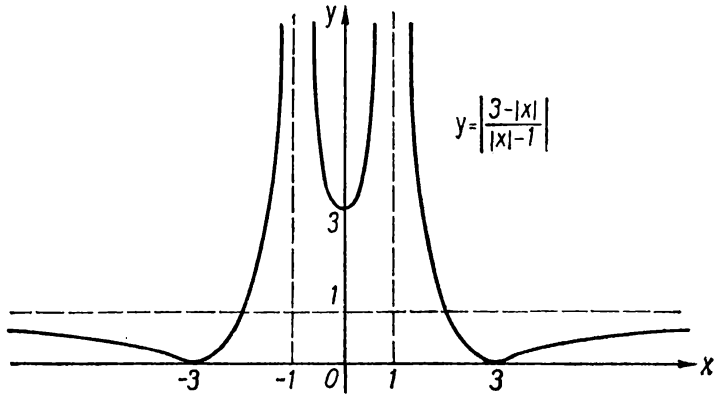



Рис. 204.

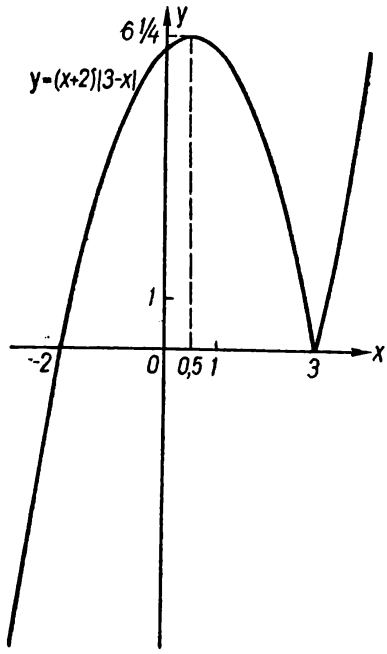



Рис. 205.

**299.** $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x^2 - 2 \leqslant y \leqslant \frac{3}{4} x^2 - 1. \end{cases}$ **300.** $\begin{cases} -4 < x < 4, \\ \frac{5}{16} x^2 - 2 < y < \sqrt{25 - x^2}. \end{cases}$

**301.** Указание: установить знак разности $a_{n+1} - a_n$. **305.** 4; 5; 6 или 3; 5; 7. **306.** $S_{m+n} = \frac{(m+n-1)(m+n)}{2}$. **307.** $\pm$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. **308.** $\pm$2, 6, 10, 14, ... **309.** $\pm$1, 3, 5, ... **310.** $\pm\pm$2, 6, 18,

54, 162, 486, 1458 или $\pm\frac{26}{7}$; $-\frac{78}{7}$; $\frac{234}{7}$; $-\frac{702}{7}$; $\frac{2106}{7}$; $-\frac{6318}{7}$; $\frac{18954}{7}$. 311. $\pm 54, 18, 6, 2$ или $\pm 27, -9, 3, -1$. 312. $\pm 2, 6, 18, 54$ или $\pm 54, 18, 6, 2$. 313. $\pm 24, 12, 6$. 314. 165 150. 315. $\pm 6, 12, 24, 48$. 316. $\pm 4, 12, 36$ или $\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}$. 317. $\pm 6, 2, \frac{2}{3}, \ldots$ 318. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 321. $a$. 324. $\log_9 20 = \frac{a+1}{2b}$. 325. $(0; 1)$, $(1; +\infty)$. 326. $x \neq 3$. 327. $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$. 328. $(-3; 5)$. 329. $(-4; +\infty)$. 330. $(4; +\infty)$. 331. $(0; 2)$. 332. Рис. 206. 333. Рис. 207. 334. Рис. 208. 335. Рис. 209. 336. Рис. 210. 337. Рис. 211. 338. Рис. 212. 339. Рис. 213. 340. Рис. 214. 341. Рис. 215. 342. Рис. 216. 343. Рис. 217. 344. 9. 345. 0. 346. 1. 347. 5. 348. $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 2$. 349. $x = 0{,}5$. 350. $x = 0$. 351. $x = \frac{1}{3}$. 352. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. 353. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$. 354. $x_1 = 2$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 8$, $x_4 = 3{,}5$, $x_5 = 4$. 355. $x = 13$. 356. $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 8$. 357. $x = 2$. 358. $x_1 = \sqrt[5]{5}$, $x_2 = 5$. 359. $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = 2$. 360. $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = 3$. 361. $x = 1$. 362. $x_1 = 12$, $x_2 = 17$, $x_3 = 22$. 363. $x_1 = a^2$, $x_2 = a\sqrt[3]{a}$, где $a > 0$, $a \neq 1$. 364. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$. 365. $x_1 = 0{,}0001$, $x_2 = 10$. 366. $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = 6$. 367. $x = 11$. 368. $(1; 4)$. 369. $(3; 4)$. 370. $(-1; -1)$, $(1; 1)$, $\left(\frac{25}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}; \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. 371. $(3; 4)$. 372. $(\sqrt[3]{9}; 9)$, $(9; \sqrt[3]{9})$. 373. $(20; 16)$. 374. $(-\sqrt{3}; 1)$, $(\sqrt{3}; 1)$. 375. $(3; 2)$. 376. $(1; 1)$, $\left(\left(\frac{\sqrt{57}-3}{6}\right)^8; \left(\frac{\sqrt{57}-3}{6}\right)^4\right)$. 377. $(\log_2 100; 1)$, $(\log_{102} 100; 101)$. 378. $(-1; 1)$, $(1; 1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \sqrt[3]{9}\right)$. 379. $-2 < x < -1\frac{3}{8}$, $-1 < x < +\infty$. 380. $-\infty < x < 0$. 381. $-\infty < x < \frac{-3-\sqrt{21}}{3}$; $\frac{-3+\sqrt{21}}{3} < x < +\infty$. 382. $0 < x < 1$, $2 < x < +\infty$. 383. $-4{,}5 < x < -2$, $4 < x < +\infty$. 384. $0 < x < 1$, $2 < x < +\infty$. 385. $-\infty < x < -0{,}5$. 386. $\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{2}} < x < \left(\frac{5}{3}\right)^{\sqrt{2}}$. 387. $0 < x < 1$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2$. 388. $0 < x < 1$, $\frac{4}{3} \leqslant x < 4$. 389. $\frac{2}{3} < x < +\infty$. 390. $0 < x < \frac{1}{2}$, $1 < x < 2$, $3 < x < 6$. 391. $\frac{1}{5} < x < 5$. 392. $1 < x < 4$. 393. $2 < x \leqslant 4$. 394. $2 < x < 5$. 395. $1 < x < 3$. 396. $1 \leqslant x < 2$, $5 < x \leqslant 6$. 397. $0 < x < 0{,}5$. 398. $2 < x < 3$. 399. $3 < x < 4{,}5$. 400. $-5 < x < -3$, $3 < x < 5$. 401. $x = 1$. 402. $x_1 \approx -1{,}9$, $x_2 = 1$. 403. $x_1 \approx -3{,}8$,

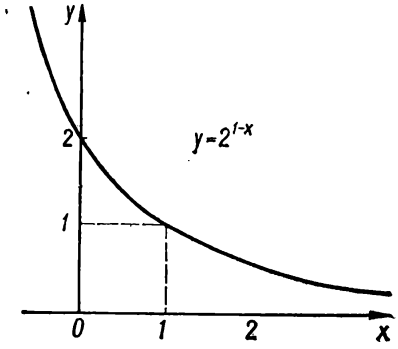



Рис. 206.

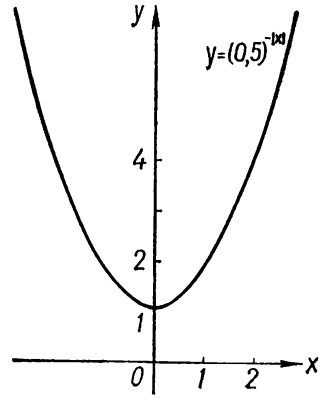



Рис. 207.

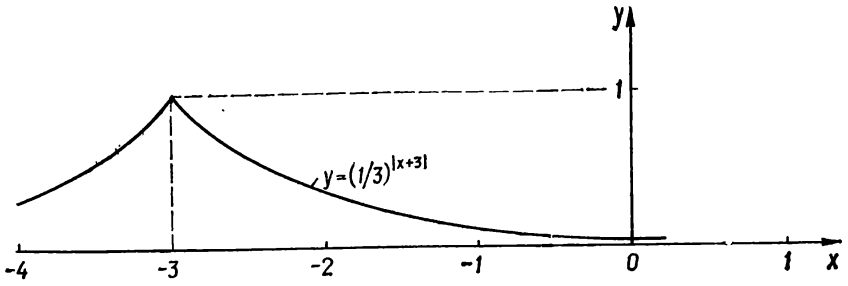



Рис. 208.

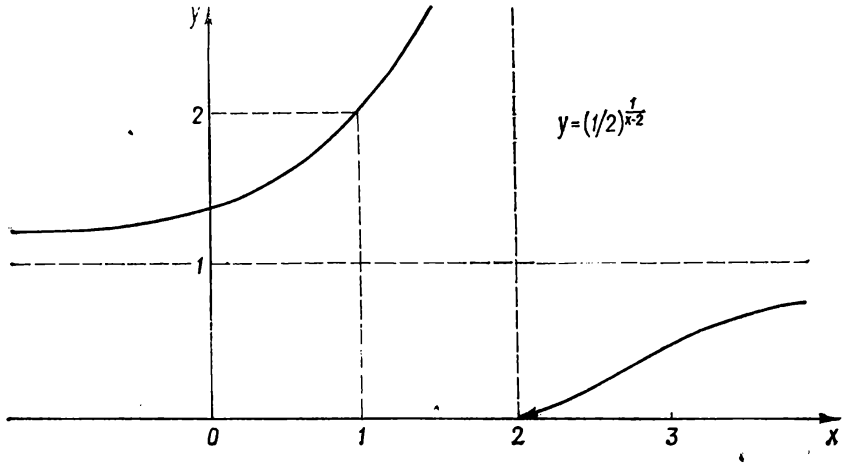



Рис. 209.

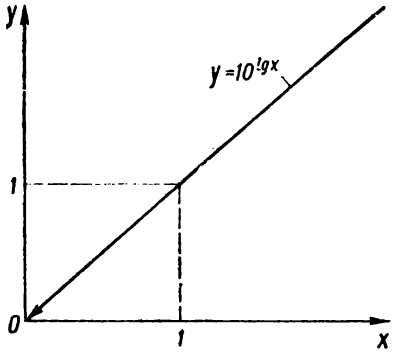



Рис. 210.

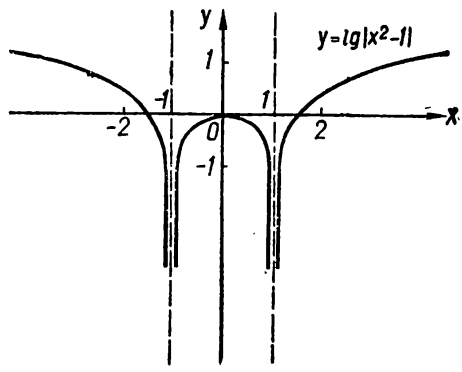



Рис. 211.

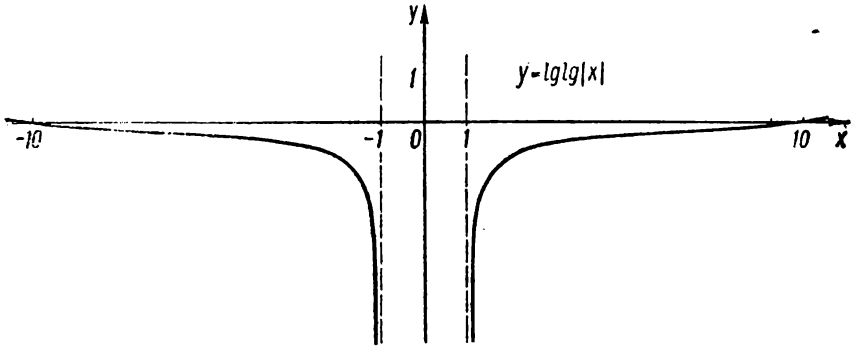



Рис. 212.

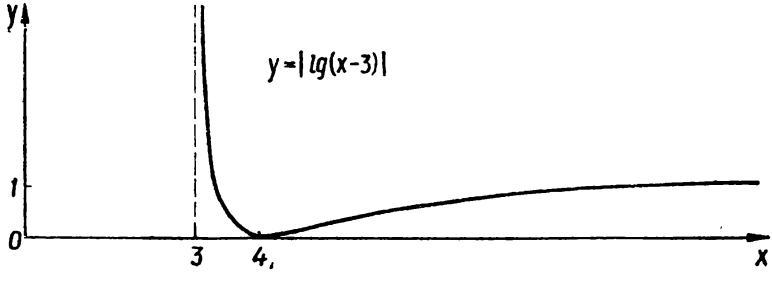



Рис. 213.

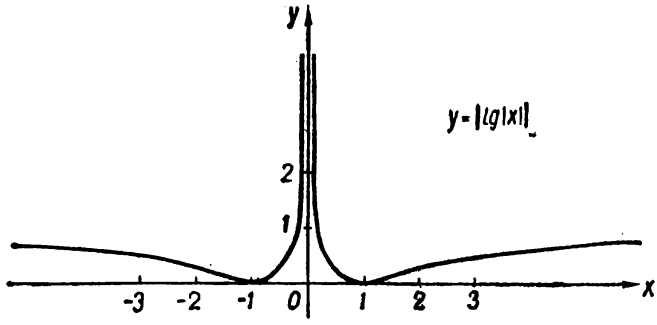



Рис. 214.

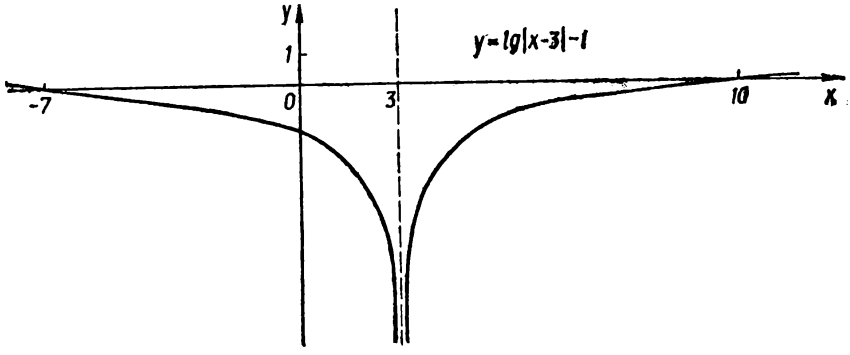



Рис. 215.

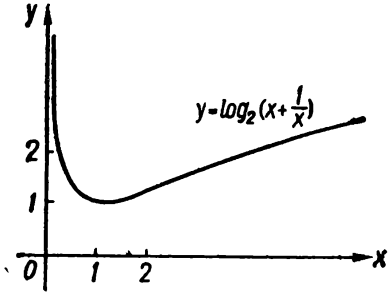



Рис. 216.

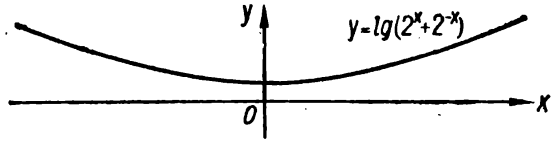



Рис. 217.

$x_2 \approx 3{,}2$. **404.** $x \approx 0$. **405.** Три корня. **406.** Четыре корня. **407.** Действительных корней нет. **408.** (1; 1). **409.** (2; 3). **410.** $-\infty < x < -3$, $3 < x < +\infty$. **411.** $-\infty < x < -5$, $-5 < x < 5$. **412.** $3 < x < +\infty$.

**413.** $4{,}5 < x < 5$. **414.** $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < y < x, \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \leqslant x < \sqrt{2}, \\ 0 < y < \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

**415.** $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 + 2 < y < +\infty, \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{2} < x < 2, \\ 0 < y < x^2 - 2, \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \leqslant x < +\infty, \\ 0 < y < x. \end{cases}$ **416.** 1; $-\infty < \alpha < +\infty$. **417.** 1; $-\infty < \alpha < +\infty$. **418.** 1; $\alpha$ и $\beta$ — любые действительные числа. **419.** 3; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Примечание. Если в последующих ответах о значениях $n$, $k$, $m$ и т. д. ничего не оговорено, то под ними понимаются любые целые числа. **420.** $-1$; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} \cdot n$, $\alpha \neq -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$. **421.** 1; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4}(2n + 1)$. **422.** 5; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} \cdot n$. **423.** $2 \cos \alpha$ при $\alpha \neq \dfrac{\pi}{3}(2n + 1)$. **424.** $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$ при $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$ при $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$. **425.** 1; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $\alpha \neq -\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $\alpha \neq -\dfrac{\pi}{6} + \pi m$. **426.** 1; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}(2n + 1)$, $\beta \neq \dfrac{\pi}{2}(2k + 1)$, $\alpha + \beta \neq \pi m$. **427.** 0,5. **428.** 1. **429.** 4. **430.** $-0{,}5$. **431.** 4. **432.** 7. **433.** 5. **434.** $\dfrac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{4}$. **435.** 0,5. **436.** 1,5. **437.** $\dfrac{1}{16}$. **438.** $\dfrac{1}{16}$. **439.** $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}(2n + 1)$; $\beta \neq \dfrac{\pi}{2}(2k + 1)$, $\alpha + \beta \neq \dfrac{\pi}{2}(2m + 1)$. **440.** $\alpha$, $\beta$ — любые действительные числа. **441.** $\alpha \neq \pi(2n + 1)$. **442.** $\alpha \neq \pi(2n + 1)$. **443.** $-\infty < \alpha < +\infty$. **444.** $-\infty < \alpha + \infty$. **445.** $\alpha \neq \pi n$. **446.** $\alpha \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$. **447.** $\alpha \neq \dfrac{\pi}{6} \cdot n$ и $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} \cdot k$. **448.** $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}(2n + 1)$. **449.** $\alpha \neq \dfrac{\pi}{8} \cdot n$. **450.** $-\infty < \alpha < +\infty$. **451.** $\alpha \neq \dfrac{\pi}{8}(2n + 1)$; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{12}(2k + 1)$. **456.** а) $x \neq \dfrac{\pi}{4} \cdot n$; б) $-\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \dfrac{\pi}{4} + \pi n$; в) $2\pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$. **457.** а) $T_0 = 1$; б) $T_0 = 2\pi$; в) $T_0 = 4\pi$; г) $T_0 = \pi$. **458.** а) Четная; б) нечетная; в) ни четная, ни нечетная. **459.** а) $x_n = \dfrac{\pi}{4}(2n + 1)$; б) $x_n = \dfrac{\pi}{20}(4n - 1)$. **460.** а) $y > 0$ при $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2} < x < \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$ и $y < 0$ при $\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2} < x < \dfrac{5\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$; б) $y > 0$ при $\dfrac{1}{3} - \dfrac{2n + 1}{3}\pi < x < \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\pi n$ и $y < 0$ при $\dfrac{1}{3} - \dfrac{2n + 2}{3}\pi < x < \dfrac{1}{3} - \dfrac{2n + 1}{3}\pi$. **461.** а) Возрастает на промежутках $\dfrac{3}{4} + \dfrac{4n - 1}{8}\pi < x < \dfrac{3}{4} + \dfrac{4n + 1}{8}\pi$ и убывает на проме-

жутках $\frac{3}{4}+\frac{4n+1}{8}\pi<x<\frac{3}{4}+\frac{4n+3}{8}\pi$; б) возрастает при $\frac{\pi}{4}n<$ $<x<\frac{\pi}{8}(2n+1)$; промежутков убывания не имеет. 462. а) Наибольшее значение равно 5 при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, а наименьшее равно $-2$ при $x=\pi n$; б) наибольшее значение равно 5 при $x=\arccos\frac{4}{5}+$ $+2\pi n$, а наименьшее равно $-5$ при $x=\arcsin\frac{3}{5}+\pi(2n+1)$.

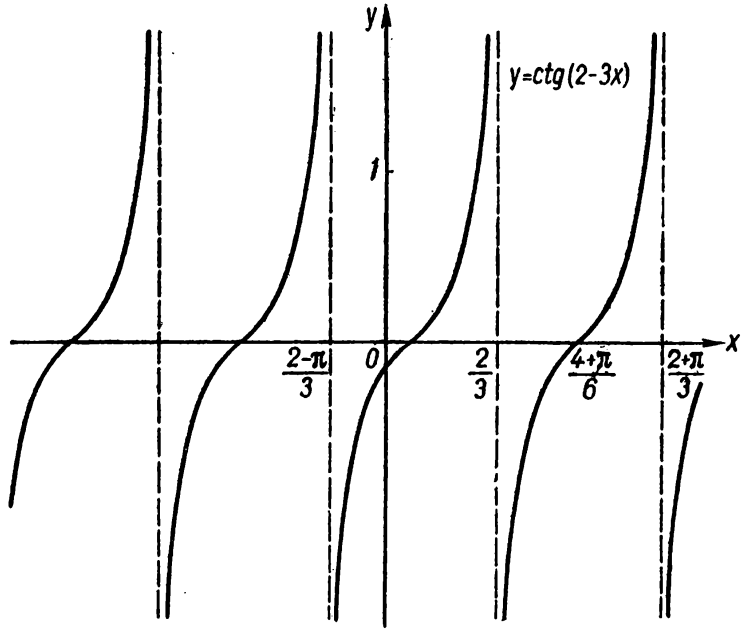



Рис. 218.

463. а) График функции выпуклый на промежутках $\frac{8n-1}{20}\pi<x<$ $<\frac{8n-3}{20}\pi$ и вогнутый на промежутках $\frac{8n+3}{20}\pi<x<\frac{8n+7}{20}\pi$; б) график функции выпуклый на промежутках $\frac{\pi}{12}(2n-1)-\frac{1}{6}<$ $<x<\frac{\pi}{6}n-\frac{1}{6}$ и вогнутый на промежутках $\frac{\pi}{6}n-\frac{1}{6}<x<\frac{\pi}{12}\times$ $\times(2n+1)-\frac{1}{6}$. 464. г) Рис. 218; ж) рис. 219. 465. $x_k=\operatorname{arctg}3+$ $+\pi k$, $x_n=-\frac{\pi}{4}+\pi n$. 466. $x_n=\frac{\pi}{4}(4n+1)$. 467. $x_k=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_n=$

arctg3$+\pi n$. 468. $x_n=-\operatorname{arctg}4+\pi n$. 469. $x_k=-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}+\pi(2k+1)$, $x_n=\pi+2\pi n$. 470. $x_n=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$. 471. $x_n=\pi n$. 472. $x_k=\pm\frac{2\pi}{3}+\pi k$, $x_n=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\cdot n$. 473. $x_k=0{,}1\pi+\pi k$, $x_n=0{,}3\pi+\pi n$, $x_m=0{,}7\pi+\pi n$, $x_p=0{,}9\pi+\pi p$. 474. $x_n=\frac{\pi}{4}(2n+1)$. 475. $x_n=\frac{\pi}{4}\cdot n$. 476. $x_n=\frac{\pi n}{8}$. 477. $x_k=\frac{\pi k}{3}$. 478. $x_n=[(-1)^n+1]\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n$. 479. Решений

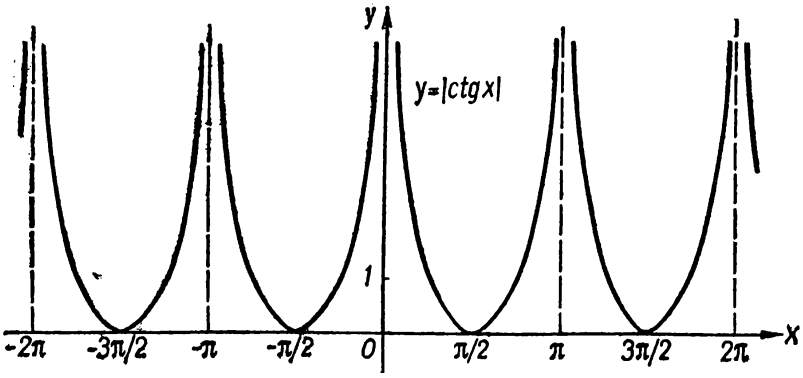



Рис. 219.

нет. 480. $x_k=\pi\cdot k$, $x_n=\frac{\pi}{4}(2n+1)$. 481. $x_k=\frac{\pi k}{2}$. 482. $x_n=\frac{\pi}{8}\times$ $\times(2n+1)$. 483. $x_k=4\pi k$, $x_m=\frac{\pi}{3}(12m\pm1)$, $x_n=\frac{\pi}{3}(12m\pm5)$. 484. $x_k=\pi k$, $x_m=-\frac{\pi}{3}+\pi m$, $x_n=\frac{\pi}{12}+\pi n$. 485. $x_n=\frac{\pi}{4}(4n+1)$. 486. $x_n=\frac{\pi}{2}(4n+1)$. 487. $x_n=6\pi(4n+1)$. 488. $x_n=\frac{\pi}{6}(6n\pm1)$. 489. $x_n=\frac{\pi n}{3}$. 490. $x_n=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}+\pi n$. 491. $x_n=\pi n$. 492. Нет. 493. Указание: данное уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases}\sin x=1,\\ \sin 2x=1,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x_k=\frac{\pi}{4}+\pi k,\end{cases}$ так как $x_n\neq x_k$ ни при каких целых значениях $n$ и $k$, то уравнение не имеет решений. 494. $\frac{\pi}{6}+\pi k<x<-\frac{\pi}{6}+\pi(k+1)$. 495. $\frac{\pi}{5}+2\pi k<x<$

$< \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{3\pi}{5} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $\frac{7\pi}{5} + 2\pi m < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$, $\frac{9\pi}{5} + 2\pi p < x < 2\pi(p+1)$. **496.** $2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{4} + 2\pi m < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi p < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi p$. **497.** $\frac{\pi}{18}(12n-7) < x < \frac{\pi}{18}(12n+1)$. **498.** $\frac{\pi}{12}(12k+5) \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{12} \times$ $\times (12k+13)$. **499.** $\frac{\pi}{12}(24n+1) < x < \frac{\pi}{12}(24k+5)$, $\frac{\pi}{12}(24k+7) <$ $< x < \frac{\pi}{12}(24k+11)$. **505.** $x_1 \approx -1{,}5$, $x_2 \approx 1{,}1$. **506.** $x = 1$. **507.** $x_1 \approx$ $\approx -1{,}6$; $x_2 \approx 1{,}6$. **508.** $x \approx 0{,}8$. **509.** $x = 1$, $y = 0$.

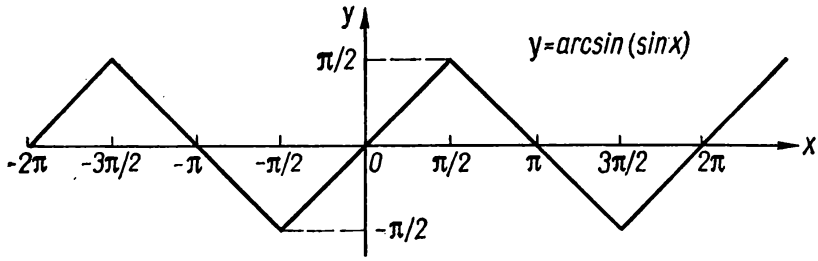



Рис. 220.

**510.** $\begin{cases} -\pi < x < \pi, \\ \sin x < y \leqslant \sqrt{\pi^2 - x^2}. \end{cases}$ **511.** $\pi - 2 \approx 1{,}14$. **512.** $7 - 2\pi \approx 0{,}72$. **513.** $0{,}3\sqrt{10}$. **514.** $-\frac{33}{56}$. **515.** $\frac{1}{2}$. **516.** $-\frac{119}{120}$. **517.** $-0{,}4\sqrt{5}$. **518.** $-\frac{24}{7}$. **519.** $0{,}75\pi$. **520.** 0. **531.** $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. **532.** $x = \sqrt{2}$. **533.** $x_1 = -3$, $x_2 = -2$. **534.** $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **535.** $x_1 = 0$, $x_2 =$ $= \frac{1}{2}$. **536.** $x = 1$. **537.** Решений нет. **538.** $x_1 = -1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 -$ $- \sqrt{2}$, $x_3 = -1 + \sqrt{2}$, $x_4 = 1 + \sqrt{2}$. **539.** $x = \frac{1}{2}$. **540.** $x = 1$. **541.** $x_k = \pi(2k+1)$. **542.** $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} < x \leqslant 1$. **543.** $0 < x \leqslant \sqrt{2}$. **544.** $-\infty \leqslant x < 0$. **545.** $\sin 0{,}1 < x \leqslant 1$. **546.** $\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \sqrt{3}$. **547.** б) Рис. 220; д) рис. 221; е) рис. 222. **548.** $x \approx 0{,}4$. **549.** $-\infty \leqslant$ $< x < 0$; $1 \leqslant x < +\infty$. **550.** $-\infty < x < -3$ или $3 < x < 5$. **551.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **552.** 90. **553.** 720. **554.** 4320. **555.** 246 480. **558.** $x =$ $= 7$. **559.** $x = 4$. **560.** (12; 7). **561.** $-960\sqrt{2}\,x^4$. **562.** $n = 7$ или

$n = 14$. 563. $n = 7$. 564. $x = 2$. 565. $2^{14}C_{50}^{22}$. 566. 210. 568. $x_1 = \frac{1}{\sqrt[5]{100}}$ или $x_2 = 100$. 569. 64. 570. Указание: представить данную разность в виде $23^n - 1 \equiv (22+1)^n - 1$. 571. 0. 572. $+\infty$. 573. 0. 574. 0. 575. 0. 576. 1. 577. 1. 578. 0. 579. Указание: применить первый признак сходимости последовательности. 580 $n + 1 - \frac{1}{2^n}$. 581. $\frac{2}{3}(10^{n+1} - 10 - 9n)$. 582. $n^2(n+1)$. 583. $\frac{1}{12}(n-1)\,n\,(n+1)\times$

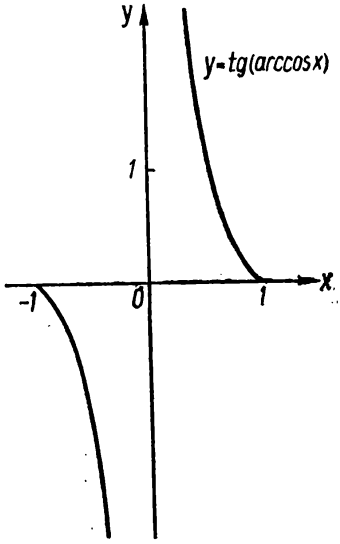



Рис. 221.

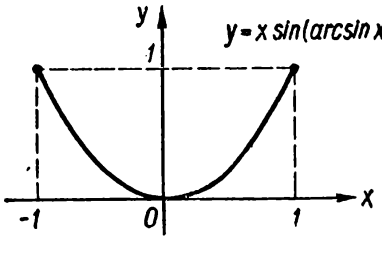



Рис. 222.

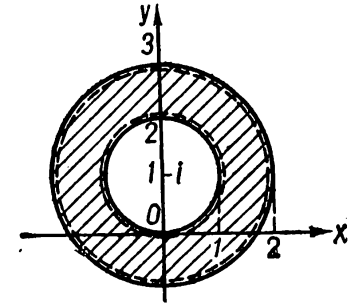



Рис. 223.

$\times (3n+2)$. 586. $\frac{4}{3}$. 587. 0,5. 588. 1. 589. $\frac{1}{12}$. 590. Расходится. Указание: применить необходимый признак сходимости. 591. Расходится. 592. $\frac{m}{n}$. 593. 1. 594. $\frac{112}{27}$. 595. 2. 596. $(-1)^{m-n}\,\frac{m}{n}$. 597. $\frac{1}{p}$. 598. $-\frac{1}{12}$. 599. 0. 600. $+\infty$ при $x \to +\infty$; 0 при $x \to -\infty$. 601. $e^9$. 602. $\frac{1}{e}$. 603. $\frac{a^2}{b^2}$. 604. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. 605. $a^a \ln\frac{a}{e}$. 606. $e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$. 607. $3\ln 2$. 608. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ — точки разрыва (собственного) II рода. 609. $x = 0$ — точка устранимого разрыва I рода. 610. $x = 2$ — точка неустранимого разрыва I рода. 611. $x = -2$ — точка неустранимого разрыва I рода. 612. $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — точки неустранимого разрыва I рода. 613. а) 0; б) $7{,}5\sqrt{2}\,(1+i)$;

в) $1{,}5(\sqrt{3}+i)$; г) $-27166$; д) $\cos(45^\circ+72^\circ\cdot k)+i\sin(45^\circ+72^\circ\cdot k)$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$; е) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k\right)\right]$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$. **614.** а) $z^2-4z+5=0$; б) $z^2-5z+(7-i)=0$; в) $4z^2-(4+2i)z+(3+i)=0$. **615.** а) $z_1=1+i$, $z_2=\frac{3}{2}(1-i)$; б) $z_1=1+i$, $z_2=\frac{1}{2}(1-3i)$; в) $z_1=-1$, $z_2=-1+2i$. **616.** $\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ или $(2;\ 1)$. **619.** 1. **620.** $\arg\frac{4}{1+i\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{3}$. **622.** Рис. 223. **626.** $S_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **627.** $S_n=\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. **628.** $S_n=\frac{a^{n+2}\sin(x+n\alpha)-a^{n+1}\sin[x+(n+1)\alpha]-}{-a\sin(x-\alpha)+\sin x}{a^2-2a\cos\alpha+1}$. **629.** $x_1=5$, $x_2=6$, $x_3=10$. **630.** $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=9$. **631.** $x_1=2$, $x_2=-5i$, $x_3=5i$, $x_4=-1-i\sqrt{3}$, $x_5=-1+i\sqrt{3}$. **632.** $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3=3-i\sqrt{6}$, $x_4=3+i\sqrt{6}$. **633.** $x^5-3x^4+5x^3-5x^2+4x-2=0$. **634.** $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5$. **635.** $a=-8$. **636.** $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$, $x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $x_5=\sqrt{2}(1-i)$, $x_6=\sqrt{2}(1+i)$, $x_7=-\sqrt{2}(1+i)$, $x_8=\sqrt{2}(-1+i)$. **637.** $x_1=-2$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=2$, $x_5=-2i$, $x_6=2i$, $x_7=-\frac{1}{2}i$, $x_8=\frac{1}{2}i$. **638.** $x^4+2ix^3+7x^2+8ix+12=0$. **640.** 50. **641.** $x_1=-1{,}5$, $x_2=\frac{10}{3}$. **642.** $a_1=-4$, $a_2=4$. **643.** Указание: заменить $x-a=t$ и показать, что полученное относительно $t$ уравнение имеет комплексные корни. **644.** Указание: воспользоваться определениями действий над комплексными числами. **645.** Указание: показать, что $(n-1)n(n+1)(n+2)\equiv(n^2+n-1)^2$. **646.** 3. **647.** $m=2k+1$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. **648.** $(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)$. **649.** $n=36$. **650.** Указание: найти дискриминанты уравнений и показать, что при всевозможных значениях $a$ они имеют одинаковые знаки. **651.** $m=\frac{a-b}{a+b}$. **652.** Указание: рассмотреть дискриминант и показать, что он не может быть квадратом целого числа. **653.** $x_1=-2-i\sqrt{5}$, $x_2=-2+i\sqrt{5}$, $x_3=2-i\sqrt{3}$, $x_4=2+i\sqrt{3}$. **654.** $x=2$. **655.** $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=1-i\sqrt{2}$, $x_4=1+i\sqrt{2}$. **656.** $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=2$.

**657.** $x=3$. **658.** (0; 1; 2), (0; 2; 1), (1; 0; 2), (1; 2; 0), (2; 0; 1), (2; 1; 0). **659.** $q=\frac{1}{n+1}$. **660.** $\div 0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4 или $\div 0{,}4$; 0,3; 0,2; 0,1. **664.** 22 680. **665.** $(3+\sqrt{2};\ 3-\sqrt{2})$, $(3-\sqrt{2};\ 3+\sqrt{2})$. **666.** $-\infty<x\leqslant 0$, $\frac{2}{3}\leqslant x<1$. **667.** $1<m<+\infty$. **668.** $1+C_{10}^{2}\cdot C_{2}^{1}\times$ $\times 6+C_{10}^{4}C_{4}^{2}\cdot 6^{2}+C_{10}^{6}C_{6}^{3}\cdot 6^{3}+C_{10}^{8}C_{8}^{4}\cdot 6^{4}+C_{10}^{10}C_{10}^{5}+6^{6}=6\,995\,053$. **670.** $-\infty<m\leqslant -0{,}4\sqrt{5}$; $0{,}4\sqrt{5}\leqslant m<+\infty$. **671.** $\frac{3}{4}+i$. **673.** Решений нет. **674.** $x=\log_3\sqrt[4]{4{,}76}$. **675.** $-\infty<a\leqslant 0$ или $2\leqslant a<+\infty$. **676.** (—3; —1), (—1; —3), (1; 3), (3; 1). **678.** $p_1=-2$, $q_1=-1$ или $p_2=1$, $q_2=0$. **679.** $\cos\alpha$, если $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leqslant\alpha<2\pi n$ или $2\pi n<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $-\cos\alpha$, если $\frac{\pi}{2}+2\pi n<\alpha<\pi+2\pi n$ или $\pi+$ $+2\pi n<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$. **680.** $\sin\alpha+\cos\alpha$, если $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{4}$; $-\sin\alpha-$ $-\cos\alpha$, если $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$. **681.** 0. **682.** 1,5. **683.** 1. **696.** $-1\leqslant a\leqslant$ $\leqslant\frac{7}{3}$. **697.** 1. **698.** $\frac{24}{13}$. **699.** 28. **700.** $-\operatorname{ctg}15°$. **701.** $x=y$ или $x+$ $+y=2xy$. **702.** $2(x^2+y^2)=(a+b)^2$. **703.** $\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$. **704.** $\operatorname{arctg}\frac{n}{n+2}$. **705.** Указание: привести функцию к виду $y=$ $=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$. **706.** Указание: привести функцию к виду $y=$ $=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$. **709.** $\frac{3\pi}{4}-x$. **710.** $x_k=\frac{\pi}{6}+\pi k$; $x_n=-\frac{\pi}{6}+$ $+\operatorname{arctg}2+\pi n$. **711.** $x_n=\frac{12\pi}{5}(2n+1)$. **712.** $x_n=\frac{\pi}{4}(4n+1)$. **713.** $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$. **714.** $x\neq\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k=0$, $-1$, $-2$, ...; $x_m=(-1)^{m+1}\arcsin\frac{3}{4}+\pi m$; $x_n=(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$. **715.** $x=\arccos\frac{\pi}{6}\approx 1{,}02$. **717.** $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}<x\leqslant 1$. **718.** $x_k=$ $=\pm\arccos\frac{-1+\sqrt{16a^2+1}}{4a}+\pi k$ при $a\neq 0$ или $x_n=\frac{\pi}{4}(2n+1)$ при $a=0$.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

I. ТАБЛИЦЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, НЕ ПРЕВЫШАЮЩИХ 6000
II. СТЕПЕНИ, КОРНИ, ОБРАТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, НАТУРАЛЬНЫЕ ЛОГАРИФМЫ
III. МАНТИССЫ ДЕСЯТИЧНЫХ ЛОГАРИФМОВ
IV. АНТИЛОГАРИФМЫ
V. СИНУСЫ И КОСИНУСЫ
VI. ТАНГЕНСЫ И КОТАНГЕНСЫ
VII. ПЕРЕВОД ГРАДУСНОЙ МЕРЫ В РАДИАННУЮ
VIII. ПЕРЕВОД РАДИАННОЙ МЕРЫ В ГРАДУСНУЮ

## Латинский алфавит

| | | |
|---|---|---|
| *A a* а | *J j* йот (жи) | *S s* эс |
| *B b* бэ | *K k* ка | *T t* тэ |
| *C c* цэ | *L l* эль | *U u* у |
| *D d* дэ | *M m* эм | *V v* вэ |
| *E e* э | *N n* эн | *W w* дубль-вэ |
| *F f* эф | *O o* о | *X x* икс |
| *G g* гэ (же) | *P p* пэ | *Y y* игрек |
| *H h* ах (аш) | *Q q* ку | *Z z* зэт |
| *I i* и | *R r* эр | |

## Греческий алфавит

| | | |
|---|---|---|
| Α α альфа | Ι ι йота | Ρ ρ ро |
| Β β бэта | Κ κ каппа | Σ σ сигма |
| Γ γ гамма | Λ λ ламбда | Τ τ тау |
| Δ δ дэльта | Μ μ мю (ми) | Φ φ фи |
| Ε ε эпсилон | Ν ν ню (ни) | Χ χ хи |
| Ζ ζ дзета | Ξ ξ кси | Υ υ юпсилон (ипсилон) |
| Η η эта | Ο ο омикрон | Ψ ψ пси |
| Θ θ, ϑ тэта | Π π пи | Ω ω омега |

## I. Таблица простых чисел, не превышающих 6000

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 251 | 587 | 941 | 1303 | 1699 | 2113 | 2543 | 2953 | 3391 | 3823 | 4259 | 4723 | 5179 | 5651 |
| 3 | 257 | 593 | 947 | 1307 | 1709 | 2129 | 2549 | 2957 | 3407 | 3833 | 4261 | 4729 | 5189 | 5653 |
| 5 | 263 | 599 | 953 | 1319 | 1721 | 2131 | 2551 | 2963 | 3413 | 3847 | 4271 | 4733 | 5197 | 5657 |
| 7 | 269 | 601 | 967 | 1321 | 1723 | 2137 | 2557 | 2969 | 3433 | 3851 | 4273 | 4751 | 5209 | 5659 |
| 11 | 271 | 607 | 971 | 1327 | 1733 | 2141 | 2579 | 2971 | 3449 | 3853 | 4283 | 4759 | 5227 | 5669 |
| 13 | 277 | 613 | 977 | 1361 | 1741 | 2143 | 2591 | 2999 | 3457 | 3863 | 4289 | 4783 | 5231 | 5683 |
| 17 | 281 | 617 | 983 | 1367 | 1747 | 2153 | 2593 | 3001 | 3461 | 3877 | 4297 | 4787 | 5233 | 5689 |
| 19 | 283 | 619 | 991 | 1373 | 1753 | 2161 | 2609 | 3011 | 3463 | 3881 | 4327 | 4789 | 5237 | 5693 |
| 23 | 293 | 631 | 997 | 1381 | 1759 | 2179 | 2617 | 3019 | 3467 | 3889 | 4337 | 4793 | 5261 | 5701 |
| 29 | 307 | 641 | 1009 | 1399 | 1777 | 2203 | 2621 | 3023 | 3469 | 3907 | 4339 | 4799 | 5273 | 5711 |
| 31 | 311 | 643 | 1013 | 1409 | 1783 | 2207 | 2633 | 3037 | 3491 | 3911 | 4349 | 4801 | 5279 | 5717 |
| 37 | 313 | 647 | 1019 | 1423 | 1787 | 2213 | 2647 | 3041 | 3499 | 3917 | 4357 | 4813 | 5281 | 5737 |
| 41 | 317 | 653 | 1021 | 1427 | 1789 | 2221 | 2657 | 3049 | 3511 | 3919 | 4363 | 4817 | 5297 | 5741 |
| 43 | 331 | 659 | 1031 | 1429 | 1801 | 2237 | 2659 | 3061 | 3517 | 3923 | 4373 | 4831 | 5303 | 5743 |
| 47 | 337 | 661 | 1033 | 1433 | 1811 | 2239 | 2663 | 3067 | 3527 | 3929 | 4391 | 4861 | 5309 | 5749 |
| 53 | 347 | 673 | 1039 | 1439 | 1823 | 2243 | 2671 | 3079 | 3529 | 3931 | 4397 | 4871 | 5323 | 5779 |
| 59 | 349 | 677 | 1049 | 1447 | 1831 | 2251 | 2677 | 3083 | 3533 | 3943 | 4409 | 4877 | 5333 | 5783 |
| 61 | 353 | 683 | 1051 | 1451 | 1847 | 2267 | 2683 | 3089 | 3539 | 3947 | 4421 | 4889 | 5347 | 5791 |
| 67 | 359 | 691 | 1061 | 1453 | 1861 | 2269 | 2687 | 3109 | 3541 | 3967 | 4423 | 4903 | 5351 | 5801 |
| 71 | 367 | 701 | 1063 | 1459 | 1867 | 2273 | 2689 | 3119 | 3547 | 3989 | 4441 | 4909 | 5381 | 5807 |
| 73 | 373 | 709 | 1069 | 1471 | 1871 | 2281 | 2693 | 3121 | 3557 | 4001 | 4447 | 4919 | 5387 | 5813 |
| 79 | 379 | 719 | 1087 | 1481 | 1873 | 2287 | 2699 | 3137 | 3559 | 4003 | 4451 | 4931 | 5393 | 5821 |
| 83 | 383 | 727 | 1091 | 1483 | 1877 | 2293 | 2707 | 3163 | 3571 | 4007 | 4457 | 4933 | 5399 | 5827 |
| 89 | 389 | 733 | 1093 | 1487 | 1879 | 2297 | 2711 | 3167 | 3581 | 4013 | 4463 | 4937 | 5407 | 5839 |
| 97 | 397 | 739 | 1097 | 1489 | 1889 | 2309 | 2713 | 3169 | 3583 | 4019 | 4481 | 4943 | 5413 | 5843 |
| 101 | 401 | 743 | 1103 | 1493 | 1901 | 2311 | 2719 | 3181 | 3593 | 4021 | 4483 | 4951 | 5417 | 5849 |
| 103 | 409 | 751 | 1109 | 1499 | 1907 | 2333 | 2729 | 3187 | 3607 | 4027 | 4493 | 4957 | 5419 | 5851 |
| 107 | 419 | 757 | 1117 | 1511 | 1913 | 2339 | 2731 | 3191 | 3613 | 4049 | 4507 | 4967 | 5431 | 5857 |
| 109 | 421 | 761 | 1123 | 1523 | 1931 | 2341 | 2741 | 3203 | 3617 | 4051 | 4513 | 4969 | 5437 | 5861 |
| 113 | 431 | 769 | 1129 | 1531 | 1933 | 2347 | 2749 | 3209 | 3623 | 4057 | 4517 | 4973 | 5441 | 5867 |
| 127 | 433 | 773 | 1151 | 1543 | 1949 | 2351 | 2753 | 3217 | 3631 | 4073 | 4519 | 4987 | 5443 | 5869 |
| 131 | 439 | 787 | 1153 | 1549 | 1951 | 2357 | 2767 | 3221 | 3637 | 4079 | 4523 | 4993 | 5449 | 5879 |
| 137 | 443 | 797 | 1163 | 1553 | 1973 | 2371 | 2777 | 3229 | 3643 | 4091 | 4547 | 4999 | 5471 | 5881 |
| 139 | 449 | 809 | 1171 | 1559 | 1979 | 2377 | 2789 | 3251 | 3659 | 4093 | 4549 | 5003 | 5477 | 5897 |
| 149 | 457 | 811 | 1181 | 1567 | 1987 | 2381 | 2791 | 3253 | 3671 | 4099 | 4561 | 5009 | 5479 | 5903 |
| 151 | 461 | 821 | 1187 | 1571 | 1993 | 2383 | 2797 | 3257 | 3673 | 4111 | 4567 | 5011 | 5483 | 5923 |
| 157 | 463 | 823 | 1193 | 1579 | 1997 | 2389 | 2801 | 3259 | 3677 | 4127 | 4583 | 5021 | 5501 | 5927 |
| 163 | 467 | 827 | 1201 | 1583 | 1999 | 2393 | 2803 | 3271 | 3691 | 4129 | 4591 | 5023 | 5503 | 5939 |
| 167 | 479 | 829 | 1213 | 1597 | 2003 | 2399 | 2819 | 3299 | 3697 | 4133 | 4597 | 5039 | 5507 | 5953 |
| 173 | 487 | 839 | 1217 | 1601 | 2011 | 2411 | 2833 | 3301 | 3701 | 4139 | 4603 | 5051 | 5519 | 5981 |
| 179 | 491 | 853 | 1223 | 1607 | 2017 | 2417 | 2837 | 3307 | 3709 | 4153 | 4621 | 5059 | 5521 | 5987 |
| 181 | 499 | 857 | 1229 | 1609 | 2027 | 2423 | 2843 | 3313 | 3719 | 4157 | 4637 | 5077 | 5527 | |
| 191 | 503 | 859 | 1231 | 1613 | 2029 | 2437 | 2851 | 3319 | 3727 | 4159 | 4639 | 5081 | 5531 | |
| 193 | 509 | 863 | 1237 | 1619 | 2039 | 2441 | 2857 | 3323 | 3733 | 4177 | 4643 | 5087 | 5557 | |
| 197 | 521 | 877 | 1249 | 1621 | 2053 | 2447 | 2861 | 3329 | 3739 | 4201 | 4649 | 5099 | 5563 | |
| 199 | 523 | 881 | 1259 | 1627 | 2063 | 2459 | 2879 | 3331 | 3761 | 4211 | 4651 | 5101 | 5569 | |
| 211 | 541 | 883 | 1277 | 1637 | 2069 | 2467 | 2887 | 3343 | 3767 | 4217 | 4657 | 5107 | 5573 | |
| 223 | 547 | 887 | 1279 | 1657 | 2081 | 2473 | 2897 | 3347 | 3769 | 4219 | 4663 | 5113 | 5581 | |
| 227 | 557 | 907 | 1283 | 1663 | 2083 | 2477 | 2903 | 3359 | 3779 | 4229 | 4673 | 5119 | 5591 | |
| 229 | 563 | 911 | 1289 | 1667 | 2087 | 2503 | 2909 | 3361 | 3793 | 4231 | 4679 | 5147 | 5623 | |
| 233 | 569 | 919 | 1291 | 1669 | 2089 | 2521 | 2917 | 3371 | 3797 | 4241 | 4691 | 5153 | 5639 | |
| 239 | 571 | 929 | 1297 | 1693 | 2099 | 2531 | 2927 | 3373 | 3803 | 4243 | 4703 | 5167 | 5641 | |
| 241 | 577 | 937 | 1301 | 1697 | 2111 | 2539 | 2939 | 3389 | 3821 | 4253 | 4721 | 5171 | 5647 | |

## II. Степени, корни, обратные величины, натуральные логарифмы

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\ln n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1,000 | 3,162 | 1,000 | 2,154 | 4,642 | 1,000 | 0,00000 |
| 2 | 4 | 8 | 1,414 | 4,472 | 1,260 | 2,714 | 5,848 | 0,500 | 0,69315 |
| 3 | 9 | 27 | 1,732 | 5,477 | 1,442 | 3,107 | 6,694 | 0,333 | 1,09861 |
| 4 | 16 | 64 | 2,000 | 6,325 | 1,587 | 3,420 | 7,368 | 0,250 | 1,38629 |
| 5 | 25 | 125 | 2,236 | 7,071 | 1,710 | 3,684 | 7,937 | 0,200 | 1,60944 |
| 6 | 36 | 216 | 2,449 | 7,746 | 1,817 | 3,915 | 8,434 | 0,167 | 1,79176 |
| 7 | 49 | 343 | 2,646 | 8,367 | 1,913 | 4,121 | 8,879 | 0,143 | 1,94591 |
| 8 | 64 | 512 | 2,828 | 8,944 | 2,000 | 4,309 | 9,283 | 0,125 | 2,07944 |
| 9 | 81 | 729 | 3,000 | 9,487 | 2,080 | 4,481 | 9,655 | 0,111 | 2,19722 |
| 10 | 100 | 1000 | 3,162 | 10,000 | 2,154 | 4,642 | 10,000 | 0,100 | 2,30259 |
| 11 | 121 | 1331 | 3,317 | 10,488 | 2,224 | 4,791 | 10,323 | 0,091 | 2,39790 |
| 12 | 144 | 1728 | 3,464 | 10,954 | 2,289 | 4,932 | 10,627 | 0,083 | 2,48491 |
| 13 | 169 | 2197 | 3,606 | 11,402 | 2,351 | 5,066 | 10,914 | 0,077 | 2,56495 |
| 14 | 196 | 2744 | 3,742 | 11,832 | 2,410 | 5,192 | 11,187 | 0,071 | 2,63906 |
| 15 | 225 | 3375 | 3,873 | 12,247 | 2,466 | 5,313 | 11,447 | 0,067 | 2,70805 |
| 16 | 256 | 4096 | 4,000 | 12,649 | 2,520 | 5,429 | 11,696 | 0,062 | 2,77259 |
| 17 | 289 | 4913 | 4,123 | 13,038 | 2,571 | 5,540 | 11,935 | 0,059 | 2,83321 |
| 18 | 324 | 5832 | 4,243 | 13,416 | 2,621 | 5,646 | 12,164 | 0,056 | 2,89037 |
| 19 | 361 | 6859 | 4,359 | 13,784 | 2,668 | 5,749 | 12,386 | 0,053 | 2,94444 |
| 20 | 400 | 8000 | 4,472 | 14,142 | 2,714 | 5,848 | 12,599 | 0,050 | 2,99573 |
| 21 | 441 | 9261 | 4,583 | 14,491 | 2,759 | 5,944 | 12,806 | 0,048 | 3,04452 |
| 22 | 484 | 10648 | 4,690 | 14,832 | 2,802 | 6,037 | 13,006 | 0,045 | 3,09104 |
| 23 | 529 | 12167 | 4,796 | 15,166 | 2,844 | 6,127 | 13,200 | 0,043 | 3,13549 |
| 24 | 576 | 13824 | 4,899 | 15,492 | 2,884 | 6,214 | 13,389 | 0,042 | 3,17805 |
| 25 | 625 | 15625 | 5,000 | 15,811 | 2,924 | 6,300 | 13,572 | 0,040 | 3,21888 |
| 26 | 676 | 17576 | 5,099 | 16,125 | 2,962 | 6,383 | 13,751 | 0,038 | 3,25810 |
| 27 | 729 | 19683 | 5,196 | 16,432 | 3,000 | 6,463 | 13,925 | 0,037 | 3,29584 |
| 28 | 784 | 21952 | 5,292 | 16,733 | 3,037 | 6,542 | 14,095 | 0,036 | 3,33220 |
| 29 | 841 | 24389 | 5,385 | 17,029 | 3,072 | 6,619 | 14,260 | 0,034 | 3,36730 |
| 30 | 900 | 27000 | 5,477 | 17,321 | 3,107 | 6,694 | 14,422 | 0,033 | 3,40120 |
| 31 | 961 | 29791 | 5,568 | 17,607 | 3,141 | 6,768 | 14,581 | 0,032 | 3,43399 |
| 32 | 1024 | 32768 | 5,657 | 17,889 | 3,175 | 6,840 | 14,736 | 0,031 | 3,46574 |
| 33 | 1089 | 35937 | 5,745 | 18,166 | 3,208 | 6,910 | 14,888 | 0,030 | 3,49651 |
| 34 | 1156 | 39304 | 5,831 | 18,439 | 3,240 | 6,980 | 15,037 | 0,029 | 3,52636 |
| 35 | 1225 | 42875 | 5,916 | 18,708 | 3,271 | 7,047 | 15,183 | 0,029 | 3,55535 |
| 36 | 1296 | 46656 | 6,000 | 18,974 | 3,302 | 7,114 | 15,326 | 0,028 | 3,58352 |
| 37 | 1369 | 50653 | 6,083 | 19,235 | 3,332 | 7,179 | 15,467 | 0,027 | 3,61092 |
| 38 | 1444 | 54872 | 6,164 | 19,494 | 3,362 | 7,243 | 15,605 | 0,026 | 3,63759 |
| 39 | 1521 | 59319 | 6,245 | 19,748 | 3,391 | 7,306 | 15,741 | 0,026 | 3,66356 |
| 40 | 1600 | 64000 | 6,325 | 20,000 | 3,420 | 7,368 | 15,874 | 0,025 | 3,68888 |
| 41 | 1681 | 68921 | 6,403 | 20,248 | 3,448 | 7,429 | 16,005 | 0,024 | 3,71357 |
| 42 | 1764 | 74088 | 6,481 | 20,494 | 3,476 | 7,489 | 16,134 | 0,024 | 3,73767 |
| 43 | 1849 | 79507 | 6,557 | 20,736 | 3,503 | 7,548 | 16,261 | 0,023 | 3,76120 |
| 44 | 1936 | 85184 | 6,633 | 20,976 | 3,530 | 7,606 | 16,386 | 0,023 | 3,78419 |
| 45 | 2025 | 91125 | 6,708 | 21,213 | 3,557 | 7,663 | 16,510 | 0,022 | 3,80666 |
| 46 | 2116 | 97336 | 6,782 | 21,448 | 3,583 | 7,719 | 16,631 | 0,022 | 3,82864 |
| 47 | 2209 | 103823 | 6,856 | 21,679 | 3,609 | 7,775 | 16,751 | 0,021 | 3,85015 |
| 48 | 2304 | 110592 | 6,928 | 21,909 | 3,634 | 7,830 | 16,869 | 0,021 | 3,87120 |
| 49 | 2401 | 117649 | 7,000 | 22,136 | 3,659 | 7,884 | 16,985 | 0,020 | 3,89182 |
| 50 | 2500 | 125000 | 7,071 | 22,361 | 3,684 | 7,937 | 17,100 | 0,020 | 3,91202 |
| 51 | 2601 | 132651 | 7,141 | 22,583 | 3,708 | 7,990 | 17,213 | 0,020 | 3,93183 |
| 52 | 2704 | 140608 | 7,211 | 22,804 | 3,733 | 8,041 | 17,325 | 0,019 | 3,95124 |
| 53 | 2809 | 148877 | 7,280 | 23,022 | 3,756 | 8,093 | 17,435 | 0,019 | 3,97029 |
| 54 | 2916 | 157464 | 7,348 | 23,238 | 3,780 | 8,143 | 17,544 | 0,018 | 3,98898 |
| 55 | 3025 | 166375 | 7,416 | 23,452 | 3,803 | 8,193 | 17,652 | 0,018 | 4,00733 |

*Продолжение*

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\ln n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 3136 | 175616 | 7,483 | 23,664 | 3,826 | 8,243 | 17,758 | 0,018 | 4,02535 |
| 57 | 3249 | 185193 | 7,550 | 23,875 | 3,849 | 8,291 | 17,863 | 0,017 | 4,04306 |
| 58 | 3364 | 195112 | 7,616 | 24,083 | 3,871 | 8,340 | 17,967 | 0,017 | 4,06044 |
| 59 | 3481 | 205379 | 7,681 | 24,290 | 3,893 | 8,387 | 18,070 | 0,017 | 4,07754 |
| 60 | 3600 | 216000 | 7,746 | 24,495 | 3,915 | 8,434 | 18,171 | 0,017 | 4,09434 |
| 61 | 3721 | 226981 | 7,810 | 24,698 | 3,936 | 8,481 | 18,272 | 0,016 | 4,11087 |
| 62 | 3844 | 238328 | 7,874 | 24,900 | 3,958 | 8,527 | 18,371 | 0,016 | 4,12713 |
| 63 | 3969 | 250047 | 7,937 | 25,100 | 3,979 | 8,573 | 18,469 | 0,016 | 4,14313 |
| 64 | 4096 | 262144 | 8,000 | 25,298 | 4,000 | 8,618 | 18,566 | 0,016 | 4,15888 |
| 65 | 4225 | 274625 | 8,062 | 25,495 | 4,021 | 8,662 | 18,663 | 0,015 | 4,17439 |
| 66 | 4356 | 287496 | 8,124 | 25,690 | 4,041 | 8,707 | 18,758 | 0,015 | 4,18965 |
| 67 | 4489 | 300763 | 8,185 | 25,884 | 4,062 | 8,750 | 18,852 | 0,015 | 4,20469 |
| 68 | 4624 | 314432 | 8,246 | 26,077 | 4,082 | 8,794 | 18,945 | 0,015 | 4,21951 |
| 69 | 4761 | 328509 | 8,307 | 26,268 | 4,102 | 8,837 | 19,038 | 0,014 | 4,23411 |
| 70 | 4900 | 343000 | 8,367 | 26,458 | 4,121 | 8,879 | 19,129 | 0,014 | 4,24850 |
| 71 | 5041 | 357911 | 8,426 | 26,646 | 4,141 | 8,921 | 19,220 | 0,014 | 4,26268 |
| 72 | 5184 | 373248 | 8,485 | 26,833 | 4,160 | 8,963 | 19,310 | 0,014 | 4,27667 |
| 73 | 5329 | 389017 | 8,544 | 27,019 | 4,179 | 9,004 | 19,399 | 0,014 | 4,29046 |
| 74 | 5476 | 405224 | 8,602 | 27,203 | 4,198 | 9,045 | 19,487 | 0,013 | 4,30407 |
| 75 | 5625 | 421875 | 8,660 | 27,386 | 4,217 | 9,086 | 19,574 | 0,013 | 4,31749 |
| 76 | 5776 | 438976 | 8,718 | 27,568 | 4,236 | 9,126 | 19,661 | 0,013 | 4,33073 |
| 77 | 5929 | 456533 | 8,775 | 27,749 | 4,254 | 9,166 | 19,747 | 0,013 | 4,34381 |
| 78 | 6084 | 474552 | 8,832 | 27,928 | 4,273 | 9,205 | 19,832 | 0,013 | 4,35671 |
| 79 | 6241 | 493039 | 8,888 | 28,107 | 4,291 | 9,244 | 19,916 | 0,013 | 4,36945 |
| 80 | 6400 | 512000 | 8,944 | 28,284 | 4,309 | 9,283 | 20,000 | 0,012 | 4,38203 |
| 81 | 6561 | 531441 | 9,000 | 28,460 | 4,327 | 9,322 | 20,083 | 0,012 | 4,39445 |
| 82 | 6724 | 551368 | 9,055 | 28,636 | 4,344 | 9,360 | 20,165 | 0,012 | 4,40672 |
| 83 | 6889 | 571787 | 9,110 | 28,810 | 4,362 | 9,398 | 20,247 | 0,012 | 4,41884 |
| 84 | 7056 | 592704 | 9,165 | 28,983 | 4,380 | 9,435 | 20,328 | 0,012 | 4,43082 |
| 85 | 7225 | 614125 | 9,220 | 29,155 | 4,397 | 9,473 | 20,408 | 0,012 | 4,44265 |
| 86 | 7396 | 636056 | 9,274 | 29,326 | 4,414 | 9,510 | 20,488 | 0,012 | 4,45435 |
| 87 | 7569 | 658503 | 9,327 | 29,496 | 4,431 | 9,546 | 20,567 | 0,011 | 4,46591 |
| 88 | 7744 | 681472 | 9,381 | 29,665 | 4,448 | 9,583 | 20,646 | 0,011 | 4,47734 |
| 89 | 7921 | 704969 | 9,434 | 29,833 | 4,465 | 9,619 | 20,724 | 0,011 | 4,48864 |
| 90 | 8100 | 729000 | 9,487 | 30,000 | 4,481 | 9,655 | 20,801 | 0,011 | 4,49981 |
| 91 | 8281 | 753571 | 9,539 | 30,166 | 4,498 | 9,691 | 20,878 | 0,011 | 4,51086 |
| 92 | 8464 | 778688 | 9,592 | 30,332 | 4,514 | 9,726 | 20,954 | 0,011 | 4,52179 |
| 93 | 8649 | 804357 | 9,644 | 30,496 | 4,531 | 9,761 | 21,029 | 0,011 | 4,53260 |
| 94 | 8836 | 830584 | 9,695 | 30,659 | 4,547 | 9,796 | 21,105 | 0,011 | 4,54329 |
| 95 | 9025 | 857375 | 9,747 | 30,822 | 4,563 | 9,830 | 21,179 | 0,011 | 4,55388 |
| 96 | 9216 | 884736 | 9,798 | 30,984 | 4,579 | 9,865 | 21,253 | 0,010 | 4,56435 |
| 97 | 9409 | 912673 | 9,849 | 31,145 | 4,595 | 9,899 | 21,327 | 0,010 | 4,57471 |
| 98 | 9604 | 941192 | 9,899 | 31,305 | 4,610 | 9,933 | 21,400 | 0,010 | 4,58497 |
| 99 | 9801 | 970299 | 9,950 | 31,464 | 4,626 | 9,967 | 21,472 | 0,010 | 4,59512 |
| 00 | 10000 | 1000000 | 10,000 | 31,623 | 4,642 | 10,000 | 21,544 | 0,010 | 4,60517 |

## III. Мантиссы десятичных логарифмов

| Мантиссы | | | | | | | | | | | Поправки | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | 4<br>4<br>4<br>4 | 9<br>9<br>8<br>8 | 13<br>13<br>12<br>12 | 17<br>17<br>16<br>16 | 22<br>21<br>21<br>20 | 26<br>25<br>25<br>24 | 30<br>30<br>29<br>28 | 35<br>34<br>33<br>32 | 39<br>38<br>37<br>36 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 4<br>4<br>4 | 8<br>8<br>7 | 12<br>11<br>11 | 16<br>15<br>15 | 20<br>19<br>18 | 24<br>23<br>22 | 27<br>27<br>26 | 31<br>30<br>29 | 35<br>34<br>33 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 3<br>3<br>3 | 7<br>7<br>7 | 11<br>11<br>10 | 14<br>14<br>14 | 18<br>17<br>17 | 21<br>21<br>20 | 25<br>24<br>24 | 28<br>28<br>27 | 32<br>31<br>30 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3<br>3<br>3 | 7<br>6<br>6 | 10<br>10<br>9 | 13<br>13<br>13 | 17<br>16<br>16 | 20<br>19<br>19 | 23<br>23<br>22 | 27<br>26<br>25 | 30<br>29<br>28 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 3<br>3<br>3 | 6<br>6<br>6 | 9<br>9<br>9 | 13<br>12<br>11 | 16<br>15<br>14 | 19<br>18<br>17 | 22<br>21<br>20 | 25<br>24<br>23 | 28<br>27<br>26 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 3<br>3 | 6<br>5 | 9<br>8 | 11<br>11 | 14<br>14 | 17<br>16 | 20<br>19 | 23<br>22 | 26<br>25 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 3<br>3 | 5<br>5 | 8<br>8 | 11<br>10 | 13<br>13 | 16<br>15 | 19<br>18 | 21<br>20 | 24<br>23 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 3<br>2 | 5<br>5 | 8<br>7 | 10<br>10 | 13<br>12 | 15<br>15 | 18<br>17 | 20<br>19 | 23<br>22 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 2 5 7<br>2 5 7 | | 9 12 14<br>9 11 13 | | 16 19 21<br>16 18 20 | | | |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 | 2 4 7<br>2 4 6 | | 9 11 14<br>8 11 13 | | 16 18 20<br>15 17 19 | | | |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | 2 4 6<br>2 4 6 | | 8 11 13<br>8 10 12 | | 15 17 19<br>14 17 19 | | | |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 | 2 4 6 | | 8 10 12 | | 14 16 18 | | | |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 2 4 6 | | 8 10 12 | | 14 15 17 | | | |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 | 2 4 6 | | 7 9 11 | | 13 15 17 | | | |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 2 4 5 | | 7 9 11 | | 12 14 16 | | | |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 | 2 3 5 | | 7 9 10 | | 12 14 15 | | | |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 2 3 5 | | 7 8 10 | | 11 13 15 | | | |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 2 3 5 | | 6 8 9 | | 11 13 14 | | | |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 2 3 5 | | 6 8 9 | | 11 12 14 | | | |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 1 3 4 | | 6 7 9 | | 10 12 13 | | | |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 | 1 3 4 | | 6 7 9 | | 10 11 13 | | | |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 1 3 4 | | 6 7 8 | | 10 11 12 | | | |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 1 3 4 | | 5 7 8 | | 9 11 12 | | | |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 1 3 4 | | 5 6 8 | | 9 10 12 | | | |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 | 1 3 4 | | 5 6 8 | | 9 10 11 | | | |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 1 2 4 | | 5 6 7 | | 9 10 11 | | | |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 1 2 4 | | 5 6 7 | | 8 10 11 | | | |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 | 1 2 3 | | 5 6 7 | | 8 9 10 | | | |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 | 1 2 3 | | 5 6 7 | | 8 9 10 | | | |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 1 2 3 | | 4 5 7 | | 8 9 10 | | | |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 | 1 2 3 | | 4 5 6 | | 8 9 10 | | | |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 1 2 3 | | 4 5 6 | | 7 8 9 | | | |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 1 2 3 | | 4 5 6 | | 7 8 9 | | | |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 1 2 3 | | 4 5 6 | | 7 8 9 | | | |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 1 2 3 | | 4 5 6 | | 7 8 9 | | | |
| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 2 3 | | 4 5 6 | | 7 8 9 | | | |

*Продолжение*

| N | Мантиссы | | | | | | | | | | Поправки | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |

## IV. Антилогарифмы

| Числа | | | | | | | | | | | Поправки | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *m* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| ,00 | 1000 | 1002 | 1005 | 1007 | 1009 | 1012 | 1014 | 1016 | 1019 | 1021 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 |
| .01 | 1023 | 1026 | 1028 | 1030 | 1033 | 1035 | 1038 | 1040 | 1042 | 1045 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 |
| ,02 | 1047 | 1050 | 1052 | 1054 | 1057 | 1059 | 1062 | 1064 | 1067 | 1069 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 |
| ,03 | 1072 | 1074 | 1076 | 1079 | 1081 | 1084 | 1086 | 1089 | 1091 | 1094 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 |
| ,04 | 1096 | 1099 | 1102 | 1104 | 1107 | 1109 | 1112 | 1114 | 1117 | 1119 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 |
| ,05 | 1122 | 1125 | 1127 | 1130 | 1132 | 1135 | 1138 | 1140 | 1143 | 1146 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 |
| ,06 | 1148 | 1151 | 1153 | 1156 | 1159 | 1161 | 1164 | 1167 | 1169 | 1172 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 |
| ,07 | 1175 | 1178 | 1180 | 1183 | 1186 | 1189 | 1191 | 1194 | 1197 | 1199 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 |
| ,08 | 1202 | 1205 | 1208 | 1211 | 1213 | 1216 | 1219 | 1222 | 1225 | 1227 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 3 |
| ,09 | 1230 | 1233 | 1236 | 1239 | 1242 | 1245 | 1247 | 1250 | 1253 | 1256 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 3 |
| ,10 | 1259 | 1262 | 1265 | 1268 | 1271 | 1274 | 1276 | 1279 | 1282 | 1285 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 3 |
| ,11 | 1288 | 1291 | 1294 | 1297 | 1300 | 1303 | 1306 | 1309 | 1312 | 1315 | 0 1 1 | 1 2 2 | 2 2 3 |
| ,12 | 1318 | 1321 | 1224 | 1327 | 1330 | 1334 | 1337 | 1340 | 1343 | 1346 | 0 1 1 | 1 2 2 | 2 2 3 |
| ,13 | 1349 | 1352 | 1355 | 1358 | 1361 | 1365 | 1368 | 1371 | 1374 | 1377 | 0 1 1 | 1 2 2 | 2 3 3 |
| ,14 | 1380 | 1384 | 1387 | 1390 | 1393 | 1396 | 1400 | 1403 | 1406 | 1409 | 0 1 1 | 1 2 2 | 2 3 3 |
| ,15 | 1413 | 1416 | 1419 | 1422 | 1426 | 1429 | 1432 | 1435 | 1439 | 1442 | 0 1 1 | 1 2 2 | 2 3 3 |
| ,16 | 1445 | 1449 | 1452 | 1455 | 1459 | 1462 | 1466 | 1469 | 1472 | 1476 | 0 1 1 | 1 2 2 | 2 3 3 |
| ,17 | 1479 | 1483 | 1486 | 1489 | 1493 | 1496 | 1500 | 1503 | 1507 | 1510 | 0 1 1 | 1 2 2 | 2 3 3 |
| ,18 | 1514 | 1517 | 1521 | 1224 | 1528 | 1531 | 1535 | 1538 | 1542 | 1545 | 0 1 1 | 1 2 2 | 2 3 3 |
| ,19 | 1549 | 1552 | 1556 | 1560 | 1563 | 1567 | 1570 | 1574 | 1578 | 1581 | 0 1 1 | 1 2 2 | 3 3 3 |
| ,20 | 1585 | 1589 | 1592 | 1596 | 1600 | 1603 | 1607 | 1611 | 1614 | 1618 | 0 1 1 | 1 2 2 | 3 3 3 |
| ,21 | 1622 | 1626 | 1629 | 1633 | 1637 | 1641 | 1644 | 1648 | 1652 | 1656 | 0 1 1 | 2 2 2 | 3 3 3 |
| ,22 | 1660 | 1663 | 1667 | 1671 | 1675 | 1679 | 1683 | 1687 | 1690 | 1694 | 0 1 1 | 2 2 2 | 3 3 3 |
| ,23 | 1698 | 1702 | 1706 | 1710 | 1714 | 1718 | 1722 | 1726 | 1730 | 1734 | 0 1 1 | 2 2 2 | 3 3 4 |
| ,24 | 1738 | 1742 | 1746 | 1750 | 1754 | 1758 | 1762 | 1766 | 1770 | 1774 | 0 1 1 | 2 2 2 | 3 3 4 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ,25 | 1778 | 1782 | 1786 | 1791 | 1795 | 1799 | 1803 | 1807 | 1811 | 1816 | 0 1 1 | 2 2 2 | 3 3 4 |
| ,26 | 1820 | 1824 | 1828 | 1832 | 1837 | 1841 | 1845 | 1849 | 1854 | 1858 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 3 4 |
| ,27 | 1862 | 1866 | 1871 | 1875 | 1879 | 1884 | 1888 | 1892 | 1897 | 1901 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 3 4 |
| ,28 | 1905 | 1910 | 1914 | 1919 | 1923 | 1928 | 1932 | 1936 | 1941 | 1945 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| ,29 | 1950 | 1954 | 1959 | 1963 | 1968 | 1972 | 1977 | 1982 | 1986 | 1991 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| ,30 | 1995 | 2000 | 2004 | 2009 | 2014 | 2018 | 2023 | 2028 | 2032 | 2037 | 0 1 1 | 2 2 2 | 3 4 4 |
| ,31 | 2042 | 2046 | 2051 | 2056 | 2061 | 2065 | 2070 | 2075 | 2080 | 2084 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| ,32 | 2089 | 2094 | 2099 | 2104 | 2109 | 2113 | 2118 | 2123 | 2128 | 2133 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| ,33 | 2138 | 2143 | 2148 | 2153 | 2158 | 2163 | 2168 | 2173 | 2178 | 2183 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| ,34 | 2188 | 2193 | 2198 | 2203 | 2208 | 2213 | 2218 | 2223 | 2228 | 2234 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| ,35 | 2239 | 2244 | 2249 | 2254 | 2259 | 2265 | 2270 | 2275 | 2280 | 2286 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| ,36 | 2291 | 2296 | 2301 | 2307 | 2312 | 2317 | 2323 | 2328 | 2333 | 2339 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| ,37 | 2344 | 2350 | 2355 | 2360 | 2366 | 2371 | 2377 | 2382 | 2388 | 2393 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| ,38 | 2399 | 2404 | 2410 | 2415 | 2421 | 2427 | 2432 | 2438 | 2443 | 2449 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| ,39 | 2455 | 2460 | 2466 | 2472 | 2477 | 2483 | 2489 | 2495 | 2500 | 2506 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| ,40 | 2512 | 2518 | 2523 | 2529 | 2535 | 2541 | 2547 | 2553 | 2559 | 2564 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 5 |
| ,41 | 2570 | 2576 | 2582 | 2588 | 2594 | 2600 | 2606 | 2612 | 2618 | 2624 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 5 |
| ,42 | 2630 | 2636 | 2642 | 2649 | 2655 | 2661 | 2667 | 2673 | 2679 | 2685 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 6 |
| ,43 | 2692 | 2693 | 2704 | 2710 | 2716 | 2723 | 2729 | 2735 | 2742 | 2748 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 6 |
| ,44 | 2754 | 2761 | 2767 | 2773 | 2780 | 2786 | 2793 | 2799 | 2805 | 2812 | 1 1 2 | 3 3 4 | 4 5 6 |
| ,45 | 2818 | 2825 | 2831 | 2838 | 2844 | 2851 | 2858 | 2864 | 2871 | 2877 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 5 6 |
| ,46 | 2884 | 2891 | 2897 | 2904 | 2911 | 2917 | 2927 | 2931 | 2938 | 2944 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 5 6 |
| ,47 | 2951 | 2958 | 2965 | 2972 | 2979 | 2985 | 2992 | 2999 | 3006 | 3013 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 5 6 |
| ,48 | 3020 | 3027 | 3034 | 3041 | 3048 | 3055 | 3062 | 3069 | 3076 | 4083 | 1 1 2 | 3 4 4 | 5 6 6 |
| ,49 | 3090 | 3097 | 3105 | 3112 | 3119 | 3126 | 3133 | 3141 | 3148 | 3155 | 1 1 2 | 3 4 4 | 5 6 6 |
| *m* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |

*Продолжение*

| Числа | | | | | | | | | | | Поправки | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *m* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| ,50 | 3162 | 3170 | 3177 | 3184 | 3192 | 3199 | 3206 | 3214 | 3221 | 3228 | 1 1 2 | 3 4 4 | 5 6 7 |
| ,51 | 3236 | 3243 | 3251 | 3258 | 3266 | 3273 | 3281 | 3289 | 3296 | 3304 | 1 2 2 | 3 4 5 | 5 6 7 |
| ,52 | 3311 | 3319 | 3327 | 3334 | 3342 | 3350 | 3357 | 3365 | 3373 | 3381 | 1 2 2 | 3 4 5 | 5 6 7 |
| ,53 | 3388 | 3396 | 3404 | 3412 | 3420 | 3428 | 3436 | 3443 | 3451 | 3459 | 1 2 2 | 3 4 5 | 6 6 7 |
| ,54 | 3467 | 3475 | 3483 | 3491 | 3499 | 3508 | 3516 | 3524 | 3532 | 3540 | 1 2 2 | 3 4 5 | 6 6 7 |
| ,55 | 3548 | 3556 | 3565 | 3573 | 3581 | 3589 | 3597 | 3606 | 3614 | 3622 | 1 2 2 | 3 4 5 | 6 7 7 |
| ,56 | 3631 | 3639 | 3648 | 3656 | 3664 | 3673 | 3681 | 3690 | 3698 | 3707 | 1 2 3 | 3 4 5 | 6 7 8 |
| ,57 | 3715 | 3724 | 3733 | 3741 | 3750 | 3758 | 3767 | 3776 | 3784 | 3793 | 1 2 3 | 3 4 5 | 6 7 8 |
| ,58 | 3802 | 3811 | 3819 | 3828 | 3837 | 3846 | 3855 | 3864 | 3873 | 3882 | 1 2 3 | 4 4 5 | 6 7 8 |
| ,59 | 3890 | 3899 | 3908 | 3917 | 3926 | 3936 | 3945 | 3954 | 3963 | 3972 | 1 2 3 | 4 5 5 | 6 7 8 |
| ,60 | 3981 | 3990 | 3999 | 4009 | 4018 | 4027 | 4036 | 4046 | 4055 | 4064 | 1 2 3 | 4 5 6 | 6 7 8 |
| ,61 | 4074 | 4083 | 4093 | 4102 | 4111 | 4121 | 4130 | 4140 | 4150 | 4159 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| ,62 | 4169 | 4178 | 4188 | 4198 | 4207 | 4217 | 4227 | 4236 | 4246 | 4256 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| ,63 | 4266 | 4276 | 4285 | 4295 | 4305 | 4315 | 4325 | 4335 | 4345 | 4355 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| ,64 | 4365 | 4375 | 4385 | 4395 | 4406 | 4416 | 4426 | 4436 | 4446 | 4457 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| ,65 | 4467 | 4477 | 4487 | 4498 | 4508 | 4519 | 4529 | 4539 | 4550 | 4560 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| ,66 | 4571 | 4581 | 4592 | 4603 | 4613 | 4624 | 4634 | 4645 | 4656 | 4667 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 9 10 |
| ,67 | 4677 | 4688 | 4699 | 4710 | 4721 | 4732 | 4742 | 4753 | 4764 | 4775 | 1 2 3 | 4 5 7 | 8 9 10 |
| ,68 | 4786 | 4797 | 4808 | 4819 | 4831 | 4842 | 4853 | 4864 | 4875 | 4887 | 1 2 3 | 4 6 7 | 8 9 10 |
| ,69 | 4898 | 4909 | 4920 | 4932 | 4943 | 4955 | 4966 | 4977 | 4989 | 5000 | 1 2 3 | 5 6 7 | 8 9 10 |
| ,70 | 5012 | 5023 | 5035 | 5047 | 5058 | 5070 | 5082 | 5093 | 5105 | 5117 | 1 2 4 | 5 6 7 | 8 9 11 |
| ,71 | 5129 | 5140 | 5152 | 5164 | 5176 | 5188 | 5200 | 5212 | 5224 | 5236 | 1 2 4 | 5 6 7 | 8 10 11 |
| ,72 | 5248 | 5260 | 5272 | 5284 | 5297 | 5309 | 5321 | 5333 | 5346 | 5358 | 1 2 4 | 5 6 7 | 9 10 11 |
| ,73 | 5870 | 5383 | 5395 | 5408 | 5420 | 5433 | 5445 | 5458 | 5470 | 5483 | 1 3 4 | 5 6 8 | 9 10 11 |
| ,74 | 5495 | 5508 | 5521 | 5534 | 5546 | 5559 | 5572 | 5585 | 5598 | 5610 | 1 3 4 | 5 6 8 | 9 10 12 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .75 | 5623 | 5636 | 5649 | 5662 | 5675 | 5689 | 5702 | 5715 | 5728 | 5741 | 1 3 4 | 5 7 8 | 9 10 12 |
| ,76 | 5754 | 5768 | 5781 | 5794 | 5808 | 5821 | 5834 | 5848 | 5861 | 5875 | 1 3 4 | 5 7 8 | 9 11 12 |
| ,77 | 5888 | 5902 | 5916 | 5929 | 5943 | 5957 | 5970 | 5984 | 5898 | 6012 | 1 3 4 | 5 7 8 | 10 11 12 |
| ,78 | 6026 | 6039 | 6053 | 6067 | 6081 | 6095 | 6109 | 6124 | 6138 | 6152 | 1 3 4 | 6 7 8 | 10 11 13 |
| ,79 | 6166 | 6180 | 6194 | 6209 | 6223 | 6237 | 6252 | 6266 | 6281 | 6295 | 1 3 4 | 6 7 9 | 10 11 13 |
| ,80 | 6310 | 6324 | 6339 | 6353 | 6368 | 6383 | 6397 | 6412 | 6427 | 6442 | 1 3 4 | 6 7 9 | 10 12 13 |
| ,81 | 6457 | 6471 | 6486 | 6501 | 6516 | 6531 | 6546 | 6561 | 6577 | 6592 | 2 3 5 | 6 8 9 | 11 12 14 |
| .82 | 6607 | 6622 | 6637 | 6653 | 6668 | 6683 | 6699 | 6714 | 6730 | 6745 | 2 3 5 | 6 8 9 | 11 12 14 |
| ,83 | 6761 | 6676 | 6792 | 6808 | 6823 | 6839 | 6855 | 6871 | 6887 | 6902 | 2 3 5 | 6 8 9 | 11 13 14 |
| ,84 | 6918 | 6934 | 6950 | 6966 | 6982 | 6998 | 7015 | 7031 | 7047 | 7063 | 2 3 5 | 6 8 10 | 11 13 15 |
| ,85 | 7079 | 7096 | 7112 | 7129 | 7145 | 7161 | 7178 | 7194 | 7211 | 7228 | 2 3 5 | 7 8 10 | 12 13 15 |
| ,86 | 7244 | 7261 | 7278 | 7295 | 7311 | 7328 | 7345 | 7362 | 7379 | 7396 | 2 3 5 | 7 8 10 | 12 13 15 |
| ,87 | 7413 | 7430 | 7447 | 7464 | 7482 | 7499 | 7516 | 7534 | 7551 | 7568 | 2 3 5 | 7 9 10 | 12 14 16 |
| ,88 | 7586 | 7603 | 7621 | 7638 | 7656 | 7674 | 7691 | 7709 | 7727 | 7745 | 2 4 5 | 7 9 11 | 12 14 16 |
| ,89 | 7762 | 7780 | 7798 | 7816 | 7834 | 7852 | 7870 | 7889 | 7907 | 7925 | 2 4 5 | 7 9 11 | 13 14 16 |
| ,90 | 7943 | 7962 | 7980 | 7998 | 8017 | 8035 | 8054 | 8072 | 8091 | 8110 | 2 4 6 | 7 9 11 | 13 15 17 |
| ,91 | 8128 | 8147 | 8166 | 8185 | 8204 | 8222 | 8241 | 8260 | 8279 | 8299 | 2 4 6 | 8 9 11 | 13 15 17 |
| ,92 | 8318 | 8337 | 8356 | 8375 | 8395 | 8414 | 8433 | 8453 | 8472 | 8492 | 2 4 6 | 8 10 12 | 14 15 17 |
| ,93 | 8511 | 8531 | 8551 | 8570 | 8590 | 8610 | 8630 | 8650 | 8670 | 8690 | 2 4 6 | 8 10 12 | 14 16 18 |
| ,94 | 8710 | 8730 | 8750 | 8770 | 8790 | 8810 | 8831 | 8851 | 8872 | 8892 | 2 4 6 | 8 10 12 | 14 16 18 |
| ,95 | 8913 | 8933 | 8954 | 8974 | 8995 | 9016 | 9036 | 9057 | 9078 | 9099 | 2 4 6 | 8 10 12 | 15 17 19 |
| ,96 | 9120 | 9141 | 9162 | 9183 | 9204 | 9226 | 9247 | 9268 | 9290 | 9311 | 2 4 6 | 8 11 13 | 15 17 19 |
| ,97 | 9333 | 9354 | 9376 | 9397 | 9419 | 9441 | 9462 | 9484 | 9506 | 9528 | 2 4 7 | 9 11 13 | 15 17 20 |
| ,98 | 9550 | 9572 | 9594 | 9616 | 9638 | 9661 | 9683 | 9705 | 9727 | 9750 | 2 4 7 | 9 11 13 | 16 18 20 |
| ,99 | 9772 | 9795 | 9817 | 9840 | 9863 | 9886 | 9908 | 9931 | 9954 | 9977 | 2 5 7 | 9 11 14 | 16 18 20 |
| *m* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |

## V. Синусы и косинусы

### СИНУСЫ

| Градусы | 0′ → | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | Поправки | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
| 0 | 0,0000 | 0,0029 | 0,0058 | 0,0087 | 0,0116 | 0,0145 | 0,0175 | 89 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 1 | 0,0175 | 0,0204 | 0,0233 | 0,0262 | 0,0291 | 0,0320 | 0,0349 | 88 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 2 | 0,0349 | 0,0378 | 0,0407 | 0,0436 | 0,0465 | 0,0494 | 0,0523 | 87 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 3 | 0,0523 | 0,0552 | 0,0581 | 0,0610 | 0,0640 | 0,0669 | 0,0698 | 86 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 4 | 0,0698 | 0,0727 | 0,0756 | 0,0785 | 0,0814 | 0,0843 | 0,0872 | 85 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 5 | 0,0872 | 0,0901 | 0,0929 | 0,0958 | 0,0987 | 0,1016 | 0,1045 | 84 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 6 | 0,1045 | 0,1074 | 0,1103 | 0,1132 | 0,1161 | 0,1190 | 0,1219 | 83 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 7 | 0,1219 | 0,1248 | 0,1276 | 0,1305 | 0,1334 | 0,1363 | 0,1392 | 82 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 8 | 0,1392 | 0,1421 | 0,1449 | 0,1478 | 0,1507 | 0,1536 | 0,1564 | 81 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 9 | 0,1564 | 0,1593 | 0,1622 | 0,1650 | 0,1679 | 0,1708 | 0,1736 | 80 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 10 | 0,1736 | 0,1765 | 0,1794 | 0,1822 | 0,1851 | 0,1880 | 0,1908 | 79 | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 11 | 0,1908 | 0,1937 | 0,1965 | 0,1994 | 0,2022 | 0,2051 | 0,2079 | 78 | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 12 | 0,2079 | 0,2108 | 0,2136 | 0,2164 | 0,2193 | 0,2221 | 0,2250 | 77 | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 13 | 0,2250 | 0,2278 | 0,2306 | 0,2334 | 0,2363 | 0,2391 | 0,2419 | 76 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 25 |
| 14 | 0,2419 | 0,2447 | 0,2476 | 0,2504 | 0,2532 | 0,2560 | 0,2588 | 75 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 25 |
| 15 | 0,2588 | 0,2616 | 0,2644 | 0,2672 | 0,2700 | 0,2728 | 0,2756 | 74 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 16 | 0,2756 | 0,2784 | 0,2812 | 0,2840 | 0,2868 | 0,2896 | 0,2924 | 73 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 17 | 0,2924 | 0,2952 | 0,2979 | 0,3007 | 0,3035 | 0,3062 | 0,3090 | 72 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 19 | 22 | 25 |
| 18 | 0,3090 | 0,3118 | 0,3145 | 0,3173 | 0,3201 | 0,3228 | 0,3256 | 71 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 19 | 22 | 25 |
| 19 | 0,3256 | 0,3283 | 0,3311 | 0,3338 | 0,3365 | 0,3393 | 0,3420 | 70 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 16 | 19 | 22 | 25 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0,3420 | 0,3448 | 0,3475 | 0,3502 | 0,3529 | 0,3557 | 0,3584 | 69 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 | 16 | 19 | 22 | 25 |
| 21 | 0,3584 | 0,3611 | 0,3638 | 0,3665 | 0,3692 | 0,3719 | 0,3746 | 68 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 | 16 | 19 | 22 | 24 |
| 22 | 0,3746 | 0,3773 | 0,3800 | 0,3827 | 0,3854 | 0,3881 | 0,3907 | 67 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 19 | 22 | 24 |
| 23 | 0,3907 | 0,3934 | 0,3961 | 0,3987 | 0,4014 | 0,4041 | 0,4067 | 66 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 19 | 21 | 24 |
| 24 | 0,4067 | 0,4094 | 0,4120 | 0,4147 | 0,4173 | 0,4200 | 0,4226 | 65 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 19 | 21 | 24 |
| 25 | 0,4226 | 0,4253 | 0,4279 | 0,4305 | 0,4331 | 0,4358 | 0,4394 | 64 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| 26 | 0,4384 | 0,4410 | 0,4436 | 0,4462 | 0,4488 | 0,4514 | 0,4540 | 63 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 16 | 18 | 21 | 23 |
| 27 | 0,4540 | 0,4566 | 0,4592 | 0,4617 | 0,4643 | 0,4669 | 0,4695 | 62 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 21 | 23 |
| 28 | 0,4695 | 0,4720 | 0,4746 | 0,4772 | 0,4797 | 0,4823 | 0,4848 | 61 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 |
| 29 | 0,4848 | 0,4874 | 0,4899 | 0,4924 | 0,4950 | 0,4975 | 0,5000 | 60 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 |
| 30 | 0,5000 | 0,5025 | 0,5050 | 0,5075 | 0,5100 | 0,5125 | 0,5150 | 59 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 |
| 31 | 0,5150 | 0,5175 | 0,5200 | 0,5225 | 0,5250 | 0,5275 | 0,5299 | 58 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| 32 | 0,5299 | 0,5324 | 0,5348 | 0,5373 | 0,5398 | 0,5422 | 0,5446 | 57 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| 33 | 0,5446 | 0,5471 | 0,5495 | 0,5519 | 0,5544 | 0,5568 | 0,5592 | 56 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 19 | 22 |
| 34 | 0,5592 | 0,5616 | 0,5640 | 0,5664 | 0,5688 | 0,5712 | 0,5736 | 55 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 14 | 17 | 19 | 22 |
| 35 | 0,5736 | 0,5760 | 0,5783 | 0,5807 | 0,5831 | 0,5854 | 0,5878 | 54 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 17 | 19 | 21 |
| 36 | 0,5878 | 0,5901 | 0,5925 | 0,5948 | 0,5972 | 0,5995 | 0,6018 | 53 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |
| 37 | 0,6018 | 0,6041 | 0,6065 | 0,6088 | 0,6111 | 0,6134 | 0,6157 | 52 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 18 | 21 |
| 38 | 0,6157 | 0,6180 | 0,6202 | 0,6225 | 0,6248 | 0,6271 | 0,6293 | 51 | 2 | 5 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 39 | 0,6293 | 0,6316 | 0,6838 | 0,6361 | 0,6383 | 0,6406 | 0,6428 | 50 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| 40 | 0,6428 | 0,6450 | 0,6472 | 0,6494 | 0,6517 | 0,6539 | 0,6561 | 49 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 |
| 41 | 0,6561 | 0,6583 | 0,6604 | 0,6626 | 0,6648 | 0,6670 | 0,6691 | 48 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 |
| 42 | 0,6691 | 0,6713 | 0,6734 | 0,6756 | 0,6777 | 0,6799 | 0,6820 | 47 | 2 | 4 | 6 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 43 | 0,6820 | 0,6841 | 0,6862 | 0,6884 | 0,6905 | 0,6926 | 0,6947 | 46 | 2 | 4 | 6 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 44 | 0,6947 | 0,6967 | 0,6988 | 0,7009 | 0,7030 | 0,7050 | 0,7071 | ↑45 | 2 | 4 | 6 | 9 | 10 | 12 | 15 | 17 | 19 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ ← | Градусы | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |



КОСИНУСЫ

*Продолжение*

## СИНУСЫ

| Градусы | 0′ → | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | Поправки | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
| ↓ 45 | 0,7071 | 0,7092 | 0,7112 | 0,7133 | 0,7153 | 0,7173 | 0,7193 | 44 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 46 | 0,7193 | 0,7214 | 0,7234 | 0,7254 | 0,7274 | 0,7294 | 0,7314 | 43 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 47 | 0,7314 | 0,7333 | 0,7353 | 0,7373 | 0,7392 | 0,7412 | 0,7431 | 42 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 48 | 0,7431 | 0,7451 | 0,7470 | 0,7490 | 0,7509 | 0,7528 | 0,7547 | 41 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| 49 | 0,7547 | 0,7566 | 0,7585 | 0,7604 | 0,7623 | 0,7642 | 0,7660 | 40 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 50 | 0,7660 | 0,7679 | 0,7698 | 0,7716 | 0,7735 | 0,7753 | 0,7771 | 39 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 51 | 0,7771 | 0,7790 | 0,7808 | 0,7826 | 0,7844 | 0,7862 | 0,7880 | 38 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 |
| 52 | 0,7880 | 0,7898 | 0,7916 | 0,7934 | 0,7951 | 0,7969 | 0,7986 | 37 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 53 | 0,7986 | 0,8004 | 0,8021 | 0,8039 | 0,8056 | 0,8073 | 0,8090 | 36 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 54 | 0,8090 | 0,8107 | 0,8124 | 0,8141 | 0,8158 | 0,8175 | 0,8192 | 35 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| 55 | 0,8192 | 0,8208 | 0,8225 | 0,8241 | 0,8258 | 0,8274 | 0,8290 | 34 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| 56 | 0,8290 | 0,8307 | 0,8323 | 0,8339 | 0,8355 | 0,8371 | 0,8387 | 33 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 | 14 |
| 57 | 0,8387 | 0,8403 | 0,8418 | 0,8434 | 0,8450 | 0,8465 | 0,8480 | 32 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 58 | 0,8480 | 0,8496 | 0,8511 | 0,8526 | 0,8542 | 0,8557 | 0,8572 | 31 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| 59 | 0,8572 | 0,8587 | 0,8601 | 0,8616 | 0,8631 | 0,8646 | 0,8660 | 30 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| 60 | 0,8660 | 0,8675 | 0,8689 | 0,8704 | 0,8718 | 0,8732 | 0,8746 | 29 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 61 | 0,8746 | 0,8760 | 0,8774 | 0,8788 | 0,8802 | 0,8816 | 0,8829 | 28 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 |
| 62 | 0,8829 | 0,8843 | 0,8857 | 0,8870 | 0,8884 | 0,8897 | 0,8910 | 27 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| 63 | 0,8910 | 0,8923 | 0,8936 | 0,8949 | 0,8962 | 0,8975 | 0,8988 | 26 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 64 | 0,8988 | 0,9001 | 0,9013 | 0,9026 | 0,9038 | 0,9051 | 0,9063 | 25 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 0,9063 | 0,9075 | 0,9088 | 0,9100 | 0,9112 | 0,9124 | 0,9135 | 24 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 66 | 0,9135 | 0,9147 | 0,9159 | 0,9171 | 0,9182 | 0,9194 | 0,9205 | 23 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 67 | 0,9205 | 0,9216 | 0,9228 | 0,9239 | 0,9250 | 0,9261 | 0,9272 | 22 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 68 | 0,9272 | 0,9283 | 0,9293 | 0,9304 | 0,9315 | 0,9325 | 0,9936 | 21 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 |
| 69 | 0,9336 | 0,9346 | 0,9356 | 0,9367 | 0,9377 | 0,9387 | 0,9397 | 20 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 70 | 0,9397 | 0,9407 | 0,9417 | 0,9426 | 0,9436 | 0,9446 | 0,9455 | 19 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 71 | 0,9455 | 0,9465 | 0,9474 | 0,9483 | 0,9492 | 0,9502 | 0,9511 | 18 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| 72 | 0,9511 | 0,9520 | 0,9528 | 0,9537 | 0,9546 | 0,9555 | 0,9563 | 17 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 73 | 0,9563 | 0,9572 | 0,9580 | 0,9588 | 0,9596 | 0,9605 | 0,9613 | 16 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 74 | 0,9613 | 0,9621 | 0,9628 | 0,9636 | 0,9644 | 0,9652 | 0,9559 | 15 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 75 | 0,9659 | 0,9667 | 0,9674 | 0,9681 | 0,9689 | 0,9696 | 0,9703 | 14 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 76 | 0,9703 | 0,9710 | 0,9717 | 0,9724 | 0,9730 | 0,9737 | 0,9744 | 13 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 77 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9757 | 0,9763 | 0,9769 | 0,9775 | 0,9781 | 12 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 78 | 0,9781 | 0,9787 | 0,9793 | 0,9799 | 0,9805 | 0,9811 | 0,9816 | 11 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 79 | 0,9816 | 0,9822 | 0,9827 | 0,9833 | 0,9838 | 0,9843 | 0,9848 | 10 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 80 | 0,9848 | 0,9853 | 0,9858 | 0,9863 | 0,9868 | 0,9872 | 0,9877 | 9 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 81 | 0,9877 | 0,9881 | 0,9886 | 0,9890 | 0,9894 | 0,9899 | 0,9903 | 8 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 82 | 0,9903 | 0,9907 | 0,9911 | 0,9914 | 0,9918 | 0,9922 | 0,9925 | 7 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 83 | 0,9925 | 0,9929 | 0,9932 | 0,9936 | 0,9939 | 0,9942 | 0,9945 | 6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 84 | 0,9945 | 0,9948 | 0,9951 | 0,9954 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9962 | 5 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 85 | 0,9962 | 0,9964 | 0,9967 | 0,9969 | 0,9971 | 0,9974 | 0,9976 | 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 86 | 0,9976 | 0,9978 | 0,9980 | 0,9981 | 0,9983 | 0,9985 | 0,9986 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 87 | 0,9986 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9994 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 88 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 | 0,9998 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 89 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | † 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ ← | Градусы | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |



КОСИНУСЫ

## VI. Тангенсы и котангенсы

### ТАНГЕНСЫ

| Градусы | 0′ → | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | Поправки | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
| 0↓ | 0,0000 | 0,0029 | 0,0058 | 0,0087 | 0,0116 | 0,0145 | 0,0175 | 89 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 1↓ | 0,0175 | 0,0204 | 0,0233 | 0,0262 | 0,0291 | 0,0320 | 0,0349 | 88 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 2 | 0,0349 | 0,0378 | 0,0407 | 0,0437 | 0,0465 | 0,0495 | 0,0524 | 87 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 3 | 0,0524 | 0,0553 | 0,0582 | 0,0612 | 0,0641 | 0,0670 | 0,0699 | 86 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 20 | 23 | 26 |
| 4 | 0,0699 | 0,0729 | 0,0758 | 0,0787 | 0,0816 | 0,0846 | 0,0875 | 85 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 20 | 23 | 26 |
| 5 | 0,0875 | 0,0904 | 0,0934 | 0,0963 | 0,0992 | 0,1022 | 0,1051 | 84 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 23 | 26 |
| 6 | 0,1051 | 0,1080 | 0,1110 | 0,1139 | 0,1169 | 0,1198 | 0,1228 | 83 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 7 | 0,1228 | 0,1257 | 0,1287 | 0,1317 | 0,1346 | 0,1376 | 0,1405 | 82 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 8 | 0,1405 | 0,1435 | 0,1465 | 0,1495 | 0,1524 | 0,1554 | 0,1584 | 81 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 9 | 0,1584 | 0,1614 | 0,1644 | 0,1673 | 0,1703 | 0,1733 | 0,1763 | 80 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 10 | 0,1763 | 0,1793 | 0,1823 | 0,1853 | 0,1883 | 0,1914 | 0,1944 | 79 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 11 | 0,1944 | 0,1974 | 0,2004 | 0,2035 | 0,2065 | 0,2095 | 0,2126 | 78 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 12 | 0,2126 | 0,2156 | 0,2186 | 0,2217 | 0,2247 | 0,2278 | 0,2309 | 77 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 13 | 0,2309 | 0,2339 | 0,2370 | 0,2401 | 0,2432 | 0,2462 | 0,2493 | 76 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 22 | 25 | 28 |
| 14 | 0,2493 | 0,2524 | 0,2555 | 0,2586 | 0,2617 | 0,2648 | 0,2679 | 75 | 3 | 6 | 9 | 12 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 |
| 15 | 0,2679 | 0,2711 | 0,2742 | 0,2773 | 0,2805 | 0,2836 | 0,2867 | 74 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 |
| 16 | 0,2867 | 0,2899 | 0,2931 | 0,2962 | 0,2994 | 0,3026 | 0,3057 | 73 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 |
| 17 | 0,3057 | 0,3089 | 0,3121 | 0,3153 | 0,3185 | 0,3217 | 0,3249 | 72 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 26 | 29 |
| 18 | 0,3249 | 0,3281 | 0,3314 | 0,3346 | 0,3378 | 0,3411 | 0,3443 | 71 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| 19 | 0,3443 | 0,3476 | 0,3508 | 0,3541 | 0,3574 | 0,3607 | 0,3640 | 70 | 3 | 7 | 10 | 13 | 16 | 20 | 23 | 26 | 29 |
| 20 | 0,3640 | 0,3673 | 0,3706 | 0,3739 | 0,3772 | 0,3805 | 0,3839 | 69 | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 | 20 | 23 | 27 | 30 |
| 21 | 0,3839 | 0,3872 | 0,3906 | 0,3939 | 0,3973 | 0,4006 | 0,4040 | 68 | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 | 20 | 24 | 27 | 30 |
| 22 | 0,4040 | 0,4074 | 0,4108 | 0,4142 | 0,4176 | 0,4210 | 0,4245 | 67 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 20 | 24 | 27 | 31 |
| 23 | 0,4245 | 0,4279 | 0,4314 | 0,4348 | 0,4383 | 0,4417 | 0,4452 | 66 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 |
| 24 | 0,4452 | 0,4487 | 0,4522 | 0,4557 | 0,4592 | 0,4628 | 0,4663 | 65 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 | 21 | 25 | 28 | 32 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 0,4663 | 0,4699 | 0,4734 | 0,4770 | 0,4806 | 0,4841 | 0,4877 | 64 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 | 21 | 25 | 29 | 32 |
| 26 | 0,4877 | 0,4913 | 0,4950 | 0,4986 | 0,5022 | 0,5059 | 0,5095 | 63 | 4 | 7 | 11 | 15 | 18 | 22 | 25 | 29 | 33 |
| 27 | 0,5095 | 0,5132 | 0,5169 | 0,5206 | 0,5243 | 0,5280 | 0,5317 | 62 | 4 | 7 | 11 | 15 | 18 | 22 | 26 | 29 | 33 |
| 28 | 0,5317 | 0,5354 | 0,5392 | 0,5430 | 0,5467 | 0,5505 | 0,5543 | 61 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 26 | 30 | 34 |
| 29 | 0,5543 | 0,5581 | 0,5619 | 0,5658 | 0,5696 | 0,5735 | 0,5774 | 60 | 4 | 8 | 12 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 |
| 30 | 0,5774 | 0,5812 | 0,5851 | 0,5890 | 0,5930 | 0,5969 | 0,6009 | 59 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 27 | 31 | 35 |
| 31 | 0,6009 | 0,6048 | 0,6088 | 0,6128 | 0,6168 | 0,6208 | 0,6249 | 58 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 32 | 0,6249 | 0,6289 | 0,6330 | 0,6371 | 0,6412 | 0,6453 | 0,6494 | 57 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 25 | 29 | 33 | 37 |
| 33 | 0,6494 | 0,6536 | 0,6577 | 0,6619 | 0,6661 | 0,6703 | 0,6745 | 56 | 4 | 8 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 38 |
| 34 | 0,6745 | 0,6787 | 0,6830 | 0,6873 | 0,6916 | 0,6959 | 0,7002 | 55 | 4 | 9 | 13 | 17 | 21 | 26 | 30 | 34 | 39 |
| 35 | 0,7002 | 0,7046 | 0,7089 | 0,7133 | 0,7177 | 0,7221 | 0,7265 | 54 | 4 | 9 | 13 | 18 | 22 | 26 | 31 | 35 | 39 |
| 36 | 0,7265 | 0,7310 | 0,7355 | 0,7400 | 0,7445 | 0,7490 | 0,7536 | 53 | 5 | 9 | 14 | 18 | 23 | 27 | 32 | 36 | 41 |
| 37 | 0,7536 | 0,7581 | 0,7627 | 0,7673 | 0,7720 | 0,7766 | 0,7813 | 52 | 5 | 9 | 14 | 19 | 23 | 28 | 32 | 37 | 42 |
| 38 | 0,7813 | 0,7860 | 0,7907 | 0,7954 | 0,8002 | 0,8050 | 0,8098 | 51 | 5 | 9 | 14 | 19 | 24 | 28 | 33 | 38 | 43 |
| 39 | 0,8098 | 0,8146 | 0,8195 | 0,8243 | 0,8292 | 0,8342 | 0,8391 | 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 |
| 40 | 0,8391 | 0,8441 | 0,8491 | 0,8541 | 0,8591 | 0,8642 | 0,8693 | 49 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 41 | 0,8693 | 0,8744 | 0,8796 | 0,8847 | 0,8899 | 0,8952 | 0,9004 | 48 | 5 | 10 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 47 |
| 42 | 0,9004 | 0,9057 | 0,9110 | 0,9163 | 0,9217 | 0,9271 | 0,9325 | 47 | 5 | 11 | 16 | 21 | 27 | 32 | 38 | 43 | 48 |
| 43 | 0,9325 | 0,9380 | 0,9435 | 0,9490 | 0,9545 | 0,9601 | 0,9657 | 46 | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 | 33 | 39 | 44 | 50 |
| 44 | 0,9657 | 0,9713 | 0,9770 | 0,9827 | 0,9884 | 0,9942 | 1,0000 | ↑45 | 6 | 11 | 17 | 23 | 29 | 34 | 40 | 46 | 51 |
| 45↓ | 1,0000 | 1,0058 | 1,0117 | 1,0176 | 1,0236 | 1,0295 | 1,0355 | 44 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 41 | 47 | 53 |
| 46 | 1,0355 | 1,0416 | 1,0477 | 1,0538 | 1,0599 | 1,0661 | 1,0724 | 43 | 6 | 12 | 18 | 25 | 31 | 37 | 43 | 49 | 55 |
| 47 | 1,0724 | 1,0786 | 1,0850 | 1,0913 | 1,0977 | 1,1041 | 1,1106 | 42 | 6 | 13 | 19 | 25 | 32 | 38 | 45 | 51 | 57 |
| 48 | 1,1106 | 1,1171 | 1,1237 | 1,1303 | 1,1369 | 1,1436 | 1,1504 | 41 | 7 | 13 | 20 | 27 | 33 | 40 | 46 | 53 | 59 |
| 49 | 1,1504 | 1,1572 | 1,1640 | 1,1708 | 1,1778 | 1,1847 | 1,1918 | 40 | 7 | 14 | 21 | 28 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 |
| 50 | 1,1918 | 1,1988 | 1,2059 | 1,2131 | 1,2203 | 1,2276 | 1,2349 | 39 | 7 | 14 | 22 | 29 | 36 | 43 | 50 | 57 | 65 |
| 51 | 1,2349 | 1,2423 | 1,2497 | 1,2572 | 1,2647 | 1,2723 | 1,2799 | 38 | 8 | 15 | 23 | 30 | 38 | 45 | 53 | 60 | 68 |
| 52 | 1,2799 | 1,2876 | 1,2954 | 1,3032 | | | | | 8 | 16 | 23 | 31 | 39 | 47 | 55 | 62 | 70 |
| | | | | | 1,3111 | 1,3190 | 1,3270 | 37 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 53 | 1,3270 | 1,3351 | 1,3432 | 1,3514 | | | | | 8 | 16 | 24 | 32 | 41 | 49 | 57 | 65 | 73 |
| | | | | | 1,3597 | 1,3680 | 1,3764 | 36 | 8 | 17 | 25 | 33 | 42 | 50 | 58 | 67 | 75 |
| 54 | 1,3764 | 1,3848 | 1,3937 | 1,4020 | | | | | 9 | 17 | 26 | 34 | 43 | 51 | 60 | 68 | 77 |
| | | | | | 1,4106 | 1,4193 | 1,4282 | 35 | 9 | 17 | 26 | 35 | 44 | 52 | 61 | 70 | 79 |
| 55 | 1,4282 | 1,4370 | 1,4460 | 1,4550 | | | | | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |
| | | | | | 1,4641 | 1,4733 | 1,4826 | ↑34 | 9 | 18 | 28 | 37 | 46 | 55 | 64 | 74 | 83 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ ← | Градусы | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |

КОТАНГЕНСЫ

*Продолжение*

| Градусы | 0′ → | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | Поправки 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 1,4826 | 1,4919 | 1,5013 | 1,5108 | | | | | 9 | 19 | 28 | 38 | 47 | 56 | 66 | 75 | 85 |
| | | | | | 1,5204 | 1,5301 | 1,5399 | 33 | 10 | 19 | 29 | 39 | 48 | 58 | 68 | 78 | 87 |
| 57 | 1,5399 | 1,5497 | 1,5597 | 1,5697 | | | | | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| | | | | | 1,5798 | 1,5900 | 1,6003 | 32 | 10 | 20 | 31 | 41 | 51 | 61 | 71 | 82 | 92 |
| 58 | 1,6003 | 1,6107 | 1,6212 | 1,6318 | | | | | 10 | 21 | 31 | 42 | 52 | 63 | 73 | 84 | 94 |
| | | | | | 1,6426 | 1,6534 | 1,6643 | 31 | 11 | 22 | 32 | 43 | 54 | 65 | 76 | 86 | 97 |
| 59 | 1,6643 | 1,6753 | 1,6864 | 1,6977 | | | | | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 67 | 78 | 89 | 100 |
| | | | | | 1,7090 | 1,7205 | 1,7320 | 30 | 11 | 23 | 34 | 46 | 57 | 69 | 80 | 92 | 103 |
| 60 | 1,7320 | 1,7438 | 1,7556 | 1,7675 | | | | | 12 | 24 | 35 | 47 | 59 | 71 | 83 | 94 | 106 |
| | | | | | 1,7796 | 1,7917 | 1,8040 | 29 | 12 | 24 | 37 | 49 | 61 | 73 | 85 | 98 | 110 |
| 61 | 1,804 | 1,816 | 1,829 | 1,842 | 1,855 | 1,868 | 1,881 | 28 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 62 | 1,881 | 1,894 | 1,907 | 1,921 | 1,935 | 1,949 | 1,963 | 27 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 11 |
| 63 | 1,963 | 1,977 | 1,991 | 2,006 | 2,020 | 2,035 | 2,050 | 26 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 12 |
| 64 | 2,050 | 2,066 | 2,081 | 2,097 | 2,112 | 2,128 | 2,145 | 25 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 65 | 2,145 | 2,161 | 2,177 | 2,194 | 2,211 | 2,229 | 2,246 | 24 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 |
| 66 | 2,246 | 2,264 | 2,282 | 2,300 | 2,318 | 2,237 | 2,356 | 23 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 16 |
| 67 | 2,356 | 2,375 | 2,394 | 2,414 | 2,434 | 2,455 | 2,475 | 22 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 68 | 2,475 | 2,496 | 2,517 | 2,539 | 2,560 | 2,583 | 2,605 | 21 | 2 | 4 | 6 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 69 | 2,605 | 2,628 | 2,651 | 2,675 | 2,699 | 2,723 | 2,747 | 20 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 17 | 19 | 21 |
| 70 | 2,747 | 2,773 | 2,798 | 2,824 | 2,850 | 2,877 | 2,904 | 19 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| 71 | 2,904 | 2,932 | 2,960 | 2,989 | 3,018 | 3,047 | 3,078 | 18 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 72 | 3,078 | 3,108 | 3,140 | 3,172 | | | | | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 |
| | | | | | 3,204 | 3,237 | 3,271 | 17 | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 | 20 | 23 | 26 | 30 |
| 73 | 3,271 | 3,305 | 3,340 | 3,376 | | | | | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 | 21 | 25 | 28 | 31 |
| | | | | | 3,412 | 3,450 | 3,487 | 16 | 4 | 7 | 11 | 15 | 19 | 22 | 26 | 30 | 33 |
| 74 | 3,487 | 3,526 | 3,566 | 3,606 | | | | | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| | | | | | 3,647 | 3,689 | 3,732 | 15 | 4 | 8 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 34 | 38 |
| 75 | 3,732 | 3,776 | 3,821 | 3,867 | | | | | 4 | 9 | 13 | 18 | 22 | 27 | 31 | 36 | 40 |
| | | | | | 3,914 | 3,962 | 4,011 | ↓14 | 5 | 10 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 38 | 43 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ ← | Градусы | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |

КОТАНГЕНСЫ

*Продолжение*

## ТАНГЕНСЫ

| *A* | 0′ | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ | 10′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 76°00′ | 4,011 | 4,016 | 4,021 | 4,026 | 4,031 | 4,036 | 4,041 | 4,046 | 4,051 | 4,056 | 4,061 | 50′ |
| 10′ | 4,061 | 4,066 | 4,071 | 4,076 | 4,082 | 4,087 | 4,092 | 4,097 | 4,102 | 4,107 | 4,113 | 40′ |
| 20′ | 4,113 | 4,118 | 4,123 | 4,128 | 4,134 | 4,139 | 4,144 | 4,149 | 4,155 | 4,160 | 4,165 | 30′ |
| 30′ | 4,165 | 4,171 | 4,176 | 4,181 | 4,187 | 4,192 | 4,198 | 4,203 | 4,208 | 4,214 | 4,219 | 20′ |
| 40′ | 4,219 | 4,225 | 4,230 | 4,236 | 4,241 | 4,247 | 4,252 | 4,258 | 4,264 | 4,269 | 4,275 | 10′ |
| 50′ | 4,275 | 4,280 | 4,286 | 4,292 | 4,297 | 4,303 | 4,309 | 4,314 | 4,320 | 4,326 | 4,331 | 13°00′ |
| 77°00′ | 4,331 | 4,337 | 4,343 | 4,349 | 4,355 | 4,360 | 4,366 | 4,372 | 4,378 | 4,384 | 4,390 | 50′ |
| 10′ | 4,390 | 4,396 | 4,402 | 4,407 | 4,413 | 4,419 | 4,425 | 4,431 | 4,437 | 4,443 | 4,449 | 40′ |
| 20′ | 4,449 | 4,455 | 4,462 | 4,468 | 4,474 | 4,480 | 4,486 | 4,492 | 4,498 | 4,505 | 4,511 | 30′ |
| 30′ | 4,511 | 4,517 | 4,523 | 4,529 | 4,536 | 4,542 | 4,548 | 4,555 | 4,561 | 4,567 | 4,574 | 20′ |
| 40′ | 4,574 | 4,580 | 4,586 | 4,593 | 4,599 | 4,606 | 4,612 | 4,619 | 4,625 | 4,632 | 4,638 | 10′ |
| 50′ | 4,638 | 4,645 | 4,651 | 4,658 | 4,665 | 4,671 | 4,678 | 4,685 | 4,691 | 4,698 | 4,705 | 12°00′ |
| 78°00′ | 4,705 | 4,711 | 4,718 | 4,725 | 4,732 | 4,739 | 4,745 | 4,752 | 4,759 | 4,766 | 4,773 | 50′ |
| 10′ | 4,773 | 4,780 | 4,787 | 4,794 | 4,801 | 4,808 | 4,815 | 4,822 | 4,829 | 4,836 | 4,843 | 40′ |
| 20′ | 4,843 | 4,850 | 4,857 | 4,864 | 4,872 | 4,879 | 4,886 | 4,893 | 4,901 | 4,908 | 4,915 | 30′ |
| 30′ | 4,915 | 4,922 | 4,930 | 4,937 | 4,945 | 4,952 | 4,959 | 4,967 | 4,974 | 4,982 | 4,989 | 20′ |
| 40′ | 4,989 | 4,997 | 5,005 | 5,012 | 4,020 | 5,027 | 5,035 | 5,043 | 5,050 | 5,058 | 5,066 | 10′ |
| 50′ | 5,066 | 5,074 | 5,081 | 5,089 | 5,097 | 5,105 | 5,113 | 5,121 | 5,129 | 5,137 | 5,145 | 11°00′ |
| 79°00′ | 5,145 | 5,153 | 5,161 | 5,169 | 5,177 | 5,185 | 5,193 | 5,201 | 5,209 | 5,217 | 5,226 | 50′ |
| 10′ | 5,226 | 5,234 | 5,242 | 5,250 | 5,259 | 5,267 | 5,276 | 5,284 | 5,292 | 5,301 | 5,309 | 40′ |
| 20′ | 5,309 | 5,318 | 5,326 | 5,335 | 5,343 | 5,352 | 5,361 | 5,369 | 5,378 | 5,387 | 5,396 | 30′ |
| 30′ | 5,396 | 5,404 | 5,413 | 5,422 | 5,431 | 5,440 | 5,449 | 5,458 | 5,466 | 5,475 | 5,485 | 20′ |
| 40′ | 5,485 | 5,494 | 5,503 | 5,512 | 5,521 | 5,530 | 5,539 | 5,549 | 5,558 | 5,567 | 5,576 | 10′ |
| 50′ | 5,576 | 5,586 | 5,595 | 5,605 | 5,614 | 5,623 | 5,633 | 5,642 | 5,652 | 5,662 | 5,671 | 10°00′ |
| 80°00′ | 5,671 | 5,681 | 5,691 | 5,700 | 5,710 | 5,720 | 5,730 | 5,740 | 5,749 | 5,759 | 5,769 | 50′ |
| 10′ | 5,769 | 5,779 | 5,789 | 5,799 | 5,810 | 5,820 | 5,830 | 5,840 | 5,850 | 5,861 | 5,871 | 40′ |
| 20′ | 5,871 | 5,881 | 5,892 | 5,902 | 5,912 | 5,923 | 5,933 | 5,944 | 5,954 | 5,965 | 5,976 | 30′ |
| 30′ | 5,976 | 5,986 | 5,997 | 6,008 | 6,019 | 6,030 | 6,041 | 6,051 | 6,062 | 6,073 | 6,084 | 20′ |
| 40′ | 6,084 | 6,096 | 6,107 | 6,118 | 6,129 | 6,140 | 6,152 | 6,163 | 6,174 | 6,186 | 6,197 | 10′ |
| 50′ | 6,197 | 6,209 | 6,220 | 6,232 | 6,243 | 6,255 | 6,267 | 6,278 | 6,290 | 6,302 | 6,314 | 9°00′ |
| | 10′ | 9′ | 8′ | 7′ | 6′ | 5′ | 4′ | 3′ | 2′ | 1′ | 0′ | *A* |

## КОТАНГЕНСЫ

ТАНГЕНСЫ

*Продолжение*

| A | 0′ | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ | 10′ | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 81°00′ | 6,314 | 6,326 | 6,338 | 6,350 | 6,362 | 6,374 | 6,386 | 6,398 | 6,410 | 6,423 | 6,435 | 50′ |
| 10′ | 6,435 | 6,447 | 6,460 | 6,472 | 6,485 | 6,497 | 6,510 | 6,522 | 6,535 | 6,548 | 6,561 | 40′ |
| 20′ | 6,561 | 6,573 | 6,586 | 6,599 | 6,612 | 6,625 | 6,638 | 6,651 | 6,665 | 6,678 | 6,691 | 30′ |
| 30′ | 6,691 | 6,704 | 6,718 | 6,731 | 6,745 | 6,758 | 6,772 | 6,786 | 6,799 | 6,813 | 6,827 | 20′ |
| 40′ | 6,827 | 6,841 | 6,855 | 6,869 | 6,883 | 6,897 | 6,911 | 6,925 | 6,940 | 6,954 | 6,968 | 10′ |
| 50′ | 6,968 | 6,983 | 6,997 | 7,012 | 7,026 | 7,041 | 7,056 | 7,071 | 7,085 | 7,100 | 7,115 | 8°00′ |
| 82°00′ | 7,115 | 7,130 | 7,146 | 7,161 | 7,176 | 7,191 | 7,207 | 7,222 | 7,238 | 7,253 | 7,269 | 50′ |
| 10′ | 7,269 | 7,284 | 7,300 | 7,316 | 7,332 | 7,348 | 7,364 | 7,380 | 7,396 | 7,412 | 7,429 | 40′ |
| 20′ | 7,429 | 7,445 | 7,462 | 7,478 | 7,495 | 7,511 | 7,528 | 7,545 | 7,562 | 7,579 | 7,596 | 30′ |
| 30′ | 7,596 | 7,613 | 7,630 | 7,647 | 7,665 | 7,682 | 7,700 | 7,717 | 7,735 | 7,753 | 7,770 | 20′ |
| 40′ | 7,770 | 7,788 | 7,806 | 7,824 | 7,842 | 7,861 | 7,879 | 7,897 | 7,916 | 7,934 | 7,953 | 10′ |
| 50′ | 7,953 | 7,972 | 7,991 | 8,009 | 8,028 | 8,048 | 8,067 | 8,086 | 8,105 | 8,125 | 8,144 | 7°00′ |
| 83°00′ | 8,144 | 8,164 | 8,184 | 8,204 | 8,223 | 8,243 | 8,264 | 8,284 | 8,304 | 8,324 | 8,345 | 50′ |
| 10′ | 8,345 | 8,366 | 8,386 | 8,407 | 8,428 | 8,449 | 8,470 | 8,491 | 8,513 | 8,534 | 8,556 | 40′ |
| 20′ | 8,556 | 8,577 | 8,599 | 8,621 | 8,643 | 8,665 | 8,687 | 8,709 | 8,732 | 8,754 | 8,777 | 30′ |
| 30′ | 8,777 | 8,800 | 8,823 | 8,846 | 8,869 | 8,892 | 8,915 | 8,939 | 8,962 | 8,986 | 9,010 | 20′ |
| 40′ | 9,010 | 9,034 | 9,058 | 9,082 | 9,106 | 9,131 | 9,156 | 9,180 | 9,205 | 9,230 | 9,255 | 10′ |
| 50′ | 9,255 | 9,281 | 9,306 | 9,332 | 9,357 | 9,383 | 9,409 | 9,435 | 9,461 | 9,488 | 9,514 | 6°00′ |
| 84°00′ | 9,514 | 9,541 | 9,568 | 9,595 | 9,622 | 9,649 | 9,677 | 9,704 | 9,732 | 9,760 | 9,788 | 50′ |
| 10′ | 9,788 | 9,816 | 9,845 | 9,873 | 9,902 | 9,931 | 9,960 | 9,989 | 10,02 | 10,05 | 10,08 | 40′ |
| 20′ | 10,08 | 10,11 | 10,14 | 10,17 | 10,20 | 10,23 | 10,26 | 10,29 | 10,32 | 10,35 | 10,39 | 30′ |
| 30′ | 10,39 | 10,42 | 10,45 | 10,48 | 10,51 | 10,55 | 10,58 | 10,61 | 10,64 | 10,68 | 10,71 | 20′ |
| 40′ | 10,71 | 10,75 | 10,78 | 10,81 | 10,85 | 10,88 | 10,92 | 10,95 | 10,99 | 11,02 | 11,06 | 10′ |
| 50′ | 11,06 | 11,10 | 11,13 | 11,17 | 11,20 | 11,24 | 11,28 | 11,32 | 11,35 | 11,39 | 11,43 | 5°00′ |
| 85°00′ | 11,43 | 11,47 | 11,51 | 11,55 | 11,59 | 11,62 | 11,66 | 11,70 | 11,74 | 11,79 | 11,83 | 50′ |
| 10′ | 11,83 | 11,87 | 11,91 | 11,95 | 11,99 | 12,03 | 12,08 | 12,12 | 12,16 | 12,21 | 12,25 | 40′ |
| 20′ | 11,25 | 12,29 | 12,34 | 12,38 | 12,43 | 12,47 | 12,52 | 12,57 | 12,61 | 12,66 | 12,71 | 30′ |
| 30′ | 12,71 | 12,75 | 12,80 | 12,85 | 12,90 | 12,95 | 13,00 | 13,05 | 13,10 | 13,15 | 13,20 | 20′ |
| 40′ | 13,20 | 13,25 | 13,30 | 13,35 | 13,40 | 13,46 | 13,51 | 13,56 | 13,62 | 13,67 | 13,73 | 10′ |
| 50′ | 11,73 | 13,78 | 13,84 | 13,89 | 13,95 | 14,01 | 14,07 | 14,12 | 14,18 | 14,24 | 14,30 | 4°00′ |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 86°00′ | 14,30 | 14,36 | 14,42 | 14,48 | 14,54 | 14,61 | 14,67 | 14,73 | 14,80 | 14,86 | 14,92 | 50′ |
| 10′ | 14,92 | 14,99 | 15,06 | 15,12 | 15,19 | 15,26 | 15,33 | 15,39 | 15,46 | 15,53 | 15,60 | 40′ |
| 20′ | 15,60 | 15,68 | 15,75 | 15,82 | 15,89 | 15,97 | 16,04 | 16,12 | 16,20 | 16,27 | 16,35 | 30′ |
| 30′ | 16,35 | 16,43 | 16,51 | 16,59 | 16,67 | 16,75 | 16,83 | 16,92 | 17,00 | 17,08 | 17,17 | 20′ |
| 40′ | 17,17 | 17,26 | 17,34 | 17,43 | 17,52 | 17,61 | 17,70 | 17,79 | 17,89 | 17,98 | 18,07 | 10′ |
| 50′ | 18,07 | 18,17 | 18,27 | 18,37 | 18,46 | 18,56 | 18,67 | 18,77 | 18,87 | 18,98 | 19,08 | 3°00′ |
| 87°00′ | 19,08 | 19,19 | 19,30 | 19,41 | 19,52 | 19,63 | 19,74 | 19,85 | 19,97 | 20,09 | 20,21 | 50′ |
| 10′ | 20,21 | 20,33 | 20,45 | 20,57 | 20,69 | 20,82 | 20,95 | 21,07 | 21,20 | 21,34 | 21,47 | 40′ |
| 20′ | 21,47 | 21,61 | 21,74 | 21,88 | 22,02 | 22,16 | 22,31 | 22,45 | 22,60 | 22,75 | 22,90 | 30′ |
| 30′ | 22,90 | 23,06 | 23,21 | 23,37 | 23,53 | 23,69 | 23,86 | 24,03 | 24,20 | 24,37 | 24,54 | 20′ |
| 40′ | 24,54 | 24,72 | 24,90 | 25,08 | 25,26 | 25,45 | 25,64 | 25,83 | 26,03 | 26,23 | 26,43 | 10′ |
| 50′ | 26,43 | 26,64 | 26,84 | 27,06 | 27,27 | 27,49 | 27,71 | 27,94 | 28,17 | 28,40 | 28,64 | 2°00′ |
| 88°00′ | 28,64 | 28,88 | 29,12 | 29,37 | 29,62 | 29,88 | 30,14 | 30,41 | 30,68 | 30,96 | 31,24 | 50′ |
| 10′ | 31,24 | 31,53 | 31,82 | 32,12 | 32,42 | 32,73 | 33,05 | 33,37 | 33,69 | 34,03 | 34,37 | 40′ |
| 20′ | 34,37 | 34,72 | 35,07 | 35,43 | 35,80 | 36,18 | 36,56 | 36,96 | 37,36 | 37,77 | 38,19 | 30′ |
| 30′ | 38,19 | 38,62 | 39,06 | 39,51 | 39,97 | 40,44 | 40,92 | 41,41 | 41,92 | 42,43 | 42,96 | 20′ |
| 40′ | 42,96 | 43,51 | 44,07 | 44,64 | 45,23 | 45,83 | 46,45 | 47,09 | 47,74 | 48,41 | 49,10 | 10′ |
| 50′ | 49,10 | 49,82 | 50,55 | 51,30 | 52,08 | 52,88 | 53,71 | 54,56 | 55,44 | 56,35 | 57,29 | 1°00′ |
| 89°00′ | 57,29 | 58,26 | 59,27 | 60,31 | 61,38 | 62,50 | 63,66 | 64,86 | 66,11 | 67,40 | 68,75 | 50′ |
| 10′ | 68,75 | 70,15 | 71,62 | 73,14 | 74,73 | 76,39 | 78,13 | 79,94 | 81,85 | 83,84 | 85,94 | 40′ |
| 20′ | 85,94 | 88,14 | 90,46 | 92,91 | 95,49 | 98,22 | 101,1 | 104,2 | 107,4 | 110,9 | 114,6 | 30′ |
| 30′ | 114,6 | 118,5 | 122,8 | 127,3 | 132,2 | 137,5 | 143,2 | 149,5 | 156,3 | 163,7 | 171,9 | 20′ |
| 40′ | 171,9 | 180,9 | 191,0 | 202,2 | 214,9 | 229,2 | 245,6 | 264,4 | 286,5 | 312,5 | 343,8 | 10′ |
| 50′ | 343,8 | 382,0 | 429,7 | 491,1 | 573,0 | 687,5 | 859,4 | 1146 | 1719 | 3438 | ∞ | 0°00′ |
| | 10′ | 9′ | 8′ | 7′ | 6′ | 5′ | 4′ | 3′ | 2′ | 1′ | 0′ | A |

КОТАНГЕНСЫ

## VII. Перевод градусной меры в радианную

| Градусы | Радианы (дуга) | Градусы | Радианы (дуга) | Градусы | Радианы (дуга) | Минуты | Радианы (дуга) | Минуты | Радианы (дуга) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0000 | 35 | 0,6109 | 70 | 1,2217 | 0 | 0,0000 | 30 | 0,0087 |
| 1 | 0,0175 | 36 | 0,6283 | 71 | 1,2392 | 1 | 0,0003 | 31 | 0,0090 |
| 2 | 0,0349 | 37 | 0,6458 | 72 | 1,2566 | 2 | 0,0006 | 32 | 0,0093 |
| 3 | 0,0524 | 38 | 0,6632 | 73 | 1,2741 | 3 | 0,0009 | 33 | 0,0096 |
| 4 | 0,0698 | 39 | 0,6807 | 74 | 1,2915 | 4 | 0,0012 | 34 | 0,0099 |
| 5 | 0,0873 | 40 | 0,6981 | 75 | 1,3090 | 5 | 0,0015 | 35 | 0,0102 |
| 6 | 0,1047 | 41 | 0,7156 | 76 | 1,3265 | 6 | 0,0017 | 36 | 0,0105 |
| 7 | 0,1222 | 42 | 0,7330 | 77 | 1,3439 | 7 | 0,0020 | 37 | 0,0108 |
| 8 | 0,1396 | 43 | 0,7505 | 78 | 1,3614 | 8 | 0,0023 | 38 | 0,0111 |
| 9 | 0,1571 | 44 | 0,7679 | 79 | 1,3788 | 9 | 0,0026 | 39 | 0,0113 |
| 10 | 0,1745 | 45 | 0,7854 | 80 | 1,3963 | 10 | 0,0029 | 40 | 0,0116 |
| 11 | 0,1920 | 46 | 0,8029 | 81 | 1,4137 | 11 | 0,0032 | 41 | 0,0119 |
| 12 | 0,2094 | 47 | 0,8203 | 82 | 1,4312 | 12 | 0,0035 | 42 | 0,0122 |
| 13 | 0,2269 | 48 | 0,8378 | 83 | 1,4486 | 13 | 0,0038 | 43 | 0,0125 |
| 14 | 0,2443 | 49 | 0,8552 | 84 | 1,4661 | 14 | 0,0041 | 44 | 0,0128 |
| 15 | 0,2618 | 50 | 0,8727 | 85 | 1,4835 | 15 | 0,0044 | 45 | 0,0131 |
| 16 | 0,2793 | 51 | 0,8901 | 86 | 1,5010 | 16 | 0,0047 | 46 | 0,0134 |
| 17 | 0,2967 | 52 | 0,9076 | 87 | 1,5184 | 17 | 0,0049 | 47 | 0,0137 |
| 18 | 0,3142 | 53 | 0,9250 | 88 | 1,5359 | 18 | 0,0052 | 48 | 0,0140 |
| 19 | 0,3316 | 54 | 0,9425 | 89 | 1,5533 | 19 | 0,0055 | 49 | 0,0143 |
| 20 | 0,3491 | 55 | 0,9599 | 90 | 1,5708 | 20 | 0,0058 | 50 | 0,0145 |
| 21 | 0,3665 | 56 | 0,9774 | 91 | 1,5882 | 21 | 0,0061 | 51 | 0,0148 |
| 22 | 0,3840 | 57 | 0,9948 | 92 | 1,6057 | 22 | 0,0064 | 52 | 0,0151 |
| 23 | 0,4014 | 58 | 1,0123 | 93 | 1,6232 | 23 | 0,0067 | 53 | 0,0154 |
| 24 | 0,4189 | 59 | 1,0297 | 94 | 1,6406 | 24 | 0,0070 | 54 | 0,0157 |
| 25 | 0,4363 | 60 | 1,0472 | 95 | 1,6581 | 25 | 0,0073 | 55 | 0,0160 |
| 26 | 0,4538 | 61 | 1,0647 | 96 | 1,6755 | 26 | 0,0076 | 56 | 0,0163 |
| 27 | 0,4712 | 62 | 1,0821 | 97 | 1,6930 | 27 | 0,0079 | 57 | 0,0166 |
| 28 | 0,4887 | 63 | 1,0996 | 98 | 1,7104 | 28 | 0,0081 | 58 | 0,0169 |
| 29 | 0,5061 | 64 | 1,1170 | 99 | 1,7279 | 29 | 0,0084 | 59 | 0,0172 |
| 30 | 0,5236 | 65 | 1,1345 | 100 | 1,7453 | | | | |
| 31 | 0,5411 | 66 | 1,1519 | 180 | 3,1416 | | | | |
| 32 | 0,5585 | 67 | 1,1694 | 200 | 3,4907 | | | | |
| 33 | 0,5760 | 68 | 1,1868 | 300 | 5,2360 | | | | |
| 34 | 0,5934 | 69 | 1,2043 | 360 | 6,2802 | | | | |

## VIII. Перевод радианной меры в градусную

| Радианы | Градусы и минуты | Радианы | Градусы и минуты | Радианы | Градусы и минуты | Радианы | Минуты | Радианы | Минуты |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 57° 18′ | 0,1 | 5° 44′ | 0,01 | 0° 34′ | 0,001 | 0° 03′ | 0,0001 | 0° 00′ |
| 2 | 114° 35′ | 0,2 | 11° 28′ | 0,02 | 1° 09′ | 0,002 | 0° 07′ | 0,0002 | 0° 01′ |
| 3 | 171° 53′ | 0,3 | 17° 11′ | 0,03 | 1° 43′ | 0,003 | 0° 10′ | 0,0003 | 0° 01′ |
| 4 | 229° 11′ | 0,4 | 22° 55′ | 0,04 | 2° 18′ | 0,004 | 0° 14′ | 0,0004 | 0° 01′ |
| 5 | 286° 29′ | 0,5 | 28° 39′ | 0,05 | 2° 52′ | 0,005 | 0° 17′ | 0,0005 | 0° 02′ |
| 6 | 343° 46′ | 0,6 | 34° 23′ | 0,06 | 3° 26′ | 0,006 | 0° 21′ | 0,0006 | 0° 02′ |
| 7 | 401° 04′ | 0,7 | 40° 06′ | 0,07 | 4° 01′ | 0,007 | 0° 24′ | 0,0007 | 0° 02′ |
| 8 | 458° 22′ | 0,8 | 45° 50′ | 0,08 | 4° 35′ | 0,008 | 0° 28′ | 0,0008 | 0° 03′ |
| 9 | 515° 40′ | 0,9 | 51° 34′ | 0,09 | 5° 09′ | 0,009 | 0° 31′ | 0,0009 | 0° 03′ |

## ЛИТЕРАТУРА


*Андронов И. К., Окунев А. К.* Основной курс тригонометрии (пособие для учителей). Учпедгиз, М., 1960.

*Антонов Н. П.* и др. Сборник задач по элементарной математике. Физматгиз, М., 1964.

*Ашкинузе В. Г., Шоластер П. П.* Алгебра и элементарные функции. «Просвещение», М., 1964.

*Баранова И. В., Ляпин С. Е.* Задачи на доказательство по алгебре. Учпедгиз, М., 1954.

*Барсуков А. Н.* Алгебра, ч. 1. Учпедгиз, М., 1967.

*Барыбин К. С., Исаков А. К.* Сборник задач по математике. Учпедгиз, М., 1955.

*Бермант А. Ф., Люстерник Л. А.* Тригонометрия. Гостехиздат, М., 1956.

*Богушевский К. С., Сикорский К. П.* Сборник задач по математике для повторения. Учпедгиз, М., 1955.

*Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Лекции и задачи по элементарной математике. «Наука», М., 1971.

*Бородин А. И.* и др. Математика (в помощь поступающим). «Вища школа», Киев, 1974.

*Брадис В. М.* и др. Алгебра, ч. 2. Учпедгиз, М., 1960.

*Вишенський В. А.* та ін. Вибрані питання елементарної математики. Посібник для вступників до вузів. «Радянська школа», Київ, 1966.

*Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике. Госиздат техн.-теор. литературы, М.—Л., 1960.

*Гурский И. П.* Функции и построение графиков. Пособие для учителей. Учпедгиз, М., 1961.

*Давыдов А. К.* Сборник задач по алгебре и элементарным функциям. Учпедгиз, М., 1961.

Детская энциклопедия. Издательство Академии педагогических наук РСФСР, т. 3, М., 1961.

*Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х.* Пособие по математике для поступающих в вузы. «Наука», М., 1961.

*Егерев В. К.* и др. Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы. «Высшая школа», М., 1967.

*Завало С. Т.* Елементи аналізу. Алгебра многочленів. «Радянська школа», Київ, 1972.

*Завало С. Т.* Рівняння і нерівності. «Радянська школа», Київ, 1973.

*Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканави М. И.* Элементарная математика. «Наука», М., 1967.

*Залогин Н. С.* Конкурсные задачи по математике. Госиздат техн. литературы УССР, Киев, 1964.

*Зорин В. В.* Пособие по математике для поступающих в вузы. «Высшая школа», М., 1968.

*Калнин Р. А.* Алгебра и элементарные функции. «Наука», М., 1965.

*Киселев А. П.* Алгебра, ч. 2. Учпедгиз, М., 1965.
*Киселев А. П.* Арифметика. Учпедгиз, М., 1958.
*Кожеуров П. Я.* Тригонометрия. Физматгиз, М., 1963.
*Колмогоров А. Н.* О профессии математика. Изд-во МГУ, М., 1960.
*Колосов А. А.* Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах. Учпедгиз, М., 1963.
*Кордемский Б. А.* Математическая смекалка. Физматгиз, М., 1963.
*Кочетков Е. С., Кочеткова К. С.* Алгебра и элементарные функции, ч. 1 и 2. «Просвещение», М., 1967.
*Кречмар В. А.* Задачник по алгебре. Физматгиз. М., 1959.
*Кущенко В. С.* Сборник конкурсных задач по математике с решениями. «Судостроение», Л., 1968.
*Ларичев П. А.* Сборник задач по алгебре, ч. 1 и 2. Учпедгиз, 1965.
*Лидский В. Б.* и др. Задачи по элементарной математике. Физматгиз, М., 1967.
*Михайловський В. І.* та ін. Збірник задач республіканських математичних олімпіад. «Вища школа», Київ, 1969.
*Моденов П. С.* Сборник задач по математике с анализом ошибок. «Советская наука», М., 1951.
*Моденов П. С., Новоселов С. И.* Пособие по математике для поступающих в вузы. Изд-во МГУ, М., 1965.
*Новоселов С. И.* Специальный курс тригонометрии. «Советская наука», М., 1953.
*Новоселов С. И.* Тригонометрия. Учпедгиз, М., 1956.
*Новоселов С. И.* Обратные тригонометрические функции. Учпедгиз, М., 1956.
*Новоселов С. И.* Специальный курс элементарной алгебры. «Высшая школа», М., 1965.
*Погребиський І. Б., Фільчаков П. Ф.* Тригонометрія. «Радянська школа», Київ, 1954.
*Позойский Р. И.* Сборник задач по тригонометрии. «Радянська школа», Киев, 1953.
*Пойя Д.* Как решать задачу. Учпедгиз, М., 1959.
*Пономарев С. А., Сырнев Н. И.* Сборник задач по арифметике. Учпедгиз, М., 1962.
*Рыбкин Н.* Сборник задач по тригонометрии. Учпедгиз, М., 1950.
*Рыбкин Н.* Сборник задач по геометрии, ч. 1 и 2. Учпедгиз, М., 1953.
*Сивашинский И. Х.* Элементарные функции и графики. «Наука», М., 1966.
*Сивашинский И. Х.* Задачи по математике для внеклассных занятий. «Просвещение», М., 1966.
*Сивашинский И. Х.* Неравенства в задачах. «Наука», М., 1967.
*Смирнов И. И.* Сборник вопросов и задач по тригонометрии. Учпедгиз, М., 1959.
*Соминский И. С.* Элементарная алгебра (дополнительный курс). Физматгиз, М., 1963.
Справочник по элементарной математике. Геометрия, тригонометрия и векторная алгебра. Под редакцией П. Ф. Фильчакова. «Наукова думка», Киев, 1966.
Справочник по элементарной математике. Под редакцией П. Ф. Фильчакова. «Наукова думка», Киев, 1972.
*Стратилатов П. В.* Сборник задач по тригонометрии. Учпедгиз, М., 1957.

*Туманов С. Л.* Элементарная алгебра. Учпедгиз, М., 1962.
*Туманов С. И.* Поиски решения задачи. «Просвещение», М., 1969.
*Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Алгебра, ч. 1. «Радянська школа», Киев, 1953.
*Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Алгебра, ч. 2. Учпедгиз, М., 1954.
*Худобин А. И., Худобин Н. И.* Сборник задач по тригонометрии. Учпедгиз, М., 1955.
*Худобин А. И., Худобин Н. И.* и др. Сборник задач по алгебре и элементарным функциям. «Просвещение», М., 1966.
*Шахно К. У.* Справочник по математике. Учпедгиз, М., 1961.
*Шахно К. У.* Сборник задач по математике повышенной трудности. «Высшая школа», Минск, 1964.
*Шахно К. У.* Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике. «Высшая школа», Минск, 1965.
*Швецов К. И., Бевз Г. П.* Справочник по элементарной математике. «Наукова думка», Киев, 1965.
Энциклопедия элементарной математики. Книги 1—3. ГИТТЛ, М.—Л., 1951—1952.

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Абсолютная величина 21, 37
— погрешность 39
Абсцисса 276
Алгебраическая сумма 23
Алгебраические дроби 72
Алгебраическое выражение 52
Алгоритм Евклида 13, 70
Аналитический способ задания функции 275
Аналитическое выражение 275
Аргумент 273
— комплексного числа 598
Арифметическая прогрессия 347
Арифметический корень 83
Арифметическое действие 5
Арккосинус 496
Арккотангенс 498
Арксинус 494
Арктангенс 497
Ассоциативный закон сложения 7, 77, 594
— — умножения 7, 77
Аффикс комплексного числа 596

Биквадратные уравнения 126
Бином Ньютона 533

Величина дискретная 271
— монотонная 273
— непрерывная 271
— ограниченная 273
Величина ограниченная сверху 273
— — снизу 273
— переменная 271
— постоянная 271
Взаимно обратные функции 492
Вогнутость графика функции 285
Возведение в степень 45, 55, 87, 603
Возвратные уравнения 180
Выпуклость графика функции 285
Вычитаемое 6, 18
Вычитание 6, 18, 25, 35, 47, 61, 75, 86, 592
Гармонический ряд 555
Геометрический ряд 553
Геометрическая прогрессия 352
Градус 413
График функции 276
Графический способ задания функций 275

Двучленные уравнения 621
Деление 6, 19, 25, 48, 55, 57, 63, 76, 87, 593, 603
— с остатком 7, 64
Делимое 6, 7, 19
Делимость многочлена 135
— натуральных чисел 11
— произведения 11
— разности 11
— суммы 11
Делитель 7, 11, 19
Десятичные дроби 24
— — периодические 26
— приближения действительного числа 33
Дистрибутивный закон 8, 77, 594
Дробное алгебраическое выражение 52
— — уравнение 114
Дробно-рациональные выражения 72
Дробь неправильная 16, 24
— — рациональная 76
— несократимая 16, 74
— правильная рациональная 76
— рациональная 72
Дуга 412
— обобщенная и круговая 412

Закон изменения суммы 9
— монотонности сложения 7
— — умножения 8
Законы изменения разности 10

Законы изменения произведения 10
— — частного 10

Извлечение корня 45, 83, 87, 604
Интервал 272
— замкнутый 272
— открытый 272
— полуоткрытый 272
Интервалы монотонности функции 281

Квадратный трехчлен 120
Коммутативный закон сложения 7, 77, 594
— — умножения 7, 77, 594
Комплексные числа 590
— — сопряженные 591
Корень 82, 604
— квадратный 45, 83
— $n$-й степени 82
— уравнения 108, 109
Кратное 11
Косеканс 416
Косинус 416
Котангенс 416

Линейная функция 298
Линейное уравнение 115
Логарифмирование 375
Логарифмическая линейка 381
Логарифмы 372
— десятичные 380
— натуральные 572

Максимум функции 284
Мантиса десятичного логарифма 380
Метод математической индукции 357
— неопределенных коэффициентов 616
Минимум функции 284
Мнимая единица 590
Множимое 6
Множитель 6
Многочлен 57
— неприводимый 68
— однородный 58
— приводимый 68
— противоположный 60
Модуль 37
— комплексного числа 597

Наибольший общий делитель 13, 69
Наименьшее общее кратное 14, 71
Натуральный ряд чисел 5
Независимая переменная 273
Необходимый признак сходимости ряда 554
Непрерывность функции 582
Неравенства алгебраические 217
— безусловные 218
— второй степени 237
— дробно-рациональные 245
— иррациональные 253
— квадратные 237
— линейные 235
— логарифмические 397
— показательные 397
— равносильные 233
— рациональные 241, 245
— дробные 245
— целые 241
— с одним неизвестным 232
— тождественные 218
— трансцендентные 217
Неравенство 217
— Бернулли 224
— Коши 223
— Коши — Буняковского 223
Несократимая дробь 16, 74
Нуль-многочлен 58

Область допустимых значений 109, 233
— изменения переменной величины 271
— функции 274
— определения неравенства 217, 233
— — уравнения 109
— — функции 274, 492
— существования алгебраического выражения 53
— — функции 274, 492
Обобщение понятия о показателе 366
Обратная пропорциональная зависимость величин 306
Обратные тригонометрические функции 492, 494
Обращение периодических дробей в обыкновенные 362
Общий член арифметической прогрессии 347
— — геометрической прогрессии 352

Общий член последовательности 344
— — ряда 552
Одночлен 56
Округление 41
— по избытку 41
— по недостатку 41
— с поправкой 41
Определители второго порядка 174
— третьего порядка 177
Ордината 276
Основная теорема алгебры 612
Основное свойство алгебраической дроби 73
— арифметического корня 85
— — дробного числа 16
— — пропорции 78
Основные законы действий 1, 37, 77
— свойства абсолютной величины 37
— — бесконечно больших последовательностей 546
— — — — функций 564
— — — малых последовательностей 545
— — — — функций 563
— — десятичных логарифмов 380
— — корня 82
— — логарифмической функции 378
— — непрерывных функций 583
— — неравенств 218
— — определителей второго порядка 176
Основные свойства показательной функции 371
— — пределов 547
— — — функций 565
— — равносильных уравнений 111
— — рядов 555
— — степенной функции 289
— — тождеств 54
— — тригонометрических функций 442
— — эквивалентных бесконечно больших функций 580
— — — — малых функций 578
— соотношения между обратными тригонометрическими функциями 501
— элементарные функции 278
Остаток 7
Относительная погрешность 40
Отрезок 272
Переместительный закон сложения 7, 77, 594
— — умножения 7, 77, 594
Перестановки 527
Период 284
— основной 284
Периодичность тригонометрических функций 439
Порядок действий 10
Последовательность бесконечно большая 545
— — малая 544
— возрастающая 345
— монотонная 346
— неограниченная 347
— ограниченная 347
— — сверху 347
— — снизу 347
Последовательность постоянная 345, 547
— расходящаяся 542
— строго возрастающая 345
— — монотонная 346
— — убывающая 345
— сходящаяся 542
— убывающая 345
— числовая 344
Потенцирование 373
Правила логарифмирования 373
— потенцирования 373
Правило Крамера 181
Предел переменной величины 358
— последовательности 358, 542
— функции 562
Предельная абсолютная погрешность 40, 42
— относительная погрешность 40, 42
Преобразование графиков функций 309
Приближенные значения квадратных корней 84
Признаки делимости 11, 12
— существования предела функции 569
Принцип математической индукции 357
Произведение 6
Промежуток 272
Промилле 27
Пропорции 78
— производные 78
Простые гармонические колебания 452

Процент 27
Прямая пропорциональная зависимость величин 299
Прямоугольная система координат 275

Равенство 54
Радиан 413
Размещения 527
Разность 6, 18
Распределительный закон 8, 77, 594
Решение неравенства 233
— системы уравнений 167
— уравнения 108, 109
Ряд 551
— гармонический 555
— геометрический 553
— знакопеременный 552
— знакочередующийся 552
— равных отношений 79
— расходящийся 542
— сходящийся 542

Свойства бесконечных последовательностей 542
— корней квадратного уравнения 119
— логарифмов 373
— разложения бинома Ньютона 535
— целых рациональных алгебраических уравнений 139
— членов арифметической прогрессии 348
— — геометрической прогрессии 352
Секанс 416
Синус 416
Система рациональных неравенств с одним неизвестным 247, 249
— уравнений 167
Системы алгебраических уравнений 167
— иррациональных уравнений 200
— линейных уравнений 170
— логарифмических уравнений 394
— показательных уравнений 394
Системы симметричных уравнений 199
— трех уравнений с тремя неизвестными 172, 205
Скобки 10
Смешанная периодическая дробь 26
Сложение 5, 17, 25, 35, 43, 46, 56, 60, 75, 86, 591
Сложные проценты 29
Соединения 527
Сокращение дроби 16, 73
Сопряженные комплексные числа 591
Сочетания 528
Сочетательный закон сложения 7, 77, 594
— — умножения 7, 77
Способ алгебраического сложения 171, 173
— группировки 66
— подстановки 170, 173
— сравнения 172, 174
Способы задания функции 275
Сравнение бесконечно больших функций 579
— — малых функций 576
— действительных чисел 33
— дробных чисел 15
— иррациональных выражений 99
— рациональных чисел 22
Среднее арифметическое 222
— гармоническое 222
— геометрическое 222
— квадратическое 223
— степенное 222
Степень 13, 55
— дробная 366
— иррациональная 366
Степень многочлена 58
— нулевая 366
— одночлена 56
— целая отрицательная 366
Сумма 6
— членов арифметической прогрессии 348
— — бесконечной геометрической прогрессии 359
— — геометрической прогрессии 353
Схема Горнера 136

Табличный способ задания функции 275
Тангенс 416
Теорема Безу 135
— Виета 119, 617
— Гаусса 612
Тождественность многочленов 59

Тождественно равные выражения 54
Тождественные выражения 54
— преобразования 52, 54, 82, 100, 517
Тождество 54
Точки разрыва функции 584
Треугольник Паскаля 536
Трехчленные уравнения 623
Тригонометрическая форма комплексного числа 599
Тригонометрические функции 415
— — числового аргумента 438
— уравнения 454
— — простейшие 454
— неравенства 478
— — простейшие 478
Тригонометрическое тождество 423

Угол 412
Угол обобщений 412
Уменьшаемое 6, 18
Умножение 6, 19, 25, 36, 44, 47, 55, 56, 61, 75, 86, 592, 601
Уравнение 107
— квадратное 116
— — неполное 117
— — полное 117
— — приведенное 117
— линейное 115
Уравнения алгебраические 107
— — рациональные 107
— — целые 107, 114, 611
— высших степеней 611
— иррациональные 107, 147
— логарифмические 387
— показательные 383
— показательно-логарифмические 391
— показательно-степенные 385
— равносильные 111
— трансцендентные 107
Формула Муавра 603

— общего члена арифметической прогрессии 347
— — — геометрической прогрессии 352
— — — бинома Ньютона 534
— — — последовательности 344
— — — ряда 552
— сложного радикала 97
Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента 436
— двойных и тройных аргументов 429
— деления обратных тригонометрических функций пополам 517
— корней квадратного уравнения 117, 118, 119
Формулы перехода от одного основания логарифмов к другому 376
— половинного аргумента 432
— преобразования произведения тригонометрических функций в сумму 439
— преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение 434
— приведения 427
— сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций 425
— сложения и вычитания обратных тригонометрических функций 505
— сокращенного умножения 62
— удвоения обратных тригонометрических функций 515
Функция 273
— алгебраическая 277
— бесконечно большая 564
— — малая 563
— возрастающая 280
— дробно-линейная 306
— дробно-рациональная 277
— иррациональная 277
— квадратичная 299
— линейная 298
— логарифмическая 378
— многозначная 273
— монотонная 281
— непрерывная 582
— нечетная 283
— неявная 280
— обратная 279, 492
— ограниченная 280
— однозначная 273
— периодическая 284
— показательная 371
— рациональная 277
— — дробная 277, 278
— — целая 277, 278
— сложная 278
— степенная 289
— убывающая 280

Функция четная 283
— явная 280

Характеристика десятичного логарифма 380

Целое рациональное выражение, 52, 55

Частное 7, 19, 63
Четность и нечетность тригонометрических функций 429
Числа действительные 31
— дробные 15
— иррациональные 31, 33
— натуральные 5
— нечетные 12
— отрицательные 21
— простые 12
Числа приближенные 39
— рациональные 20, 21
— составные 12
— точные 39
— целые 21
— четные 12
Число нуль 14
Число *e* 571
Числовая ось 21
Числовое значение алгебраического выражения 53
Чистая периодическая дробь 26

Эквивалентные бесконечно большие функции 580
— — малые функции 576
— неравенства 233
— уравнения 111
Экстремум функции 284
Элементарные функции 277

**Яремчук Федор Петрович,**
**Рудченко Петр Антонович**

АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ
Справочник

Редакторы
*Л. И. Белецкая, Р. И. Гусячая*

Художественный редактор
*В. М. Тепляков*

Оформление художника
*В. Г. Самсонова*

Технические редакторы
*Д. В. Вирич, И. А. Ратнер*

Корректоры
*Л. М. Тищенко, Е. А. Михалец*

Сдано в набор 4.XI 1975 г. Подписано к печати 26.III 1976 г. БФ 35957. Зак. 5-513. Изд. № 377. Тираж 200 000 (I завод — 100 000). Бумага газетная, 84×108 1/32. Усл. печ. листов 36,12. Учетно-изд. листов 39,64. Цена 1 руб. 52 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе
Республиканского производственного объединения
«Полиграфкнига» Госкомиздата УССР,
Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.